Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова
Механико-математический факультет

На правах рукописи

УДК 519.2

Королев Александр Владимирович

НЕРАВНОМЕРНЫЕ УСРЕДНЕНИЯ В ЭРГОДИЧЕСКОЙ ТЕОРЕМЕ

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва, 2010

Работа выполнена на кафедре теории функций и функционального анализа механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор Богачев Владимир Игоревич

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор Кириллов Андрей Игоревич,

кандидат физико-математических наук Толмачев Николай Андреевич

Ведущая организация: Математический институт РАН им. В.А. Стеклова

Защита диссертации состоится "18 июня" 2010 г. в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.85 при Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16–24.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ (главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан "18 мая" 2010 г.

Ученый секретарь диссертационного совета Д 501.001.85 при МГУ, доктор физико-математических наук, профессор И.Н. Сергеев

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Центральное место в эргодической теории занимает хорошо известная теорема Биркгофа–Хинчина, которая состоит в следующем. Для всякой интегрируемой функции f на измеримом пространстве X с конечной мерой, инвариантной относительно полугруппы T_t измеримых преобразований X, существует конечный предел средних

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(T_s x)\,ds$$

при $T \to +\infty$ для почти всех $x \in X$. Индивидуальная эргодическая теорема была установлена Г. Биркгофом[1] в 1931 году для более специального случая динамических систем, возникающих из дифференциальных уравнений на гладких многообразиях. Аналогичное утверждение, сформулированное в терминах унитарных операторов, сопряженных с динамической системой, было получено Дж. Нейманом[2]. В отличие от теоремы Г. Бирхгофа, в эргодической теореме Дж. Неймана речь идет о сходимости по норме гильбертова пространства, а не о сходимости почти всюду.

В 2003 году В.В. Козловым и Д.В. Трещевым была представлена новая форма эргодических теорем Г. Биркгофа и Дж. Неймана (см. работы[3,4]). Ими было установлено, что для всякой вероятностной меры ν на $[0, +\infty)$ с плотностью относительно меры Лебега и всякой ограниченной измеримой функции f на измеримом пространстве X средние

$$\int_0^{+\infty} f(T_{ts}x)\,\nu(ds)$$

при $T \to +\infty$ сходятся к тому же пределу, что и средние из теоремы Бирхгофа-Хинчина. В первой главе диссертации продолжено изучение этого вида усреднений. Здесь выяснено, что для неограниченных функций f это утверждение теряет силу, однако при некоторых

[1]Birkhoff G.D. *Proof of the ergodic theorem.* Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 1931. V. 17, N. 12. P. 656–660.

[2]Neumann J.V. *Proof of the quasi-ergodic hypothesis.* Proc. Nat. Acad. Sci. 1932. V. 18, N. 1. P. 70–82.

[3]Kozlov V.V., Treschev D.V. *On new forms of the ergodic theorem.* J. Dynam. Control Syst. 2003. V. 9, N 3. P. 449–453.

[4]Козлов В.В., Трещев Д.В. *Эволюция мер в фазовом пространстве нелинейных гамильтоновых систем.* Теор. и матем. физ. 2003. Т. 136, N 3. С. 496–506.

соотношениях между характерами интегрируемости f и плотности меры ν имеются положительные результаты. Также здесь введены некоторые новые объекты, связанные с указанными усреднениями, приводящие к вопросу о слабой сходимости мер на фазовом пространстве.

Среди различных обобщений индивидуальной эргодической теоремы следует особо выделить классический результат Н. Винера и А. Винтнера (см. работы[5,6] и монографию И. Ассани[7]). С середины прошлого века возникло целое направление развития весовых эргодических теорем, современное изложение этих результатов дано в монографиях У. Кренгеля[8] и К. Петерсена[9] (см., также работу А. Белов и В. Лозерт[10]).

Идеи теории полугрупп оказались весьма плодотворными при изучении марковских процессов. Эргодическая теория таких процессов впервые изложена в монографии Дж. Дуба[11]. Современное развитие этой теории изложено в работах А.В. Скорохода[12] и Х. Куниты[13].

В диссертационной работе рассматривается аналог эргодической теоремы в форме Козлова–Трещева для диффузий. В отличие от детерминированного случая, здесь нет полугруппового свойства по времени.

Рассматривая эргодическую теорему в новой форме, предложенной В.В. Козловым и Д.В. Трещевым, следует упомянуть о другого рода обобщениях, полученных сравнительно недавно. Речь идет о проблеме унификации мартингальных и эргодических средних. Задача изучения их общего поведения ставилась и обсуждалась в работе С. Какутани[14] и упомянутой выше монографии Дж. Дуба. С тех пор было разработано несколько различных подходов к этой пробле-

---

[5] Wiener N., Wintner A. *On the ergodic dynamics of almost periodic systems.* Amer. J. Math. 1941. V. 63. P. 794–824.

[6] Wiener N., Wintner A. *Harmonic analysis and ergodic theory.* J. Math. Phys. 1939. V. 63. P. 415–426.

[7] Assani I. *Wiener Wintner ergodic theorems.* World Scientific, Singapore, 2003.

[8] Krengel U. *Ergodic theorems.* Walter de Gruyter, Berlin, 1985.

[9] Petersen K. *Ergodic theory.* Cambridge University Press, 1983.

[10] Below A., Losert V. *The weighted pointwise ergodic theorem and the Individual ergodic theorem along subsequences.* Trans. Amer. Math. Soc. 1985. V. 288, N 1. P. 307–345.

[11] Дуб Дж.Л. *Вероятностные процессы.* М., ИЛ. 1956.

[12] Скороход А.В. *Асимптотические методы теории стохастических дифференциальных уравнений.* Наукова Думка, Киев, 1987

[13] Kunita H. *Stochastic flows and stochastic differential equations.* Cambridge University Press, 1990.

[14] Kakutani S. *Ergodic theory.* Proc. Int. Congr. of Math. 1950. V. 2. P. 128–142

ме, однако в 1998 году А.Г. Качуровским[15] была предложена дискретная мартингально-эргодическая теорема, содержащая композицию операторов усреднения и условного математического ожидания, дающая унифицирующую структуру и унифицированную формулировку теорем сходимости мартингалов и эргодических средних. Аналог этой теоремы для непрерывного случая рассмотрен в работе[16].

Цель работы. Исследовать сходимость неравномерных эргодических средних в форме Козлова–Трещева для неограниченных функций. Исследовать слабую сходимость мер, соответствующих этим усреднениям. Обобщить теорему Козлова–Трещева на случай операторных полугрупп и диффузий.

Научная новизна. Основные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

1. Доказана поточечная эргодическая теорема в форме Козлова–Трещева с вероятностной плотностью ϱ для неограниченных функций f при некоторых соотношениях между характерами интегрируемости f и ϱ. Построен пример, показывающий, что отказаться от дополнительных условий нельзя.

2. Доказана слабая сходимость семейства мер, порожденных усреднениями в форме Козлова–Трещева, на вполне регулярных пространствах с метризуемыми компактами. Установлена равномерная плотность указанного семейства мер на суслинских пространствах.

3. Доказано обобщение теоремы Козлова–Трещева для усреднений с операторной полугруппой и получена максимальная оценка для неравномерных средних в L^p. Установлена поточечная теорема сходимости эргодических средних в форме Козлова–Трещева и слабая сходимость связанных с ними семейств мер для случая диффузионных процессов. В отличие от детерминированного случая, здесь нет полугруппового свойства по времени.

Методы исследования. В работе применяются методы теории меры, функционального анализа, эргодической теории, элементы

[15]Качуровский А.Г. *Мартингально-эргодическая теорема.* Мат. заметки, 1998. V. 64, N. 2. С. 311–314

[16]Подвигин И.В. *Мартингально-эргодические и эргодико-мартингальные процессы с непрерывным временем.* Матем. сб., 2009. V. 200, N. 5 С. 55–70

теории стохастических процессов, а также некоторые оригинальные конструкции.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Ее результаты и методы могут быть использованы в различных вопросах теории меры, теории вероятностей и теории динамических систем.

Апробация диссертации. Результаты диссертации неоднократно докладывались и обсуждались на научно-исследовательском семинаре „Бесконечномерный анализ и стохастика" под руководством В.И. Богачева, Н.А. Толмачева и С.В.Шапошникова (2004–2009 гг.), на международном семинаре „Бесконечномерный стохастический анализ" в университете города Билефельда (Германия, 2005–2008 гг.), на семинаре в университете города Лулео (Швеция, 2010 г.) и на международной конференции „Стохастический анализ и случайные динамические системы", посвященной 100-летию со дня рождения Н.Н. Боголюбова (Львов, Украина, 2009 г.).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 5 работах автора (две из них в соавторстве), из них 4 в журналах из перечня ВАК. Доказательства основных результатов опубликованы в работах [1]– [3] из перечня ВАК; сообщения сделаны в работах [4], [5]. Список работ приведен в конце диссертации.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, двух глав, включающих 6 параграфов, и списка литературы из 36 наименований. Общий объем диссертации составляет 60 страниц.

Краткое содержание диссертации

Глава 1.

В первой главе диссертации исследуются общие свойства усреднений следующего вида:

$$\int_0^\infty f(T_{ts}x)\,\varrho(s)\,ds$$

для эргодической динамической системы $\{T_t\}_{t\geq 0}$ на вероятностном пространстве (X,μ), где ϱ – вероятностная плотность на $[0,+\infty)$, а f – $\mathcal{A}$-измеримая функция. Равномерное усреднение из классических эргодических теорем соответствует случаю, когда ϱ – индикатор отрезка $[0,1]$.

Пусть функция f ограничена. В работах В.В. Козлова и Д.В. Трещева[3,4] было показано, что для всякой абсолютно непрерывной вероятностной меры ν на $[0,+\infty)$ с плотностью ϱ относительно меры Лебега функции

$$F_t(x) := \int_0^\infty f(T_{ts}(x))\,\nu(ds)$$

для μ-почти всех x при $t \to +\infty$ стремятся к пределу $\overline{f}(x)$, где $\overline{f}$ — условное математическое ожидание f относительно $\mathcal{T}$ — σ -алгебры T_t -инвариантных множеств. Согласно эргодической теореме Биркгофа–Хинчина[17] функция $\overline{f}$ также является пределом, к которому для μ-почти всех x при $t \to +\infty$ стремятся временны́е средние

$$\frac{1}{t}\int_0^t f(T_s(x))\,ds.$$

Если рассматриваемая динамическая система эргодична, то $\overline{f}$ есть постоянная, равная интегралу от f по мере μ, т.е.

$$\lim_{t\to+\infty}\int_0^{+\infty} f(T_{ts}(x))\,\nu(ds) = \int_X f(y)\,\mu(dy). \qquad (1)$$

В первом параграфе рассмотрены различные важные примеры усреднений F_t. Перейдем к точным формулировкам.

Пример 1. Пусть X — единичная окружность с нормированной мерой Лебега μ и T_t — поворот окружности на угол $-t$. Существует такая безатомическая сингулярная вероятностная борелевская мера ν на $[0,1]$, что для функции $f(z) = z$, где $z = \exp(i\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi)$, ни при каком $z \in X$ величины $F_t(z)$ не имеют предела при $t \to \infty$.

Приводимый ниже пример показывает, что отказаться от ограниченности f без дополнительных условий нельзя, даже если плотность ϱ имеет ограниченный носитель.

Пример 2. Пусть μ и T_t — те же, что и в предыдущем примере. Существуют такие μ-интегрируемая борелевская функция f на X и абсолютно непрерывная вероятностная мера ν с носителем в отрезке $[0,1]$, что для всех z имеем $\limsup_{n\to\infty} F_n(z) = +\infty$.

[17] Корнфельд И.П., Синай Я.Г., Фомин С.В. *Эргодическая теория. Наука, М., 1980.*

Следующее утверждение является критерием, дающим сходимость рассматриваемых эргодических средних в $L^p(\mu)$ на n-мерном торе с нормированной мерой Лебега и полугруппой поворотов. В частности, отсюда следует существование таких сингулярных безатомических вероятностных мер, для которых есть сходимость средних F_t в $L^p(\mu)$.

Теорема 1. *Пусть (X, λ) — произведение n окружностей с нормированной мерой Лебега, а $\{T_{s_1,\ldots,s_n}\}$ — n-параметрическая полугруппа сдвигов на X, т.е. $T_{s_1,\ldots,s_n}x := (T_{s_1}x_1, \ldots, T_{s_n}x_n)$, где T_{s_i} — поворот i-й окружности на угол $-s_i$. Пусть ν — произвольная вероятностная мера на $\mathbb{R}^n_+$, имеющая преобразование Фурье $\widehat{\nu}$. Равенство*

$$\lim_{\min(t_1,\ldots,t_n)\to+\infty} \left\| \int_{\mathbb{R}^n_+} f(T_{t_1s_1,\ldots,t_ns_n}(x))\,\nu(d\overline{s}) - \int_X f(x)\,\lambda(dx) \right\|_{L^p(\lambda)} = 0$$

выполнено для всякой функции $f \in L^p(\lambda)$ при $p \in [1, +\infty]$ в точности тогда, когда при $\|\overline{t}\| \to +\infty$ выполнено соотношение $\widehat{\nu}(\overline{t}) \to 0$.

При исследовании усреднений вида F_t, представляется естественным рассмотрение семейства мер $\nu_{t,x}$, заданных как образы меры ν при отображении

$$S_{t,x}\colon\ [0, +\infty) \to X, \quad S_{t,x}(s) := T_{ts}(x).$$

Целью второго параграфа является изучение характера сходимости мер $\nu_{t,x}$ к мере μ. В частности, оказывается, что имеет место слабая сходимость. Сформулируем основные результаты.

Теорема 2. *Пусть μ — радоновская вероятностная мера на вполне регулярном топологическом пространстве X, причем все компакты в X метризуемы. Предположим, что полупоток $\{T_t\}$ эргодичен. Пусть мера ν абсолютно непрерывна относительно меры Лебега на $[0, +\infty)$. Тогда для μ-почти всех x меры $\nu_{t,x}$ слабо сходятся к μ при $t \to \infty$.*

Теорема 3. *Предположим, что X — суслинское (или метрическое) пространство и μ — радоновская вероятностная мера, причем полупоток $\{T_t\}$ эргодичен. Пусть мера ν абсолютно непрерывна. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое компактное множество $X_\varepsilon \subset X$, что $\mu(X_\varepsilon) > 1 - \varepsilon$ и семейство мер $\nu_{t,x}$ с $t \geq \varepsilon$ и $x \in X_\varepsilon$ равномерно плотно.*

В третьем параграфе получены положительные результаты о сходимости средних F_t для неограниченных функций. Основная теорема дает сходимость для функций из пространства Орлича. Напомним, что непрерывная неотрицательная выпуклая функция M, определенная на $[0, +\infty)$, называется N-функцией, если справедливы равенства

$$\lim_{t \to 0} M(t)/t = 0 \text{ и } \lim_{t \to +\infty} M(t)/t = +\infty.$$

Через $L_M(\mu)$ обозначим класс Орлича всех таких μ-измеримых функций φ на X, что

$$M \circ |\varphi| \in L^1(\mu).$$

Говорят, что N-функция M удовлетворяет Δ_2-условию, если при некоторых $k > 0$ и $t_0 > 0$ имеем $M(2t) \leq kM(t)$ для всех $t \geq t_0$.

Теорема 4. *Пусть f — $\mathcal{A}$-измеримая μ-интегрируемая функция, M – N-функция с $f \in L_M(\mu)$, удовлетворяющая Δ_2-условию. Если плотность ϱ меры ν имеет носитель в отрезке $[a, b]$ и $\varrho \in L_{M^*}(\lambda)$, где λ — мера Лебега на $[a, b]$, то для μ-почти всех $x \in X$ имеем*

$$\lim_{t \to +\infty} \int_0^{+\infty} f(T_{ts}(x))\, \varrho(s)\, ds = \mathbb{E}^{\mathcal{T}} f(x),$$

где $\mathbb{E}^{\mathcal{T}}$ – условное математическое ожидание относительно σ-алгебры $\mathcal{T}$, введенной выше. В частности, если полупоток $\{T_t\}$ эргодичен, то выполнено равенство (1).

В частности, отсюда следует, что для всякой измеримой функции $f \in L^p(\mu)$, плотности ϱ меры ν с ограниченным носителем и $\varrho \in L^q(\mu)$ средние $F_t f(x)$ сходятся к $\mathbb{E}^{\mathcal{T}} f(x)$ для μ почти всех $x \in X$.

Глава 2.

В этой главе усреднения Козлова–Трещева исследуются в более общих ситуациях, когда выполнена индивидуальная эргодическая теорема. В первом параграфе рассматривается случай усреднений с операторной полугруппой, действующей на пространстве $L^1(\mu)$. Кроме того, здесь получены дополнительные условия, усиливающие теорему 1 о сходимости средних из предыдущей главы. Случай классических равномерных усреднений для полугруппы операторов был рассмотрен в работах[18,19]. Основной результат этого раздела распространяет максимальную оценку на случай усреднений с плотностью.

[18] Данфорд Н., Шварц Дж. *Линейные операторы.*. I. Общая теория. ИЛ, М., 1962.

[19] Dunford N., Schwartz J.T. *Convergence almost everywhere of operator averages.* J. Rational Mech. Anal. 1956. N 1. P. 129–178.

Теорема 5. *Пусть T_t — сильно измеримая полугруппа положительных операторов на $L^1(\mu)$, причем*

$$\|T\|_1 \leq 1 \text{ и } \|T\|_\infty \leq 1.$$

Кроме того, пусть $\varrho \in L^q(\lambda)$, где λ — мера Лебега на $\mathbb{R}_+$, $\varrho \geq 0$ и существует невозрастающая функция $\beta \in L^1(\mathbb{R}_+, \lambda)$ такая, что для некоторого $t_0 \geq 0$ имеем

$$\varrho(s) \leq \beta(s) \text{ при } s \in [t_0, +\infty).$$

Тогда для всякой $f \in L^p(\mu)$, где $p^{-1} + q^{-1} < 1$ и $p, q \in (1, +\infty]$, выполнено неравенство

$$\left\| \sup_t \int_0^{+\infty} T_{ts}(f(x))\varrho(s)\, ds \right\|_{L^p(\mu)} \leq$$
$$\leq C(p)(t_0^{q(q-1)^{-1}} \|\varrho\|_{L^q([0,t_0],\lambda)} + \|\beta\|_{L^1(\lambda)})\|f\|_{L^p(\mu)}.$$

В качестве применения полученного результата доказывается утверждение о поточечной сходимости усреднений Козлова–Трещева для полугруппы операторов.

Теорема 6. *Пусть T_t — сильно измеримая полугруппа положительных операторов на $L^1(\mu)$, причем $\|T\|_1 \leq 1$ и $\|T\|_\infty \leq 1$. Пусть $f \in L^p(\mu)$ и $\varrho \in L^q(\lambda)$ — вероятностная плотность, где λ — мера Лебега на $\mathbb{R}_+$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$ и $p, q \in [1, +\infty]$. Предположим, что выполнено одно из условий*:

(i) *плотность ϱ имеет ограниченный носитель в отрезке $[a, b]$*;

(ii) *$p > 1$ и существует невозрастающая функция β на $[0, +\infty)$, для которой $\beta \geq 0$, $\beta \in L^q[0, +\infty)$ и $\varrho(t) \leq \beta(t)$ на $[t_0, \infty)$ для некоторого t_0.*

Тогда для μ-почти всех $x \in X$ выполнено равенство

$$\lim_{t \to +\infty} \int_0^{+\infty} T_{ts} f(x)\, \varrho(s)\, ds = \mathbb{E}^{\mathcal{T}} f(x).$$

Второй параграф посвящен изучению неравномерных усреднений и связанного с ними семейства мер, порожденных диффузионными процессами. Основное отличие стохастического случая от детерминированного заключается в отсутствии полугруппового свойства по времени. Пусть $A = (a^{ij})$ – непрерывное отображение на $\mathbb{R}^d$ со значениями в пространстве линейных операторов в $\mathbb{R}^d$, $b = (b^i)$ –

борелевское векторное поле на $\mathbb{R}^d$, $w(t), t \geq 0$, – d-мерный винеровский процесс на $(W, \mathcal{B}(W), P)$, где $W := C([0, +\infty), \mathbb{R}^d)$, P – мера Винера.

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение

$$d\xi_t^x = A(\xi_t^x)dw_t + b(\xi_t^x)dt, \quad \xi_0^x = x, \tag{2}$$

формальный генератор диффузии которого имеет вид

$$Lf = \frac{1}{2}\mathrm{trace}(AA^* D^2 f) + (b, \nabla f).$$

Предположим, что выполнены следующие условия:

(i) $a^{ij} \in W^{p,1}_{loc}(\mathbb{R}^d)$, где $W^{p,1}_{loc}(\mathbb{R}^d)$ – класс Соболева функций из $L^p_{loc}(\mathbb{R}^d)$ с производными первого порядка, $AA^* \geq cI$, где $p = 2d$, $c > 0$, отображение b локально ограничено;

(ii) существует такая функция $V \in C^2(\mathbb{R}^d)$, что множества $\{V \leq c\}$ компактны и

$$LV(x) \to -\infty \quad \text{при } |x| \to \infty.$$

С помощью результатов работы[20] можно показать, что существует сильное решение ξ_t^x указанного уравнения. Известно также (см., например[21,22,23]), что полученный процесс обладает единственной инвариантной вероятностной мерой μ, которая имеет положительную непрерывную плотность класса $W^{p,1}_{loc}(\mathbb{R}^d)$ относительно меры Лебега, причем порожденная процессом ξ_t^x полугруппа T_t в $L^1(\mu)$ является сильно феллеровской, а мера μ эргодична относительно T_t. Обозначим через P_x образ меры Винера под действием отображения Ψ_x, заданного формулой $\Psi_x(w)(t) = \xi_t^x(w)$. Определим вероятностную меру P_μ на $(W, \mathcal{B}(W))$ равенством

$$P_\mu(B) := \int_X P_x(B)\mu(dx),$$

где $X = \mathbb{R}^d$.

[20] Веретенников А.Ю. *О сильных решениях и явных формулах для решений стохастических интегральных уравнений.* Матем. сб. 1980. Т. 111, N 3. С. 434–452.

[21] Веретенников А.Ю. *О сильных решениях и явных формулах для решений стохастических интегральных уравнений.*Матем. сб. 1980. Т. 111, N 3. С. 434–452.

[22] Богачев В.И., Рёкнер М. *Обобщение теоремы Хасьминского о существовании инвариантных мер для локально интегрируемых сносов.* Теория вероятн. и ее примен. 2000. Т. 45, N 3. С. 417–436; исправление: ibid., 2001. V. 46, N 3. С. 600.

[23] Богачев В.И., Рёкнер М., Штаннат В. *Единственность решений эллиптических уравнений и единственность инвариантных мер диффузий.* Матем. сб. 2002. Т. 193, N 7. С. 3—36.

Определим аналог усреднений Козлова–Трещева для действия процесса ξ_t^x. Пусть ν – произвольная абсолютно непрерывная вероятностная мера на $[0,+\infty)$ с плотностью ϱ относительно меры Лебега. Для всякой функции $f \in L^1(\mu)$ определим средние

$$F_t(x,w) := \int_0^\infty f(\xi_{ts}^x(w))\,\nu(ds)$$

при P-почти всех w. Получен следующий результат для усреднений $F_t(x,w)$, являющийся аналогом теоремы В.В. Козлова и Д.В. Трещева для детерминированного случая.

Теорема 7. *Пусть выполнены условия* (i), (ii). *Тогда для всякой ограниченной измеримой функции f на X при каждом $x \in X$ выполнено равенство*

$$\lim_{t\to+\infty}\int_0^{+\infty} f(\xi_{ts}^x(w))\varrho(s)\,ds = \int_X f(y)\,\mu(dy)$$

для P-почти всех $w \in W$. Сформулируем основной результат, утверждающий сходимость средних для функций из $L^p(\mu)$ для стохастического случая.

Теорема 8. *Пусть выполнены условия* (i) *и* (ii). *Пусть ξ_t^x – решение уравнения (2), μ – соответствующая T_t-инвариантная вероятностная мера, $f \in L^p(\mu)$, $\nu = \varrho\,ds$, где $\varrho \in L^q[0,+\infty)$ – вероятностная плотность. Предположим, что выполнено одно из условий*:

(1) *плотность ϱ имеет ограниченный носитель в отрезке $[a,b]$*;

(2) *$p > 1$ и существует неубывающая функция β на $[0,+\infty)$, для которой $\beta \geq 0$, $\beta \in L^q[0,+\infty)$ и $\varrho(t) \leq \beta(t)$ на $[t_0,\infty)$ для некоторого t_0.*

Тогда для каждого $x \in X$ для P-почти всех $w \in W$ выполнено равенство

$$\lim_{t\to+\infty}\int_0^{+\infty} f(\xi_{ts}^x(w))\,\varrho(s)\,ds = \int_X f\,d\mu.$$

Как и в случае детерминированной полугруппы, рассмотрим семейства мер $\nu_{t,x,w}$ на X, заданных как образы меры ν при отображениях

$$S_{t,x,w}\colon\ [0,+\infty) \to X, \quad S_{t,x,w}(s) := \xi_{ts}^x(w).$$

Получены утверждения о слабой сходимости и равномерной плотности семейства мер $\nu_{t,x,w}$, аналогичные детерминированному случаю, рассмотренному выше. Приведем точные формулировки.

Теорема 9. *Предположим, что выполнены условия* (i), (ii), ξ_t^x *– решение уравнения (2), μ – соответствующая T_t-инвариантная вероятностная мера. Пусть вероятностная мера ν абсолютно непрерывна. Тогда для каждого $x \in X$ при P-почти всех w меры $\nu_{t,x,w}$ слабо сходятся к μ при $t \to \infty$.*

В третьем разделе исследуется вопрос о сходимости средних $F_t f(x)$ в $L^p(\mu)$, а так же рассматриваются некоторые применения результатов, полученных в предидущих разделах. В частности, речь идет об аналоге эргодической теоремы Винера–Винтнера. В отличие от предыдущих результатов, в ряде утверждений этого раздела наложено условие слабого перемешивания полугруппы. Приведем точные формулировки.

Теорема 10. *Пусть $\{T_t\}_{t\geq 0}$ — слабо перемешивающая полугруппа преобразований пространства X, причем соответствующая ей операторная полугруппа U_t сильно непрерывна, а ν — произвольная вероятностная мера на $[0,+\infty)$, имеющая преобразование Фурье $\widehat{\nu}$. Если $\widehat{\nu}(t) \to 0$ при $t \to +\infty$, то для всякой функции $f \in L^p(\lambda)$ при $p \in [1,+\infty)$ выполнено равенство*

$$\lim_{t\to+\infty}\left\|\int_0^{+\infty} f(T_{ts}x)\,\nu(ds) - \int_X f(x)\,\mu(dx)\right\|_{L^p(\mu)} = 0.$$

В работах Винера и Винтнера[5,6] был получен результат, обобщающий эргодическую теорему Биркгофа–Хинчина, согласно которому для всякой эргодической полугруппы T_t и интегрируемой функции $f \in L^1(\mu)$ найдется множество $A \in X$ с $\mu(A) = 1$ такое, что при $x \in A$ и $\lambda \in [0, 2\pi)$ существует предел средних

$$\frac{1}{T}\int_0^T e^{i\lambda s} f(T_s x)\,ds$$

при $T \to +\infty$, причем если полугруппа T_t является слабо перемешивающей и $\lambda \neq 0$, то этот предел равен 0.

В работе рассмотрены неравномерные средние

$$F_{t,\lambda} = \int_0^{+\infty} e^{i\lambda ts} f(T_{ts}x)\,\nu(ds),$$

для которых оказывается справедливым следующее утверждение о поточечной сходимости средних $F_{t,\lambda}$.

Предложение 1. *Пусть T_t — слабо перемешивающая полугруппа. Тогда для всякой функции $f \in L^p(\mu)$ и всякой вероятностной плотности $\varrho \in L^q(\lambda)$ с ограниченным носителем на $[0, +\infty)$, где $p^{-1} + q^{-1} = 1$ и $p, q \in [1, +\infty]$, найдется такое множество $A \in X$, что $\mu(A) = 1$ и для всех $x \in A$ и $\lambda \in (0, 2\pi)$ выполнено равенство*

$$\lim_{t\to+\infty} \int_0^{+\infty} e^{i\lambda ts} f(T_{ts}x)\varrho(s)\, ds = 0.$$

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю профессору В.И. Богачеву за постановку задач и постоянное внимание к работе.

Работы автора по теме диссертации

[1] Богачев В.И., Королев А.В. Об эргодической теореме в форме Козлова–Трещева. Доклады РАН. 2007. Т. 412, N 3. С. 295–301.

В работе [1] диссертанту принадлежат теорема 1, теорема 2, предложение 1, примеры 1, 3; В.И. Богачеву принадлежат общая постановка задач, теорема 3, пример 2.

[2] Богачев В.И., Королев А.В., Пилипенко А.Ю. Неравномерные усреднения в эргодической теореме для стохастических потоков. Доклады РАН. 2010. Т. 432, N 4. С. 439–442.

В работе [2] диссертанту принадлежат теоремы 2, 3, 4, следствия 1, 2; В.И. Богачеву принадлежит общая постановка задач; А.Ю. Пилипенко принадлежит теорема 1.

[3] Королев А.В. Об эргодической теореме в форме Козлова–Трещева для полугруппы операторов. Украинский математический журнал. 2010. Т. 62, N 5. С. 702–707.

[4] Korolev A.V. Non uniform averages in ergodic theorems. Abstracts of the International Conference "Stochastic analysis and random dynamics", 14–20 June, 2009, Lviv, Ukraine, pp. 121–122.

[5] Королев А.В. О сходимости неравномерных эргодических средних. Мат. Заметки. 2010. Т. 87, N 6, С. 945–948.