Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова
Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 517

Филимонов Дмитрий Андреевич

ХАОС И ПОРЯДОК В МАЛОМЕРНЫХ СИСТЕМАХ

01.01.02 — Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва, 2010

Работа выполнена на кафедре дифференциальных уравнений Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук профессор Ильяшенко Юлий Сергеевич.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук профессор Закалюкин Владимир Михайлович, кандидат физико-математических наук доцент Хованская Ирина Аскольдовна.

Ведущая организация: Математический институт РАН им. В.А. Стеклова.

Защита диссертации состоится 18 июня 2010 г. в 16 часов 40 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.85 при Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ, механико-математический факультет, ауд. 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 18 мая 2010 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д 501.001.85 при МГУ,
доктор физико-математических наук,
профессор И. Н. Сергеев

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

Диссертация посвящена исследованию свойств некоторых динамических систем малой размерности. В ней рассматриваются как системы с хаотическим поведением, так и системы, имеющие, в некотором смысле, упорядоченные решения. Как известно, понятие хаоса не строгое и существует много различных определений хаотического поведения. В данной работе упоминаются прежде всего такие формы хаоса, как минимальность, эргодичность и неустойчивость. Порядок обычно рассматривается как наличие определенной структуры, однако в физике под упорядоченным движением часто также понимаются периодические процессы. В данной работе рассмотрено три динамические системы малой размерности с хаотическими и упорядоченными свойствами.

Первая из рассматриваемых динамических систем относится к теории действий групп диффеоморфизмов на окружности. Для начала напомним несколько определений.

Определение 1. Действие группы G на пространстве X называется *минимальным*, если любое замкнутое инвариантное множество либо пусто, либо совпадает со всем пространством X.

Легко проверить, что в случае минимального действия каждая орбита всюду плотна в X.

Определение 2. Мера μ на пространстве X называется квазиинвариантной для действия группы G, если её образ под действием любого отображения из группы абсолютно непрерывен относительно исходной меры μ.

Заметим, что на окружности мера Лебега является квазиинвариантной для любой группы C^1-гладкой группы отображений.

Определение 3. Действие группы G на пространстве X называется эргодичным относительно квазиинвариантной меры μ, если любое измеримое инвариантное множество имеет меру ноль или его дополнение имеет меру ноль.

Для диффеоморфизмов окружности, как было уже сказано, естественно рассматривать эргодичность относительно меры Лебега.

Одним из известных вопросов теории динамических систем является следующая

Гипотеза. *Рассмотрим конечно-порождённую группу $G \subset \mathrm{Diff}^2(S^1)$. Если её действие минимально, то оно эргодично относительно меры Лебега.*

Эта гипотеза была сформулирована в конце 60-х–начале 70-х годов XX века многими авторами, включая Ж. Эктора и Э. Жиса. Однако, даже для случая одного диффеоморфизма окружности ($G \simeq \mathbb{Z}$) эта гипотеза не является очевидным следствием классификационной теоремы Пуанкаре. Дело в том, что сопряжение между минимальным диффеоморфизмом и соответствующим иррациональным поворотом может не быть абсолютно непрерывным — поэтому эргодичность поворота не влечёт за собой эргодичность в смысле меры Лебега исходного отображения.

Тем не менее, с помощью значительно более тонких рассуждений, в случае одного диффеоморфизма гипотеза была доказана — одновременно и независимо — А. Б. Катком[1] и М. Эрманом[2].

Для случая более богатой (не обязательно сохраняющей какую-нибудь меру) динамики, основной идеей, лежащей в основе доказательств эргодичности, является идея экспоненциального растяжения (и, более общо, растяжения с контролем искажения):

Теорема (опубликовано А. Навасом[3], идея доказательства восходит к Д. Салливану)**.** *Пусть группа $G \subset \mathrm{Diff}^{1+\varepsilon}(S^1)$ действует на окружности минимально, и выполнено условие*

$$\forall x \in S^1 \quad \exists g \in G: \quad g'(x) > 1.$$

Тогда действие G эргодично относительно меры Лебега.

Отметим, что препятствием к применимости этой техники является наличие *нерастяжимых точек.*

Определение 4. Точка $x \in S^1$ называется *нерастяжимой* (для действия группы G), если

$$\forall g \in G \quad |g'(x)| \leq 1.$$

Множество нерастяжимых точек мы будем обозначать через $\mathrm{NE} = \mathrm{NE}(G)$.

[1] А. Б. Каток, Б. Хасселблат. Введение в теорию динамических систем с обзором последних достижений. Пер. с англ. под ред. А. С. Городецкого. М.: МЦНМО, 2005.

[2] M. Herman. Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations. *Publ. Math. de l'IHES* **49** (1979), 5-234.

[3] A. Navas. Sur les groupes de difféomorphismes du cercle engendrés par des éléments proches des rotations. *L'Enseignement Mathématique* **50** (2004), 29-68.

Замечание 1. *Определение нерастяжимой точки зависит от выбора системы координат. Однако, как следует из работы Деруана,Клепцына и Наваса*[4]*, хотя заменой координат можно сделать конкретную точку растяжимой, но на орбите, тем не менее, всегда останется хотя бы одна нерастяжимая точка. С другой стороны, логично предполагать, что вместе с группой диффеоморфизмов нам заданы так же координаты на окружности. Поэтому далее мы всегда будем предполагать, что система координат выбрана и зафиксирована.*

Наличие нерастяжимых точек не противоречит минимальности действия (даже аналитической!) группы диффеоморфизмов: примерами служат стандартное действие $PSL_2(\mathbb{Z})$ и (для гладкого случая) гладкая реализация Жиса-Сержиеску[5] группы Томпсона.

Отметим, что все известные на текущий момент примеры минимальных действий с нерастяжимыми точками отличаются от этих двух незначительными модификациями.

В частности, все они обладают следующим свойством: *нерастяжимые точки являются односторонне изолированными неподвижными* для некоторых элементов группы. Более точно, для них выполняется следующее

Определение 5. Нерастяжимая точка $x \in \mathrm{NE}(G)$ обладает свойством *односторонней изолированной неподвижности*, если найдутся $g_+, g_- \in G$, такие, что $g_+(x) = g_-(x) = x$, и x — изолированная справа (соответственно, слева) точка $Fix(g_+)$ (соответственно, $Fix(g_-)$).

Определение 6. Конечно-порождённая группа $G \subset \mathrm{Diff}^2(S^1)$ называется *N-группой*, если её действие минимально, множество $\mathrm{NE}(G)$ непусто, и всякая нерастяжимая точка $x \in \mathrm{NE}(G)$ обладает свойством односторонней изолированной неподвижности.

Оказывается, для таких групп всё ещё возможно построить процедуру растяжения с контролем искажения.

Теорема (Деруан, Клепцын, Навас[4])**.** *Действие N-группы эргодично относительно меры Лебега.*

[4] B. Deroin, V. Kleptsyn, A. Navas, On the question of ergodicity for minimal group actions on the circle, *Moscow Math. Journal*, 2009, **9**, 2, 263-303

[5] É. Ghys & V. Sergiescu. Sur un groupe remarquable de difféomorphismes du cercle. *Comment. Math. Helvetici* **62** (1987), 185-239

Отметим также, что одним из следствий является конечность множества NE.

Более того, оба вышеупомянутых примера (гладкая реализация группы Томпсона и $PSL_2(\mathbb{Z})$) обладают рядом других интересных свойств: они порождаются (в определённом смысле) нестрого-растягивающей «марковской» динамикой, и для них показатель Ляпунова растяжения равен нулю. Естественный возникающий в связи с этим вопрос — а любая ли N-группа обладает такими свойствами? И можно ли найти аналогичную структуру в произвольной N-группе?

Первая глава настоящей работы посвящена ответам на эти вопросы — исследованию N-групп.

Следующей системой, которая рассмотрена в данной работе, является простейшая одномерная система с запаздывающими переключениями. Часто в физических задачах возникает необходимость рассмотрения системы обыкновенных дифференциальных уравнений с кусочно-непрерывной правой частью. Эту задачу можно переформулировать, рассматривая конечное число динамических систем, называемых *базовыми системами*, сменяющих друг друга при достижении траекторией некоторого критического множества. Для описания систем с таким поведением Вожелем[6] были предложены «бушующие системы» (systèmes déferlants). Система Вожеля (называемая в русскоязычной литературе системой с переключениями) задается двумя автономными системами в $\mathbb{R}^n$, которые сменяют одна другую, когда точка $x(t)$ в фазовом пространстве достигает заданного в нем "критического множества" K. Эти системы были описаны и исследованы самим Вожелем, а общий случай А.Д. Мышкисом и А.Я. Хохряковым[7].

В своей работе[8] А.Д. Мышкис ввел общие системы с запаздывающим переключением. Здесь смена систем происходит в каждый момент времени t, для которого на критическое множество K попадает точка $x(t-\tau)$, где $\tau = \mathrm{const} > 0$ — фиксированный для всей системы параметр запаздывания, а в качестве начального условия задается значение решения на временном интервале длины h и номер начальной системы. Такая конструкция позволяет описывать физические системы, которые обладают саморегулировкой: имеется некоторое устройство, изменяющее

[6] Vogel T., Sur les systémes dèferlants. *Bull. Soc. Math. France.* 1953. **81**. No. 1. P. 63–75.

[7] Мышкис А. Д., Хохряков А. Я., Бушующие динамические системы. I. Особые точки на плоскости. Матем. сб. 1958. **45**. Вып. 3. С. 401–414.

[8] Мышкис А. Д., Системы с запаздывающим переключением. *Автом. и телемех.* 2000. Вып. 12. С. 48–52.

саму систему в зависимости от текущего ее состояния (например реле с температурным датчиком), причем время срабатывания такого устройства универсально и не равно нулю.

В качестве простейшего примера системы с запаздывающим переключением в работе Мышкиса[9] была рассмотрена одномерная система на прямой с двумя сменяющими друг друга базовыми системами следующего вида:

$$\begin{aligned}&(1)\,\dot{x}(t)=1\\&(2)\,\dot{x}(t)=-1\end{aligned}\tag{1}$$

Критическое множество состоит из двух точек $K=\{0,1\}$. Для корректной постановки задачи также задается непрерывная начальная функция $x=\varphi(t)$ при $-1\le t\le 0$, причем $\varphi(0)=0, \varphi(t)\neq 0\,(-1\le t<0)$; начинать движение будем по первой базовой системе ($k=1$). Это фактически соответствует движению по первой базовой системе из нуля при условии, что только что было совершено попадание в критическое множество и других попаданий в прошлом не было.

В упомянутой работе рассмотрено поведение системы (1) при $\tau\in[0,\frac{4}{3}]\cup[\frac{3}{2},\infty)$, а именно доказана следующая

Теорема. *Решение поставленной выше задачи (1) с критическим множеством $K=\{0,1\}$ и параметром запаздывания τ обладает следующими свойствами:*

- *при $0<\tau\leqslant 1$ решение системы периодично и имеет 2 переключения на наименьшем периоде;*
- *при $1<\tau<\frac{4}{3}$ решение системы периодично и имеет 4 переключения на наименьшем периоде;*
- *при $2<\tau$ решение системы после 2 переключений уходит на ∞;*
- *при $\tau=\frac{3}{2}$ решение системы периодично начиная с момента времени $t=\frac{1}{2}$ и имеет 2 переключения на наименьшем периоде;*
- *при $\tau=\tau_k$ решение системы периодично и имеет $4k+2$ переключений на наименьшем периоде;*
- *при $\tau_{k+1}<\tau<\tau_k$ решение системы периодично и имеет $2k+2$ переключений на наименьшем периоде;*

[9] Myshkis A.D., The simplest system with retarding switching and 2–point critical set. *Functional Differential Equations.* 2003. **10**. No. 3-4. pp. 535–539.

где $\tau_k = \frac{6\cdot 4^{k-1}}{4^k-1}$ *— убывающая последовательность,* $\tau_1 = 2$ *и* $\tau_k \to \frac{3}{2}$ *при* $k \to \infty$.

Это не совсем типичное поведение решений для конечно-параметрического семейства непрерывных динамических систем на прямой, однако запаздывающее переключение в данном случае «размывает» фазовое пространство и позволяет обойти строгий порядок точек, который обуславливает простую классическую непрерывную динамику на прямой. Заметим здесь также, что под «хаотичностью» и «упорядоченностью» часто понимаются свойства одной и той же системы, зависящей от параметра, причем при одних значениях система может обнаруживать хаотические свойства, а при других — упорядоченные, что и происходит в рассматриваемой системе.

Во второй главе диссертации исследован оставшийся промежуток $\tau \in (\frac{4}{3}, \frac{3}{2})$, причем выявлен новый тип поведения решения. Тем самым завершено исследование этой системы.

Третья динамическая система относится к теории квадратичных векторных полей на плоскости. Вторая часть 16-ой проблемы Гильберта посвящена вопросу расположения и количества предельных циклов для полиномиальных векторных полей на плоскости. До сих пор нет никакой оценки их количества даже для квадратичных векторных полей. Долгое время считалось, что это число не превосходит трех. В 1979 году Ван Мин-Шу и Чен Лан-Сун в своей работе[10] показали существование квадратичного векторного поля на плоскости, у которого имеется не менее четырех предельных циклов. В 1980 году Ши Сонглин[11] опубликовал конкретный пример векторного поля с не менее, чем четырьмя предельными циклами, задаваемого следующей системой

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda x - y - 10x^2 + (5+\delta)xy + y^2, \\ \dot{y} = x + x^2 + (-25 + 8\varepsilon - 9\delta)xy. \end{cases} \tag{2}$$

Требуемое возмущение было указано автором явно:

$$\delta = -10^{-13}, \varepsilon = -10^{-52}, \lambda = -10^{-200}. \tag{3}$$

Ши Сонглин показал, что при указанном возмущении в уравнении (2) имеется не менее 4 предельных циклов: один вокруг точки $(0, 1)$ (этот цикл

[10] Chen Lan-Sun, Wang Ming-Shu, The relative position, and the number of limit cycles of a quadratic differential system.— *Acta Math. Sinica*, 1979, **22**, 751-758

[11] Shi Songling, A concrete example of the existence of four limit cycles for plane quadratic systems .— *Scientia Sinica*, 1980, **23**, №2, p.153-158.

имеется и в невозмущенной системе), и три вокруг $(0,0)$.

Естественно возникает в связи с этим вопрос: «А сколько на самом деле предельных циклов в уравнении (2)»? Ответу на этот вопрос, а так же точной локализации предельных циклов уравнения Ши Сонглина посвящена третья глава данной диссертации.

Цель работы.

Целью работы является изучение различных вопросов хаотического и упорядоченного поведения динамических систем малой размерности.

Методы исследования.

В работе используются как классические методы растягивающей динамики и техника контроля искажения (Дж. Салливан), теория идеалов Баутина и теория нормальных форм в приложении к квадратичным векторным полям, так и их видоизмененные аналоги, приспособленные для решения поставленных задач.

Научная новизна работы.

Результаты работы являются новыми. В диссертации получены следующие результаты:

1. Обнаружена внутренняя структура минимальных действий N-групп диффеоморфизмов окружности. Эта структура напоминает марковскую растягивающую динамику и порождает все действие группы с точностью до конечного числа отображений.

2. Для C^2-гладких N-групп показана сингулярность стационарных мер.

3. Для C^2-гладких групп при дополнительных ограничениях показано, что показатель Ляпунова растяжения этой группы равен нулю.

4. Завершено описание простейшего примера одномерной системы с запаздывающим переключением и двухточечным критическим множеством.

5. Показано, что уравнение Ши Сонглина имеет ровно четыре предельных цикла, не пересекающих малый отрезок по оси ординат. Предельные циклы вокруг начала координат локализованы в узких кольцевых областях.

Теоретическая и практическая ценность.

Работа носит теоретический характер. Полученные результаты относятся к различным разделам теории динамических систем малой размерности. Примененные в диссертации методы позволяют эффективно их использовать для продвижения в соответствующих разделах теории динамических систем малой размерности.

Апробация работы.

Результаты диссертации докладывались на следующих семинарах и конференциях:

1. на семинаре «Динамические системы» под руководством д. ф.-м. н., профессора Ю. С. Ильяшенко (механико-математический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова) неоднократно в 2004 — 2010 гг;

2. на семинаре кафедры «Прикладная математика-1» под руководством д. ф.-м. н., профессора А.Д. Мышкиса (МИИТ), 2008 г.;

3. на конференции «Топологические и вариационные методы нелинейного анализа и их приложения», Воронеж, 2005;

4. на конференции «Singularities of planar vector fields, bifurcations and applications» (Люмини, Франция), май 2009 г.;

5. на Украинском математическом конгрессе, посвященном 100-летию со дня рождения Боголюбова, (Киев, Украина), август 2009 г.

Публикации.

Результаты диссертации опубликованы в работах, список которых приведён в конце автореферата [1–4].

Структура и объем работы.

Работа состоит из введения, трех глав, и списка литературы, содержащего 24 наименования. Общий объем диссертации 83 страницы.

Содержание диссертации.

В первой главе рассматриваются действия N-групп диффеоморфизмов на окружности. В ней доказываются следующие утверждения:

Теорема A (Марковская нестрого растягивающая динамика). *Пусть G — конечно-порождённая N-группа C^2–диффеоморфизмов окружности. Тогда для G существуют: разбиение окружности на интервалы $\{I_1, \dots, I_k, I_1^+, I_1^-, \dots, I_l^+, I_l^-\} = \mathcal{I}$ и соответствующие этим интервалам отображения $g_1, \dots, g_k, g_1^+, g_1^-, \dots, g_l^+, g_l^- \in G$, такие, что:*

i) все образы $g_i^\pm(I_i^\pm)$, $g_j(I_j)$ представляются как объединения интервалов из $\mathcal{I}$.

ii) $\exists \lambda > 1: \quad \forall j\ \forall x \in I_j \quad g_j'(x) \geqslant \lambda$.

iii) Интервалы I_i^+ и I_i^- примыкают соответственно справа и слева к нерастяжимой точке $x_i^* \in$ NE. При этом это неподвижная топологически отталкивающая точка ограничения на интервал I_i^+ (соотв. I_i^-) отображения g_i^+ (соотв. g_i^-), не имеющего на этом интервале других неподвижных точек.

Кроме того,

$$\forall i\, \forall x \in I_i^\pm \quad \left(g_j \circ (g_i^\pm)^{k_i^\pm(x)}\right)'(x) \geqslant \lambda,$$

где $k_i^\pm(x) := \min\{k \in \mathbb{N} \mid (g_i^\pm)^k(x) \notin I_i^\pm\}$, а j определяется условием $(g_i^\pm)^{k_i^\pm}(x) \in I_j$.

Замечание 2. *Для удобства, мы будем иногда обозначать через g_I соответствующее интервалу $I \in \mathcal{I}$ разбиения отображение.*

Пусть G — N-группа. Выберем и зафиксируем даваемое заключением теоремы A разбиение окружности на интервалы с соответствующими им отображениями, $\{(I, g_I) \mid I \in \mathcal{I}\}$. Это разбиение задаёт процедуру растяжения, которую можно применять к точкам и к достаточно малыми интервалам:

Определение 7. *Последовательность растяжения* интервала $J \in S^1$ — это конечная последовательность интервалов J_n, построенная по правилу

- $J^{(0)} = J$,
- $J^{(n)} = g_{I_{(n)}}(J^{(n-1)})$, если $J^{(n-1)} \subset I_{(n)} \in \mathcal{I}$; если же такого интервала $I_{(n)}$ не найдётся, то последовательность останавливается на $J^{(n-1)}$.

При этом композиции $G_{n,J} := g_{I_{(n)}} \circ \dots \circ g_{I_{(1)}}$ называются *растягивающими композициями для интервала J*. Обозначим также через G_J

максимальную растягивающую композицию, то есть композицию всех последовательных отображений $g_{I_{(k)}}$ с условием остановки, описанным выше.

Наконец, такая же (только бесконечная) процедура растяжения может быть определена и для точек. Для точек, принадлежащих орбите нерастяжимой, при этом необходимо уточнить, растягивается ли правая или левая окрестность точки; в этих случаях мы будем соответственно писать $G^{+}_{n,x}$ и $G^{-}_{n,x}$.

Использовав эту процедуру увеличения как своеобразный «микроскоп», мы увидим, что все отображения из группы G, рассматриваемые под достаточным увеличением, построены из конечного числа элементарных «кирпичиков»:

Теорема B (о структуре)**.** *Пусть группа G — как в теореме A, и интервалы и отображения (I_j, g_j), даваемые заключением этой теоремы, выбраны и зафиксированы. Тогда найдётся конечное число интервалов $L_1, \dots, L_N, L'_1, \dots, L'_N$ и отображений $h_i : L_i \to L'_i$, таких, что любое отображение $g \in G$ может быть представлено следующим образом:*

- *Имеется два разбиения окружности в объединение интервалов, зависящими от выбора g*

$$S^1 = J_1 \cup \dots \cup J_m = g(J_1) \cup \dots \cup g(J_m);$$

- *Для каждого $p = 1, \dots, m$ в последовательности растяжения интервала J_p встречается некоторый интервал L_{i_p}, а в последовательности растяжения $g(J_p)$ — соответствующий ему интервал L'_{i_p}. Иными словами, для некоторых n, n' выполнено*

$$G_{n,J_p}(J_p) = L_{i_p},$$

$$G_{n',g(J_p)}(g(J_p)) = L'_{i_p}.$$

- *Отображение g под таким увеличением оказывается соответствующим отображением h_{j_p}:*

$$g|_{J_p} = G^{-1}_{n',g(J_p)} \circ h_{i_p} \circ G_{n,J_p}.$$

Более того, разбиение $S^1 = \bigcup J^{(i)}$ можно выбрать одним и тем же для любого конечного набора из G.

Таким образом, можно сказать, что действие группы G по построению в определенном смысле напоминает действие гладкой реализации Жиса-Сержиеску группы Томпсона.

Рассмотрим отображение R, заданное как $R(x) = g_I(x)$, $x \in I$, и заданное им отношение эквивалентности $\mathcal{R}$. Классы эквивалентности такого отношения в силу определения являются подмножествами соответствующих G-орбит. Более того, для всех точек, кроме не более, чем счётного множества, их классы можно рассматривать (соединяя точку с её R-образом) как деревья с выделенным направлением на бесконечности (соответствующим итерированию R). Интересно отметить, что имеет место

Следствие 1. *Всякая G-орбита разбивается на не больше, чем N классов $\mathcal{R}$-эквивалентности.*

Итерации R — это, в определённом смысле, «жадный» алгоритм растяжения окрестности заданной точки. Оказывается, что поскольку $\mathrm{NE} \neq 0$, то из наличия параболических (т.е. с производной равной единице) точек следует

Теорема C. *Для почти любой по мере Лебега точки $x \in S^1$ показатель Ляпунова отображения R в ней равен нулю:*

$$\lambda(x, R) = 0.$$

Напомним также следующее следующее определение.

Определение 8. Пусть $G \subset \mathrm{Diff}^2(S^1)$ — конечно-порождённая группа, $\mathcal{F} = \mathcal{F}^{-1}$ — конечная симметричная система её образующих. Тогда величина

$$\lambda_{exp}(x; \mathcal{F}) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \max_{f_1,\dots,f_n \in \mathcal{F}} \ln |(f_1 \circ \dots \circ f_n)'(x)|$$

называется *показателем Ляпунова растяжения в точке x.*

Для минимального действия конечно-порождённой группы $G \subset \mathrm{Diff}^2(S^1)$ С. Хёрдером[12] было показано, что функция $\lambda_{exp}(\cdot, \mathcal{F})$ почти всюду по мере Лебега совпадает с некоторой константой $\lambda_{exp}(G, \mathcal{F})$, называемой *показателем Ляпунова растяжения группы G*. Хотя величина этого показателя зависит от выбора системы образующих, его равенство нулю или положительность от этого выбора не зависит. В частности, в

[12] S. Hurder. Exceptional minimal sets and the Godbillon-Vey class, to appear in: *Annales de l'Institut Fourier (Grenoble)*

предположении положительности показателя растяжения теорема Хёрдера утверждает эргодичность действия относительно меры Лебега.

Однако оказывается, что экспоненциальное растяжение для (кусочно-аналитической) N-группы невозможно не только для «жадного» алгоритма:

Теорема D. *Показатель Ляпунова растяжения N-группы G кусочно-аналитических диффеоморфизмов равен нулю:*

$$\lambda_{\exp}(G) = 0.$$

Замечание 3. *На самом деле, в доказательстве нам потребуется гораздо более слабое условие: на интервалах $I_j^{\pm}$ производная соответствующего $g_j^{\pm}$ должна быть больше 1 в некоторой окрестности x_j^*.*

Напротив, для групп с нулевым показателем растяжения стационарные меры для конечно-порождённой случайной динамики сингулярны[13]. Тем самым, имеет место

Следствие 2. *Пусть G — N-группа, удовлетворяющая условию из замечания 3, а m — вероятностная мера на ней, носитель которой состоит из конечного числа элементов и порождает G как полугруппу. Тогда (единственная) m-стационарная мера сингулярна относительна меры Лебега.*

Теорема A доказывается в разделе 1.1 главы 1. Затем, в разделе 1.2 напоминаются необходимые для дальнейших рассуждений сведения, и доказывается несколько вспомогательных утверждений.

Раздел 1.3 посвящён доказательству теоремы B. В параграфе 1.3.1 теорема B выводится из нескольких технических лемм, а доказательство этих лемм отнесено в параграф 1.3.2. Наконец, в разделе 1.4 доказываются оставшиеся утверждения, оказывающиеся следствиями из теорем A и B: следствие 1 и теоремы C и D.

Вторая глава диссертации посвящена исследованию простейшей системы с запаздывающим переключением с двухточечным критическим множеством. В разделе 2.1 обсуждаются общие свойства систем с запаздывающим переключением, а в разделе 2.2 доказывается следующая

[13]см. Corollary 1.22 в B. Deroin, V. Kleptsyn, A. Navas, On the question of ergodicity for minimal group actions on the circle, *Moscow Math. Journal*, 2009, **9**, 2, 263-303

Теорема Е. *Для системы с запаздывающим переключением*

$$(1)\,\dot{x}(t) = 1$$
$$(2)\,\dot{x}(t) = -1,$$

критическим множеством $K = \{0,1\}$, *непрерывным начальным условием* $x = \varphi(t)$ *при* $-1 \le t \le 0$, *где* $\varphi(0) = 0, \varphi(t) \ne 0\,(-1 \le t < 0)$ *и параметром запаздывания* $\tau \in [\frac{4}{3}, \frac{3}{2}]$ *имеется три перемежающиеся серии точек*

$$\tau_k := \frac{3 \cdot 4^k}{2 \cdot 4^k + 1} \;\; (k \in \mathbb{N}),$$
$$\theta_k := \frac{3 \cdot (4^{k+1} - 1)}{2 \cdot 4^{k+1} + 1} \;\; (k \in \mathbb{N}),$$
$$\zeta_k := \frac{3 \cdot (2 \cdot 4^k - 1)}{4^{k+1} - 1} \;\; (k \in \mathbb{N}).$$

Это возрастающие последовательности, причем $\tau_1 = \frac{4}{3}, \tau_k \to 3/2$ *при* $k \to \infty$; $\theta_1 = \frac{15}{11}, \theta_k \to 3/2$ *при* $k \to \infty$ *и* $\zeta_1 = \frac{7}{5}, \zeta_k \to 3/2$ *при* $k \to \infty$. *Кроме того,* $\tau_k < \theta_k < \zeta_k < \tau_{k+1}\,(\forall k \in \mathbb{N})$. *Эти три последовательности полностью описывают интервалы непрерывной зависимости решения от параметра запаздывания* τ, *а именно для любого* $k \in \mathbb{N}$:

- *при* $\tau = \tau_k$ *решение системы периодично и имеет* $4k+2$ *переключений на наименьшем периоде;*
- *при* $\tau_k < \tau < \theta_k$ *решение системы периодично и имеет* $2k+4$ *переключений на наименьшем периоде;*
- *при* $\tau = \theta_k$ *решение системы после* $2k+5$ *переключений уходит на* $-\infty$;
- *при* $\theta_k < \tau < \zeta_k$ *решение системы периодично и имеет* $2k+6$ *переключений на наименьшем периоде;*
- *при* $\tau = \zeta_k$ *решение системы после* $4k+5$ *переключений уходит на* $-\infty$;
- *при* $\zeta_k < \tau < \tau_{k+1}$ *решение системы периодично и имеет* $2k+4$ *переключений на наименьшем периоде.*

В третьей главе исследуется уравнение Ши Сонглина. Для начала, в параграфе 3.1, дается обзор и описание фазового портрета. Далее в главе доказывается основная

Теорема F. *У системы*

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda x - y - 10x^2 + (5+\delta)xy + y^2, \\ \dot{y} = x + x^2 + (-25 + 8\varepsilon - 9\delta)xy. \end{cases}$$

при значениях параметров

$$\delta = -10^{-13}, \varepsilon = -10^{-52}, \lambda = -10^{-200}.$$

имеется ровно 4 предельных цикла, не пересекающих отрезок $[0.004, 0.04]$ *оси* Oy.

Более того, предельные циклы в окрестности точки $(0,0)$ оказываются локализованы в трех достаточно узких кольцах, в каждом из которых соответствующий предельный цикл единственнен.

Для оставшегося отрезка $[0.004, 0.04]$ был проведен численный эксперимент, показывающий отсутствие предельных циклов, пересекающих указанный отрезок.

Идея доказательства теоремы F заключается в построении полиномиальной функции $T(x,y)$ со следующими свойствами:

1. Замена $(r,\varphi) \mapsto (U(r,\varphi),\varphi)$, где $U(r,\varphi) = T(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ определена корректно в проколотой окрестности начала координат радиуса 0.004. Функция $U(r,\varphi)$ будет алгебраическим многочленом по r и тригонометрическим многочленом по φ. Допуская вольность речи, будем по-прежнему называть его многочленом.

2. Линии уровня функции $U(r,\varphi) = const$ являются линиями без контакта в той же окрестности, за исключением трех узких колец.

3. У отображения Пуанкаре в новых координатах $(U(r,\varphi),\varphi)$ производная отделена от единицы в упомянутых выше кольцевых областях.

Эта функция является частной суммой формального ряда h, удовлетворяющего следующему уравнению, называемому иногда фактор-системой:

$$L_v h = g \circ h. \tag{4}$$

Здесь $h = x^2 + y^2 + \ldots$ и $g = 2\beta_0 u + 2\beta_1 u^2 + \ldots$ — искомые формальные ряды, L_v — дифференцирование вдоль векторного поля v с линейной частью $(-y, x)$. Для таких полей фактор-система всегда имеет формальное решение, но оно, как правило, расходится. Фактор-система тесно связана с понятием формальной нормальной формы: коэффициенты β_j являются коэффициентами формальной нормальной формы поля v, причем для полей с линейной частью $(-y, x)$ коэффициент β_0 равен нулю. Подробно вопрос их связи освещен в книге Ильяшенко и Яковенко[14]. Там же обсуждаются вопросы связанные с рекурсивным решением фактор-системы.

Если бы ряды решения фактор-системы сходились, то линии уровня $h = a_j$, соответствующие нулям функции g были бы предельными циклами, а остальные замкнутые линии уровня функции h — кривыми без контакта. Рассмотрим приближенное решение фактор-системы: $T(x, y)$ является многочленом 18-й степени от x и y с 2-струей в нуле равной $x^2 + y^2$, а G - многочленом 8-й степени от одного переменного u с 1-струей в нуле, равной u:

$$L_v T = G(T) + o(x^{18} + y^{18}).$$

Пусть a_j — нули многочлена G, близкие к нулю. Естественно ожидать (это обосновано в параграфе 3.2), что при b не слишком близких к a_j, линии уровня $T(x, y) = b$ — это кривые без контакта с полем v, а узкие кольца в окрестности линий $T(x, y) = a_j$ содержат предельные циклы поля v.

Выражение для T получается путем последовательного вычисления на компьютере *в рациональных числах* первых членов ряда h (алгоритм их вычисления описан в параграфе 3.3). Здесь особенно важно подчеркнуть, что это вычисление не является приближенным, а соответствует точному решению задачи в символьном виде. К сожалению, выражение для $U(r, \varphi)$ слишком громоздко, однако для обоснования свойств 1.-3. достаточно использовать мажорирующие $U(r, \varphi)$ многочлены, точные формулы для которых приведены в соответствующих разделах работы.

Свойства 1. и 2. доказываются несложными оценками в леммах, приведенных в параграфах 3.2.1 и 3.2.2 и получаются благодаря тому, что выбранная функция U оказывается «золотой серединой». С одной стороны, она достаточно близка к r^2 (и ее линии уровня близки к концентрическим окружностям вокруг начала координат), чтобы выполнялось свойство 1. А с другой стороны, функция U является приближенным решением фактор-системы, то есть удовлетворяет ей с точностью до малой погрешности, благодаря чему выполняется свойство 2. Наконец, свойство 3. также вытекает из того, что функция U является приближенным решением фактор-системы и проверяется с помощью

[14] Ilyashenko, Yu., Yakovenko, S., Lectures on Analytic Theory of Ordinary Differential Equations, Graduate Studies in Mathematics, 86, Amer. Math. Soc., 2008.

исследования соответствующего уравнения в вариациях. Соответствующая лемма приведена в параграфе 3.2.2.

Из свойств 1.-3. будет следовать существование ровно трех неподвижных точек для отображения Пуанкаре системы в новых координатах, откуда следуют аналогичные утверждения для отображения Пуанкаре в полярных координатах (r, φ) и, следовательно, утверждение теоремы F.

Я искренне благодарю моего учителя, профессора Юлия Сергеевича Ильяшенко, за постановку задачи и плодотворные обсуждения, а также Виктора Алексеевича Клепцына за полезные дискуссии.

Работы автора по теме диссертации.

1. Д. Филимонов, Нормальные формы квадратичных векторных полей и уравнение Ши Сонглина, Дифференциальные уравнения, , 2010, т.46, №5, 647-657

2. D. Filimonov On the simplest system with retarding switching and 2-point critical set.- Functional Differential Equations, 2004, vol. 11, №3-4, pp. 333-339

3. Д.А. Филимонов, О действиях на окружности со свойством неподвижности нерастяжимых точек, депонировано в ВИНИТИ, 16.03.2010, №164-2010, 1-47

4. Д.А. Филимонов, 3-х точечное критическое множество для системы с запаздывающим переключением, Материалы конференции «Топологические и вариационные методы нелинейного анализа и их приложения», Воронеж, 2005, 106-107