

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Механико-математический факультет

На правах рукописи

УДК 517

Щуров Илья Валерьевич

**РЕШЕНИЯ-УТКИ В БЫСТРО-МЕДЛЕННЫХ СИСТЕМАХ
НА ТОРЕ**

01.01.02 — Дифференциальные уравнения, динамические системы и
оптимальное управление

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва, 2010

Работа выполнена на кафедре дифференциальных уравнений Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук
профессор Ильяшенко Юлий Сергеевич.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук
профессор Давыдов Алексей Александрович,
кандидат физико-математических наук
Приходько Александр Александрович,

Ведущая организация: Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского

Защита диссертации состоится 18 июня 2010 г. в 16 часов 40 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.85 при Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова по адресу:
119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ, механико-математический факультет, ауд. 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 18 мая 2010 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д 501.001.85 при МГУ,
доктор физико-математических наук,
профессор

И. Н. Сергеев

Актуальность темы. Работа посвящена исследованиям в качественной теории дифференциальных уравнений и теории динамических систем, точнее в *теории быстро-медленных систем* (также известной под названиями *теория сингулярно-возмущенных систем* или *теория релаксационных колебаний*). Указанные системы естественным образом возникают в физических и биологических моделях, а также в теоретических исследованиях. В работе изучаются быстро-медленные системы на двумерном торе, которые обладают свойствами, не встречающимися у аналогичных систем на плоскости.

Впервые релаксационные колебания были обнаружены в радиотехнике. Для описания колебаний в контуре, включающем в себя два сопротивления, емкость, индукцию и тетрод, Б. Ван-дер-Поль предложил¹ дифференциальное уравнение второго порядка, зависящее от параметра, который мы будем обозначать через μ . Указанный параметр выражался через параметры элементов контура. При малых μ колебания в контуре были близки к гармоническим, однако с увеличением μ их характер менялся, и при больших значениях параметра в динамике колебательного процесса стали выделяться участки двух типов: «медленного» изменения и быстрых «скачков» с одного состояния на другое. Ван-дер-Поль предложил называть такие колебания *релаксационными*, и выдвинул гипотезу, что при $\mu \rightarrow +\infty$ соответствующие решения становятся разрывными.

Аналогичные эффекты также наблюдались и в других физических системах. В частности, в ходе анализа различных схем мультивибраторов, А. А. Андроновым и А. А. Виттом было обнаружено², что некоторые «паразитные» параметры (такие как самоиндукция проводника), традиционно отбрасываемые в силу своей относительной малости при построении модели, могут существенно влиять на поведение системы: например, участвовать в образовании положительных обратных связей и тем самым играть ключевую роль в возникновении автоколебаний. Таким образом, их отбрасывание приводило к неадекватной модели.

Первоначально влияние малых параметров удалось учесть путем введения «постулата скачка», предложенного Л. И. Мандельштамом, в соответствии с которым из физических соображений декларировалось, что

¹*van der Pol, B.*, On relaxation-oscillations, The London, Edinburgh and Dublin Phil. Mag. and J. of Sci., **2**:7 (1927), 978–992

²см. *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний. — 2-е издание. — 1959. — С. 727–855. — 914 с. и цитированные там работы

достигнув некоторого состояния система «мгновенно» переходит в другое состояние.

Математическое обоснование «постулата скачка» было получено Н. А. Железцовым и Л. В. Родыгиным³, и потребовало рассмотрения уравнений, в которых «паразитный» малый параметр входил коэффициентом при старшей производной, и его учет повышал порядок уравнения — или, иными словами, размерность фазового пространства соответствующей системы.

Таким образом, с 40-х годов различными исследователями стали рассматриваться системы вида

$$\varepsilon x' = f(x, y, \varepsilon), \quad y' = g(x, y, \varepsilon). \quad (*)$$

или, после перехода к другому масштабу времени $t = \tau/\varepsilon$:

$$\dot{x} = f(x, y, \varepsilon), \quad \dot{y} = \varepsilon g(x, y, \varepsilon), \quad (**)$$

где x и y могут быть, вообще говоря, многомерными координатами, а ε — малый параметр. К системе аналогичного вида приводится классическое уравнение Ван-дер-Поля с помощью преобразования Льенара (при этом $\varepsilon \sim 1/\mu$). Такие системы в современной терминологии получили название «быстро-медленных»: координата x — быстрая, y — медленная. Интерес представляет асимптотическое поведение решений при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Фазовые портреты систем (*) и (**) при фиксированном $\varepsilon \neq 0$ совпадают, но предельное поведение при $\varepsilon \rightarrow 0$ различно: предел (*) называется *медленной системой* (она задает движение в «медленном времени» τ), а предел (**) — *быстрой*. Траектории быстрой системы лежат в плоскостях $y = \text{const}$, а множество нулей $M := \{(x, y) \mid f(x, y, 0) = 0\}$ функции f , называемое *медленной поверхностью*, целиком состоит из особых (неподвижных) точек быстрой системы. Наоборот, траектории медленной системы целиком лежат на медленной поверхности.

Рассмотрение этих предельных систем позволило объяснить появление «мгновенных скачков». Медленная система соответствует модели, при построении которой «паразитные» малые параметры были отброшены. Она адекватно описывает поведение реальной системы при малых ε , но лишь до тех пор, пока движение происходит вблизи участков медленной поверхности, состоящих из *устойчивых* особых точек быстрой системы. Однако,

³ Железцов Н. А., Родыгин Л. В. К теории симметричного мультивибратора. — Докл. АН СССР, **81:3** (1951), 391–392

Железцов Н. А., К теории разрывных колебаний в системах второго порядка. Изв. высших учебных заведений. Радиофизика **1:1** (1958), 67–78.

траектория медленной системы может в какой-то момент достигнуть границы притягивающего участка. В этот момент траектория реальной системы при $\varepsilon \neq 0$ может испытать *срыв*: уйти из окрестности медленной поверхности и переключиться с медленного движения на быстрое, задающееся быстрой системой. Это и есть наблюдающийся «скачок» (в медленном масштабе времени τ он происходит «мгновенно», то есть траектория имеет разрыв; в быстром — за время порядка $O(1)$), который невозможно объяснить, пренебрегая малыми параметрами. При этом траектория, следуя быстрой динамике, может вновь попасть на устойчивый участок медленной поверхности, после чего быстрое движение снова сменится медленным, и так далее.

Таким образом, стало возможным описывать поведение решений быстро-медленных систем, рассматривая в них чередующиеся фазы медленного движения вдоль устойчивых участков медленной поверхности, определяемых медленной системой, и срывов вдоль траекторий быстрой системы. В случае, если быстрая и медленная координаты одномерны (т.е. рассматриваются быстро-медленные системы на плоскости), этому описанию удовлетворяет типичная траектория типичной системы. Замкнутая траектория, проходящая через участки быстрых и медленных движений, является релаксационным циклом, ответственным за появление релаксационных колебаний.

Дальнейшие исследования в этой области были направлены преимущественно на нахождение асимптотик по ε для различных параметров истинных траекторий системы при $\varepsilon \rightarrow 0$ (например, периода релаксационных колебаний). Существенные трудности вызвал анализ динамики в окрестности точек срыва, где и происходит переключение с быстрого движения на медленное. Эта задача была решена Л. С. Понтрягиным и Е. Ф. Мищенко в конце 50-х годов.⁴ Важные результаты были получены А. Н. Тихоновым, А. Б. Васильевой, Л. Флэтто, Н. Левинсоном и др.⁵ Первые члены асимптотического ряда для периода релаксационных колебаний в уравнении Ван-дер-Поля были впервые вычислены А. А. Дородницыным⁶. Ряд асимптотик

⁴Л. С. Понтрягин, Асимптотическое поведение решений систем дифференциальных уравнений с малым параметром при высших производных, Изв. АН СССР. Сер. матем., **21**:5 (1957), 605–626

Е. Ф. Мищенко, Л. С. Понтрягин, Вывод некоторых асимптотических оценок для решений дифференциальных уравнений с малым параметром при производных, Изв. АН СССР. Сер. матем., **23**:5 (1959), 643–660

⁵см. работы, цитируемые в В. И. Арнольд, В. С. Афраймович, Ю. С. Ильяшенко, Л. П. Шильников. Динамические системы — 5. ВИНТИ, Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. **5**, 1986. и Е. Ф. Мищенко, Н. Х. Розов, Дифференциальные уравнения малым параметром и релаксационные колебания, Москва, Наука, 1975.

⁶А. А. Дородницын, Асимптотическое решение уравнения Ван-дер-Поля, Прикл. матем. и механ.,

для общего случая быстро-медленной системы на плоскости были получены Дж. Хаагом в 40-х годах⁷.

Методы, разработанные Понтрягиным и Мищенко, позволили получить полные асимптотики решений типичных быстро-медленных систем на плоскости, изложенные в монографии Е. Ф. Мищенко и Н. Х. Розова⁸, ставшей классической. Эти результаты широко используются в настоящей работе.

Однако, оказалось, что указанное простое качественное описание не исчерпывает всех возможных типов траекторий быстро-медленных систем. Так, в 70-х годах Понтрягиным было обнаружено явление *затягивания потери устойчивости*: оказалось, что в *аналитических* быстро-медленных системах с двумерной быстрой координатой после прохождения границы устойчивости траектория может находиться длительное время вблизи уже *неустойчивой* части медленной поверхности (проходя вдоль неё отделенное от нуля расстояние), и лишь затем претерпевать срыв и переключаться на быстрое движение. На конкретном примере этот эффект был исследован в работе М. А. Шишковой⁹ в 1973, проведенной под руководством Понтрягина; общий случай проанализировал А. И. Нейштадт¹⁰ в 1985 г.

Близкий эффект был обнаружен учениками Дж. Роба (Е. Бенуа, Дж. Калло, Ф. Дьене, М. Дьене)¹¹ в начале 80-х годов в быстро-медленных системах с одной быстрой и одной медленной переменной. Они исследовали рождение релаксационного предельного цикла в системе Ван-дер-Поля с дополнительным параметром. Оказалось, что когда при фиксированном ε этот параметр проходит экспоненциально узкий (по ε) интервал, предельный цикл, рождающийся из особой точки в результате бифуркации Андронова — Хопфа проходит через несколько стадий эволюции прежде чем приобрести вид классического релаксационного цикла. При этом, как оказалось, для промежуточных значений параметра, соответствующие

11:3 (1947), 313–328

⁷Haag J. Etude asymptotique des oscillations de relaxation. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. **60** (1943).

Haag J. Exemples concrets d'étude asymptotique d'oscillations de relaxation. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. **61** (1944).

⁸Е. Ф. Мищенко, Н. Х. Розов, Дифференциальные уравнения малым параметром и релаксационные колебания, Москва, Наука, 1975.

⁹Шишкова М. А. Рассмотрение одной системы дифференциальных уравнений с малым параметром при высших производных.— Докл. АН СССР, 1973, **209**:3, 576–579.

¹⁰Нейштадт А. И. Асимптотическое исследование потери устойчивости равновесия при медленном прохождении пары собственных чисел через мнимую ось. Успехи мат. наук, 1985, **40**:5, 190–191

¹¹E. Benoît, J. F. Callot, F. Diener, M. Diener. Chasse au canard. Collectanea Mathematica, **31–32** (1981), 37–119.

M. Diener, The canard unchained or how fast/slow dynamical systems bifurcate, The Mathematical Intelligencer **6** (1984), 38–48.

предельные циклы проходят вблизи некоторых дуг *неустойчивой* части медленной кривой. Такие траектории получили название «уток» (canard, сейчас также используется английское duck) — частично благодаря контринтуитивности эффекта, который поначалу был воспринят как «газетная утка», частично из-за своей формы, отдаленно напоминающей летящую утку. Уточненные решения были обнаружены в различных химических, биологических и других моделях.¹²

Первоначально, уточненные решения исследовались методами нестандартного анализа, однако вскоре к ним удалось применить ставшие уже классическими методы асимптотических рядов (У. Эккауз¹³, Е. Ф. Мищенко, А. Ю. Колесов, Ю. С. Колесов, Н. Х. Розов¹⁴), а позже — геометрическую теорию сингулярно-возмущенных систем (разработанную Н. Феничем¹⁵) с помощью метода раздутия (Ф. Дюмортье и Р. Руссари¹⁶, М. Крупа и П. Смолян¹⁷). Оказалось, что уточненные решения являются «редким» явлением в системах на плоскости. В частности, притягивающие уточненные циклы, которые могут быть обнаружены в ходе численного эксперимента, появляются только при наличии дополнительного параметра, причем множество «уточненных» значений этого параметра при фиксированном ε является экспоненциально узким по ε .

В 2001 году Ю. С. Ильяшенко и Дж. Гукенхеймер обнаружили¹⁸ принципиально новое поведение для быстро-медленных систем на двумерном торе. Было показано, что для некоторого конкретного семейства систем, *в отсутствие дополнительных параметров*, для сколь угодно малого значения ε система может иметь устойчивый уточненный цикл. Однако, рассмотренные ими системы обладали симметрией, и поэтому не были типичными. В то же время, в указанной работе была выдвинута гипотеза, что об-

¹²См. напр. J. Moehlis, Canards in a Surface Oxidation Reaction. J. of Nonlinear Sci. **12**:4, 319-345. и цитированные там работы.

¹³W. Eckhaus, Relaxation oscillations including a standard chase on French ducks, in Asymptotic Analysis II, Springer Lecture Notes Math. **985** (1983), 449–494.

¹⁴А. Ю. Колесов, Е. Ф. Мищенко. Явление затягивания Л. С. Понтрягина и устойчивые циклы-утки многомерных релаксационных систем с одной медленной переменной. Математический сборник, **181**:5 (1990), 579-588.

Мищенко Е.Ф., Колесов Ю.С., Колесов А.Ю., Розов Н.Х. Периодические движения и бифуркационные процессы в сингулярно возмущенных системах. Москва, «Физико-математическая литература», 1995

¹⁵N. Fenichel, Geometric singular perturbation theory for ordinary differential equations, J. of Diff. Eq., **31** (1979), pp. 53–98.

¹⁶F. Dumortier and R. Roussarie, Canard cycles and center manifolds, Mem. Amer. Math. Soc., **121**:577 (1996).

¹⁷M. Krupa, P. Szmolyan, Extending geometric singular perturbation theory to nonhyperbolic points — fold and canard points in two dimensions, SIAM J. Math. Anal., **33**:2, 286–314.

¹⁸J. Guckenheimer, Yu. S. Ilyashenko, The Duck and the Devil: Canards on the Staircase, Moscow Math. J., **1**:1, (2001), 27–47.

наруженный эффект наблюдается в открытом множестве в пространстве быстро-медленных систем, то есть в (локально) типичном случае.

Настоящая диссертация посвящена доказательству этой гипотезы, а также дальнейшим исследованиям уточных решений в быстро-медленных системах на двумерном торе. В работе практически полностью исследован весьма широкий класс локально-типичных систем без дополнительных параметров, обладающих притягивающими уточными циклами для сколь угодно малого значения параметра ε , что является принципиально новым явлением в теории быстро-медленных систем. Актуальность работы следует из вышесказанного.

Цель работы. Целью работы является изучение уточных решений быстро-медленных систем на двумерном торе. Основные результаты работы посвящены формулировке необходимых и достаточных условий для существования притягивающих уточных предельных циклов, а также нахождению верхних и нижних оценок на их количество.

Методы исследования. В работе используются асимптотические разложения траекторий быстро-медленных систем вблизи точки срыва, методы геометрической теории сингулярно-возмущенных систем, теория нормальных форм в приложении к быстро-медленным системам на торе, а также новые технические результаты, полученные в работе и описывающие быстро-медленную динамику на торе вблизи точки срыва.

Научная новизна. Результаты работы являются новыми. В работе получено три основных результата:

- Доказано, что в типичных быстро-медленных системах на двумерном торе, обладающих выпуклой медленной кривой, выполняется аналог теоремы Ильяшенко–Гукенхаймера: а именно, система обладает единственным притягивающим уточным циклом (совершающим 1 оборот вдоль оси y) для сколь угодно малых значений параметра ε .
- Доказано, что в типичных быстро-медленных системах на двумерном торе, обладающих невыпуклой медленной кривой, число притягивающих уточных предельных циклов, совершающих 1 оборот вдоль оси y , не превосходит половины от числа складок медленной поверхности при проектировании вдоль оси быстрого движения x .
- Доказано, что указанная оценка является точной в следующем смысле: она достигается для систем из некоторого открытого множества.

Помимо этого, получено описание динамики вблизи точки срыва в быстро-медленных системах на торе.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Полученные результаты относятся к качественной теории дифференциальных уравнений и теории динамических систем. Они позволяют эффективно оценивать число притягивающих уточных циклов (которые могут наблюдаться в численных или физических экспериментах) без интегрирования рассматриваемой системы. Эти результаты, а также разработанная техника анализа быстро-медленных систем на торе, могут быть полезны специалистам для решения математических и физических задач.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались и обсуждались на следующих семинарах и конференциях:

- на семинаре «Динамические системы» под руководством д. ф.-м. н., профессора Ю. С. Ильяшенко (механико-математический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова) в 2006—2008 гг. (неоднократно).
- на летней школе «Динамические системы» под руководством д. ф.-м. н., профессора Ю. С. Ильяшенко (механико-математический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова и Laboratoire J.-V.Poncelet) в 2009 г;
- на Международной конференции «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы», посвященной памяти И.Г.Петровского. (г. Москва, МГУ, 21–26 мая 2007 г.)
- на Международной конференции «Топология, геометрия и динамика» памяти В. А. Рохлина (Euler International Mathematical Institute, Санкт-Петербург, 11–16 января 2010).
- на совместном заседании семинаров кафедры дифференциальных уравнений и кафедры численного функционального анализа Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского (2010).

Публикации. Основные результаты работы опубликованы в двух статьях и двух тезисах конференций [1-4].

Структура работы. Работа состоит из введения, двух глав, и списка литературы, содержащего 31 наименование. Общий объем диссертации — 136 страниц.

Содержание диссертации

В работе рассматривается быстро-медленная система вида (**), где $(x, y) \in \mathbb{T}^2$, $g > 0$, функции f и g являются достаточно гладкими, медленная кривая M целиком лежит в некоторой фундаментальной области универсальной накрывающей тора. В описаниях, ось x считается вертикальной и направленной вверх, ось y — горизонтальной и направленной вправо.

В главе 1 исследуется случай системы, имеющей *выпуклую* медленную кривую. Ее основным результатом является следующая теорема, сформулированная в параграфе 1.1.1:

Теорема 1.1. *В некоторой открытой области пространства быстро-медленных динамических систем на торе имеет место следующее. Существует накапливающаяся к нулю последовательность интервалов, для всякого ε из которой система имеет замкнутое притягивающее точное решение. Бассейном притяжения этого решения является весь тор, за исключением одной неустойчивой периодической траектории.*

В параграфе 1.1.2 дается более подробная формулировка основного результата. В параграфе 1.1.3 дается обзор доказательства, сводящего данную теорему к серии лемм, которые доказываются в следующих параграфах. В разделе 1.2 приводятся теоремы о нормальных формах, необходимые для дальнейшего. В разделе 1.3 доказываются сформулированные ранее леммы. В разделе 1.4 доказываются вспомогательные технические утверждения.

Эвристическая идея, лежащая в основе доказательства, состоит в следующем. В силу выпуклости, медленная кривая имеет две точки срыва. Зафиксируем некоторую вертикальную окружность $\Gamma = \{y = \text{const}\}$, не пересекающую медленную кривую. Рассмотрим произвольную точку, проектирующуюся на медленную кривую вдоль оси быстрого движения, не попадая при этом на точки срыва. (См. рис. 1). Траектория, проходящая через эту точку, в прямом времени быстро попадает в окрестность устойчивой части медленной кривой, после чего медленно движется вправо до точки срыва, претерпевает срыв, и дальше движется по тору, совершая большое количество оборотов (порядка $1/\varepsilon$), после чего пересекает Γ . Обозначим точку пересечения через $R(\varepsilon)$. В обратном времени, траектория притягивается к *отталкивающей* части медленной кривой, движется влево до точки (обратного) срыва, претерпевает срыв, после чего движется

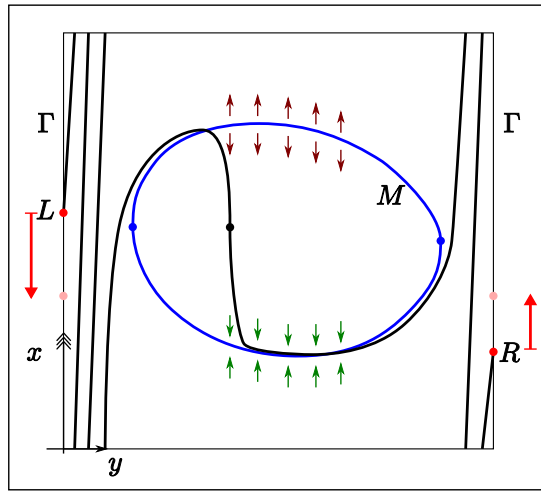


Рис. 1. Уточная траектория системы с выпуклой медленной кривой

по тору, совершая большое количество оборотов вплоть до пересечения с Γ в точке, которую мы обозначим через $L(\varepsilon)$. Эта траектория является уточной, поскольку проходит вблизи дуги отталкивающей части медленной кривой.

При уменьшении $\varepsilon > 0$, траектории системы при движении вне окрестности медленной кривой становятся более «вертикальными» (близкими к траекториям быстрого движения). Следовательно, точка $R(\varepsilon)$ при этом сдвигается вверх, а точка $L(\varepsilon)$ сдвигается вниз. Из соображений непрерывности, найдется такое ε_1 , что точки совпадут: $R(\varepsilon_1) = L(\varepsilon_1)$. Тем самым, для данного ε система имеет уточный цикл. При дальнейшем уменьшении ε , произойдет еще одно совпадение, и т.д. Таким образом, для последовательности значений $\varepsilon = \varepsilon_k$, сходящейся к нулю, система имеет уточные циклы. Подходящим выбором начальной точки, мы можем добиться устойчивости уточного цикла. Малое шевеление начальной точки приводит к шевелению соответствующих значений ε_k , которые тем самым замечают «уточные» интервалы, существование которых утверждается в теореме.

Ключевым инструментом анализа является отображение Пуанкаре P_ε с трансверсали Γ на себя вдоль фазовых кривых системы. В силу условия $g > 0$, указанное отображение является всюду определенным диффеоморфизмом окружности. Его периодические (в частности, неподвижные) точки соответствуют периодическим траекториям системы. Обозначим график отображения P_ε через γ_ε . Неподвижные точки отображения Пуанкаре соответствуют точкам пересечения графика с диагональю $\mathcal{D} := \{y = x\}$.

Практически во всех точках окружности-прообраза (за исключением малой дуги) отображение P_ε имеет производную, близкую к 0, то есть сильно сжимает. В то же время, оставшаяся малая дуга под действием P_ε сильно растягивается, и её образом является почти вся окружность; в точках этой дуги производная отображения Пуанкаре может быть очень велика.

Геометрически, это соответствует тому, что график γ_ε содержится в объединении двух узких полос: вертикальной и горизонтальной, см. рис. 2. Ширина полос экспоненциально мала вместе с ε (лемма 1.1). Полосы строятся таким образом, что все точки графика, лежащие в вертикальной полосе, соответствуют уточным решениям системы.

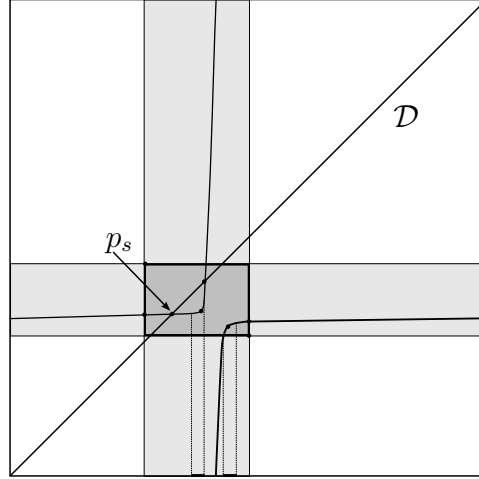


Рис. 2. График отображения Пуанкаре; точка p_s соответствует уточному циклу

Вне прямоугольника, являющегося пересечением полос, наклон графика либо очень мал (график проходит почти горизонтально), либо очень велик (график почти вертикален). Тем самым, точки графика γ_ε , в которых производная P_ε равна 1 (мы будем называть их *нейтральными*), могут находиться только внутри указанного прямоугольника. Максимальное количество точек пересечения диагонали $\mathcal{D}$ с графиком γ_ε оценивается сверху через число нейтральных точек (лемма Ролля). Когда $\mathcal{D}$ проходит через нейтральную точку, происходит либо рождение, либо уничтожение очередной пары циклов: устойчивого и неустойчивого. Соответствующие точки на графике отображения Пуанкаре близки к нейтральным точкам, и значит лежат внутри вертикальной полосы, т.е. соответствуют уточным решением. Когда ε монотонно убывает к нулю, график движется «как целое» из правого нижнего угла в верхний левый (лемма 1.2), поэтому существует счетный набор интервалов значений ε , накапливающийся к нулю, для

которых диагональ $\mathcal{D}$ пересекает график γ_ε вблизи нейтральных точек, и система имеет уточные притягивающие циклы (см. параграф 1.1.4).

Оказывается, в случае выпуклой медленной кривой, отображение Пуанкаре имеет ровно две нейтральные точки (лемма 1.1). Это означает, что может родиться ровно одна пара уточных циклов. Доказательство этого факта приведено в параграфе 1.3.2. Оно сопряжено с преодолением технических трудностей, и требует анализа поведения быстро-медленной системы на торе в окрестности точки срыва, с учетом того факта, что траектория проходит в этой окрестности неограниченное число раз при $\varepsilon \rightarrow 0$. Указанный анализ проводится в параграфе 1.4 путем применения леммы об искажении Данжуа–Шварца (лемма 1.6).

В главе 2 рассматривается случай произвольной типичной быстро-медленной системы на торе, без ограничения на выпуклость медленной кривой. Условия «типичности» задаются в явном виде: исключительное множество нетипичных систем является объединением конечного числа семейств положительной коразмерности, выделяемых явными условиями типа равенства. Основным результатом этой главы являются следующие две теоремы, сформулированные в параграфе 2.1.1:

Теорема 2.1 (Оценка сверху на число уточных циклов). *Типичная быстро-медленная система на торе обладает следующим свойством. На оси ε существует накапливающаяся к нулю последовательность интервалов, такая что для всякого ε из них система обладает притягивающими замкнутыми уточными решениями (уточными циклами), совершающими один оборот вдоль оси y . Бассейн притяжения каждого из этих циклов имеет равномерно ограниченную снизу меру. Их количество не превосходит половины от количества точек складки медленной кривой.*

Теорема 2.2 (Точность оценки). *Существует открытое множество систем, обладающих максимальным количеством уточных решений (равным числу складок на медленной кривой) для всех ε из некоторого набора интервалов, накапливающихся к нулю.*

Обзор доказательства приведен в разделе 2.2. В разделе 2.3 приведена более удобная формулировка основного технического результата, полученного в главе 1. В разделе 2.4 доказывается первый основной результат главы: теорема 2.1. В разделе 2.5 доказывается второй основной результат главы: теорема 2.2. Раздел 2.6, завершающий диссертацию, посвящен доказательству технических утверждений.

Идея доказательства состоит в следующем. Нейтральные точки разбивают график γ_ε на несколько дуг, на каждой из которых вторая производная отображения Пуанкаре сохраняет свой знак. Геометрически, это означает, что в указанном прямоугольнике график имеет вид «лесенки» со ступеньками разной ширины и высоты (лемма 2.4).

Информация о производных отображения Пуанкаре, необходимая для анализа нейтральных точек, находится из следующих геометрических соображений. Рассмотрим *базовую полосу* в фазовом пространстве, ограниченную вертикальными окружностями, проходящими через крайнюю правую и крайнюю левую точки срыва, и содержащую медленную кривую M (см. рис. 3).

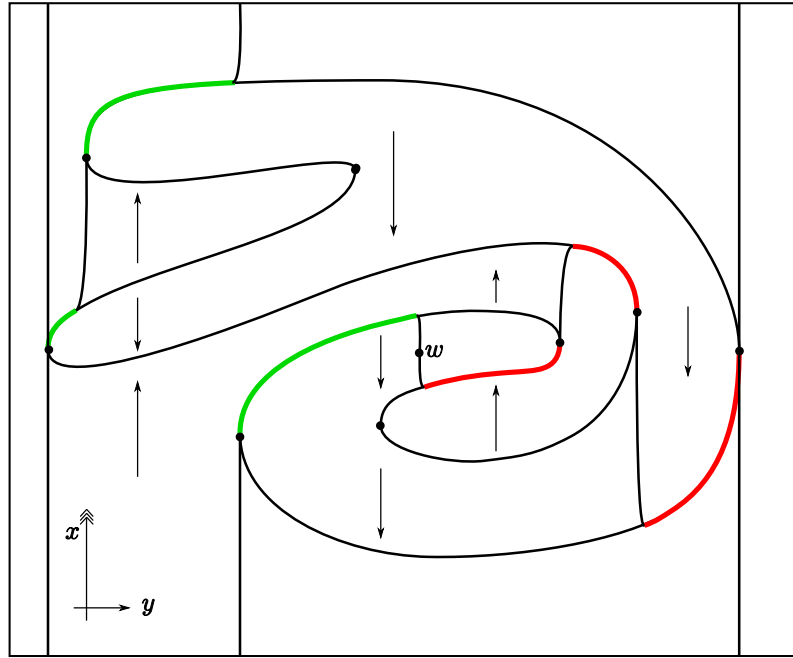


Рис. 3. Траектория, испытывающая серию прямых и обратных срывов

Любая траектория, проходящая через фиксированную точку этой полосы $w \notin M$, в прямом времени попадает на устойчивый участок медленной кривой, проходит вправо вдоль этого участка до точки срыва, претерпевает срыв, после чего либо выходит из базовой полосы, либо попадает на другой устойчивый участок и движется вдоль него до следующей точки срыва, после чего процесс повторяется вплоть до выхода из полосы. В обратном времени траектория попадает на неустойчивый участок медленной кривой, движется влево вдоль него до точки обратного срыва, претерпевает обратный срыв, и либо выходит из базовой полосы, либо попадает на другой неустойчивый участок и т.д. вплоть до выхода из полосы. Таким образом,

траектория проходит вблизи некоторых дуг устойчивых и неустойчивых участков медленной кривой.

В точке w происходит переключение, называемое «уточным срывом»: левее неё траектория движется вблизи устойчивых участков, а правее — вблизи неустойчивых. При движении вблизи устойчивых (неустойчивых) участков накапливается сближение (разбегание) траекторий. Производная отображения Пуанкаре определяется суммой интегралов $\int f'_x(x, y, 0)dy$ по указанным дугам.

Рассмотрим траекторию, проходящую через точку $(x, -\pi)$ трансверсали Γ . Она претерпевает не более чем один «уточный срыв». В зависимости от его направления (вниз или вверх), при увеличении x , уточный срыв смещается вправо либо влево. В первом случае производная отображения Пуанкаре возрастает, поскольку увеличивается время, которое траектория проходит вблизи неустойчивых участков медленной кривой. Аналогично, во втором случае производная отображения Пуанкаре убывает. Переключение между режимом возрастания и режимом убывания происходит при достижении уточным срывом какой-либо точки складки медленной кривой. (См. эвристическое описание в параграфе 2.4.1.)

Таким образом, производная отображения Пуанкаре кусочно-монотонна, причем число интервалов монотонности не превосходит числа складок медленной кривой. (См. лемму 2.3 и её доказательство в разделе 2.4.) Это доказывает, что число нейтральных точек (а значит, и уточных циклов) не превосходит числа складок. Отсюда следует теорема 2.1. Существование открытого множества систем, для которых оценка точна (теорема 2.2), доказывается в разделе 2.5 путем явного построения.

Выражаю свою искреннюю признательность моему учителю, профессору Юлию Сергеевичу Ильяшенко за постановку задачи, постоянное внимание и интерес к работе, многочисленные плодотворные обсуждения и ценные замечания по тексту. Я также признателен В. А. Клепцыну за многочисленные обсуждения и идею использования леммы об искажении.

Работы автора по теме диссертации

1. *I. V. Schurov*. Ducks on the torus: existence and uniqueness. J. of Dynamical and Control Systems **16**:2 (2010), 267—300.
2. *Щуров И. В.* О притягивающих уточных циклах в быстро-медленных системах на двумерном торе. Деп. в ВИНТИ 22.03.2010, №174-B2010, 51 с.
3. *I. Schurov*. Canard Cycles in Generic Slow-Fast Systems on the Two-torus. Topology, Geometry and Dynamics: Rokhlin memorial. Saint Petersburg, 2010, p. 64
4. *I. Schurov*. Ducks on the torus existence and uniqueness. Международная конференция, посвященная памяти И.Г.Петровского, тезисы докладов. — М.: Издательство МГУ, 2007, с. 358