МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 517.98

Горбачев Алексей Николаевич

ИНВАРИАНТНЫЕ МЕРЫ ДЛЯ МНОГОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2010

Работа выполнена на кафедре теории функций и функционального анализа механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Степин Анатолий Михайлович
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, Качуровский Александр Григорьевич
	кандидат физико-математических наук, Тихонов Сергей Викторович
Ведущая организация:	Обнинский государственный технический университет атомной энергетики (ИАТЭ)

Защита диссертации состоится 1 октября 2010 г. в 16 часов 40 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.85 при Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 31 августа 2010 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д 501.001.85 при МГУ
доктор физико-математических наук,
профессор

В. Н. Сорокин

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Начиная с 30-х годов XX века эргодическая теория активно развивалась и в настоящее время представляет собой основной аппарат для анализа статистических свойств динамических систем. Базовым понятием эргодической теории является понятие инвариантной меры отображения. Различные вопросы, связанные с существованием инвариантных мер, статистическими свойствами динамических систем, подходы к изучению и применению эргодической теории содержатся в работах Дж. Д. Биркгофа[1], Дж. фон Неймана[2], Е. Хопфа[3], П. Халмоша[4], В. А. Рохлина[5], Н. Н. Боголюбова[6], Д. В. Аносова и Я. Г. Синая[7], А. Б. Катка и А. М. Степина[8], каждая из которых, в свою очередь, повлекла за собой серию работ в данном направлении.

Необходимость в изучении многозначных отображений возникла в таких классических областях как анализ[9,10], геомет-

---

[1]Birkhoff G. D., Proof of the ergodic theorem // Proc Natl Acad Sci USA 17(1931): 656-660

[2]von Neumann J., Proof of the Quasi-ergodic Hypothesis // Proc Natl Acad Sci USA 18(1932): 70-82

[3]Hopf E., Statistik der geodatischen Linien in Mannigfaltigkeiten negativer Krummung // Leipzig Ber. Verhandl. Sachs. Akad. Wiss. 91(1939): 261-304 .

[4]Халмош П., Лекции по эргодической теории, пер. с англ., М., 1959;

[5]Рохлин В.А., Лекции по энтропийной теории преобразований с инвариантной мерой // УМН 1967, т. 22, вып. 5(137), с. 3-56.

[6]Боголюбов Н.Н., Избранные труды в трех томах, т.1, Киев, Наукова думка, 1969.

[7]Аносов Д. В., Синай Я. Г., Некоторые гладкие эргодические системы // УМН, 1967, т. 22, вып. 5(137), с. 107-172

[8]Каток А. Б., Степин А. М., Аппроксимации в эргодической теории // УМН 1967, т. 22, вып. 5(137), с. 81-106

[9]Yuan G. X.-Z. KKM theory and applications in nonlinear systems. New York: Marcel Dekker, 1999, 648 p.

[10]Kigami J., Analysis on fractals. Cambridge: Cambridge univ. press, 2001, 226 p.

рия[11,12], топология[13,14]. Свойства многозначных отображений исследуются в теории марковских процессов[15] и в приложениях, связанных с динамическими системами, таких, как, математическая экономика[16], теория игр[17].

В настоящей работе изучаются инвариантные меры многозначных отображений. Родственное понятие полиморфизмов ввел А. М. Вершик[18], одновременно распространив на них некоторые результаты классической эргодической теории. Кроме того, ряд результатов, относящихся к исследованию эргодических свойств полиморфизмов принадлежат А. Л. Федорову[19], В. В. Рыжикову[20], К. Б. Игудесману[21]. Многозначные отображения с инвариантной мерой появляются в связи с подходом Монжа-Канторовича к гидродинамической задаче Ньютона (см. обзор А. Ю. Плахова[22]), а также в проблеме сингулярности бесконечных

[11]Каток А. Б., Хасселблат Б. Введение в современную теорию динамических систем. М.: Факториал, 1999, 768 с.

[12]Barnsley M., Fractals everywhere. Boston: Academic press, 1988, 394 p.

[13]Борисович Ю. Г., Б. Д. Гельман, А. Д. Мышкис, В. В. Обуховский. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. М.: КомКнига, 2005, 216 с.

[14]Сибирский К. С., Шубэ А. С. Полудинамические системы. Кишинев: Штиинца, 1987, 271 с.

[15]Бебутов М., Цепи Маркова с компактным пространством состояний // Мат. сборник, Т. 10(52), вып. 3, с. 213-238.

[16]Гиндельбранд В., Ядро и равновесие в большой экономике, М.: Наука, 1986, 200 с.

[17]Берж К., Общая теория игр нескольких лиц. М.: Физматгиз, 1961, 128 с.

[18]Вершик А.М., Многозначные отображения с инвариантной мерой (полиморфизмы) и марковские операторы // Записки научн. сем. ЛОМИ, 1977, вып. 72, с. 26-61.

[19]Федоров А. Л., Полиморфизмы и разбиения пространств Лебега // Функц. анализ и его приложения, 1982, т.16, вып. 2, стр. 88-89

[20]Рыжиков В. В., Полиморфизмы, джойнинги и тензорная простота динамических систем // Функц. анализ и его приложения, 1997, т.31, вып. 2, стр. 45-57

[21]Igudesman K. B., Dynamics of finite-multivalued transformations // Lobachevskii Jour. of Math. 2005, vol. 17, p. 47-60.

[22]Плахов А. Ю., Рассеяние в биллиардах и задачи ньютоновской аэродинамики // УМН, 2009, т. 64, вып. 5(389), с. 97-166

сверток распределений Бернулли (см. работы П. Эрдеша[23], В. Пэрри[24], Ю. Переса, В. Шлага и Б. Соломяка[25], П. И. Трошина[26]).

Результаты реферируемой работы связаны со следующими вопросами эргодической теории однозначных отображений.

Известное утверждение Н. Н. Боголюбова, полученное на базе его и Н. М. Крылова[27] результата об инвариантной мере непрерывного отображения, состоит в следующем: для аменабельной полугруппы однозначных преобразований S компактного пространства найдется S-инвариантная мера[6].

Уравнение для плотности абсолютно непрерывной инвариантной меры однозначного отображения (в одномерном случае) было выведено А. Реньи[28]. Там же было показано, что для кусочно гладкого растягивающего отображения такая мера эргодична и, следовательно, единственна.

В монографии Р. Фелпса[29] с использованием теоремы представления Шоке[30] и построенного Дж. Фельдманом[31] описания крайних точек множества инвариантных вероятностных мер показано, что множество инвариантных мер однозначного отображения является симплексом.

---

[23]Erdos P., On a family of symmetric Bernoulli convolutions // Amer. J. Math., 1939, vol. 61, p. 974-975.

[24]Parry W., On the β-expansions of real numbers // Acta. Math. Acad. Sci. Hung., 1960, vol. 11, p. 401-416.

[25]Peres Y., Shlag W., Solomyak B., Sixty years of Bernoulli convultions // Fractal Geometry and Stochastics 2 / ed. by C. Bandt. Basel, 2000, p. 39-65.

[26]Трошин П. И., Об инвариантности меры для одной 2-трансформации // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2009, т. 151, с. 183-191.

[27]Bogoliubov N. N., Krylov N. M., La theorie generalie de la mesure dans son application a l'etude de systemes dynamiques de la mecanique non-lineaire // Ann. Math. II, 1937, vol. 38, p. 65-113.

[28]Renyi A., Representations for real numbers and their ergodic properties // Acta math. Acad. sci. hungar., 1957, 8, с. 477-493.

[29]Фелпс Р., Лекции о теоремах Шоке, М., Мир, 1968.

[30]Choquet G., Existance et unicite des representations integrales au moyen des points extremaux dans les cones convexes // Seminaire Bourbaki, 1956, 139, 15 pp

[31]Feldman J., Representations of invariant measures, 1963, dittoed notes, 17 pp.

Для несжимающих однозначных отображений окружности в работе Ш. И. Ахалая и А. М. Степина[32] найдена граница гладкости отображения, при переходе через которую абсолютно непрерывная инвариантная мера данного отображения становится бесконечной.

Одним из нерешенных вопросов в эргодической теории однозначных отображений является задача Фюрстенберга[33] о существовании сингулярной меры на окружности, инвариантной относительно преобразований возведения в квадрат и возведения в куб. В настоящей работе предложена чисто аналитическая формулировка этой задачи и указана ее связь с инвариантными мерами для многозначных отображений.

Цель работы

Представленная диссертация посвящена изучению эргодических свойств многозначных отображений. Основная цель работы — исследовать вопрос о существовании инвариантных мер различных многозначных отображений, изучить их свойства и структуру множества инвариантных мер.

Научная новизна

В работе получен ряд новых результатов, основными из которых являются следующие:

1. Для уравнений и систем уравнений, которые определяются действием непрерывных отображений компактного топологического пространства на вероятностные меры, дано полное описание решений.

2. Показано, что множество инвариантных мер линейного многозначного отображения не является симплексом Шоке.

[32] Ахалая Ш. И., Степин А. М., Об абсолютно непрерывных инвариантных мерах несжимающих преобразований окружности // Тр. МИАН 2004. N244, 23-34.

[33] Furstenberg H., Disjointness in Ergodic Theory, Minimal Sets, and a Problem in Diophantine Approximation // Mathematical Systems Theory 1(1): 1-49 (1967)

3. Установлено, что конечность или бесконечность абсолютно непрерывных инвариантных мер зависит от класса гладкости несжимающего многозначного отображения.

Основные методы исследования

Результаты диссертации получены с использованием методов эргодической теории, вещественного и функционального анализа, теории рядов Фурье.

Практическая и теоретическая ценность

Диссертация носит теоретический характер. Ее методы и результаты могут найти применение в различных вопросах теории динамических систем, теории случайных процессов.

Апробация результатов

Основные результаты работы неоднократно докладывались на следующих семинарах:

- Межкафедральный научно-исследовательский семинар «Динамические системы и эргодическая теория» механико-математического факультета МГУ под руководством акад. РАН проф. Д. В. Аносова, д. ф.-м. н. проф. А. М. Степина (2005-2010);

- «Ортогональные ряды» кафедры теории функций и функционального анализа механико-математического факультета МГУ под руководством член-корр. РАН, проф. Б. С. Кашина, д. ф.-м. н., проф. С. В. Конягина(2009).

Результаты диссертации докладывались также на Добрушинской международной конференции, Москва, 2009.

Публикации

Результаты опубликованы в 4 работах, список которых приведен в конце автореферата [1-4].

Структура диссертации

Диссертация состоит из введения, трех глав, каждая из которых разбита на два параграфа и списка литературы, который включает 48 наименований. Общий объем диссертации составляет 81 страницу.

Краткое содержание работы

Во введении дан обзор работ, в которых изучаются многозначные отображения, приведены основные определения, а также излагаются основные результаты диссертации. В первой главе исследован вопрос существования инвариантных мер для растягивающих многозначных отображений и многозначных отображений, задаваемых параметризацией. Во второй главе изучены свойства множества инвариантных мер линейного многозначного отображения и связь с задачей Фюрстенберга. В третьей главе установлены некоторые свойства абсолютно непрерывных инвариантных мер для многозначных отображений.

Многозначное отображение R множества Ω_1 в Ω_2 сопоставляет каждой точке $\omega_1 \in \Omega_1$ подмножество $R(\omega_1) \subset \Omega_2$. График Γ_R такого отображения – это множество $\{(\omega_1, \omega_2), \omega_1 \in \Omega_1, \omega_2 \in R(\omega_1)\} \subset \Omega_1 \times \Omega_2$.

Предполагается, что множества Ω_1 и Ω_2 суть измеримые пространства (т.е. снабжены σ-алгебрами измеримых подмножеств), а рассматриваемые отображения Ω_1 в Ω_2 – измеримы.

Образ $T_*\eta$ меры η на Ω_1 относительно измеримого однозначного отображения $T : \Omega_1 \to \Omega_2$ — это мера на Ω_2, определяемая равенством $T_*\eta(A) = \eta(T^{-1}A)$ для любого измеримого $A \subset \Omega_2$. В том случае, если пространства Ω_1 и Ω_2 совпадают, будем опускать индексы. Мера η на Ω называется *инвариантной* для (относительно) T, если $T_*\eta = \eta$.

Пусть $\pi_1, \pi_2 : \Omega \times \Omega \to \Omega$ — координатные проекции.

Определение. Мера μ на $\Omega \times \Omega$ *инвариантна* относительно многозначного измеримого отображения R пространства Ω в себя, если $\mu(\Omega \times \Omega \setminus \Gamma_R) = 0$ и $\pi_{1*}\mu = \pi_{2*}\mu$.

Отметим связь с понятием полиморфизма[18] $\Pi(\mu)$, понимаемого как диаграмма

$$\Pi: \quad (\Omega, \lambda) \xleftarrow{\pi_1} (\Omega \times \Omega, \mu) \xrightarrow{\pi_2} (\Omega, \lambda),$$

где μ — мера на $\Omega \times \Omega$, а $\lambda = \pi_{1*}\mu = \pi_{2*}\mu$.

Утверждение **1.1.1.** *Каждое многозначное отображение R из Ω в себя с инвариантной мерой μ задает полиморфизм $\Pi(\mu)$ на Ω, и обратно, для любого полиморфизма $\Pi(\mu)$ существует многозначное отображение R из Ω в себя с инвариантной мерой μ.*

По аналогии с однозначными отображениями можно определить понятия инвариантной функции и инвариантного множества полиморфизма. В работе указан пример полиморфизма, для которого существует инвариантная функция, но нет инвариантного множества.

Описана конструкция естественного расширения полиморфизма и исследована ее связь с понятием факторотображения: показано, что факторпространство, факторотображение и фактормера естественного расширения по специальному разбиению совпадают с исходными пространством, отображением и мерой соответственно.

Многозначное отображение R пространства Ω в себя, *параметризовано* измеримыми однозначными отображениями $r_1, r_2 : \Omega \to \Omega$, если $\Gamma_R = (r_1(t), r_2(t)), t \in \Omega$. В частности, R может быть и однозначным с параметризацией $r_1(t) = t$, $r_2(t) = R(t)$. Справедливо

Утверждение **1.1.2.** *Для многозначного отображения R из Ω в себя, параметризованного отображениями r_1 и r_2, инвариантная мера существует тогда и только тогда, когда найдется мера η на Ω, удовлетворяющая условию $r_{1*}\eta = r_{2*}\eta$.*

Мера η в этом случае называется (r_1, r_2)*–инвариантной.*

Линейное (k, l)–отображение S^1 это многозначное отображение окружности в себя с параметризацией $r_1(t) = kt$, $r_2(t) = lt$. В параграфе 1.1 для такого отображения построен пример инвариантной меры с непостоянной плотностью, а также приведены два примера бесконечнозначных отображений с непрерывной параметризацией.

Параграф 1.2 посвящен изучению действий преобразований на меры.

Пусть $r_1, \dots, r_n$ — преобразования (однозначные) пространства Ω с заданной на нем σ–алгеброй измеримых множеств. Рассмотрим уравнение

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i r_{i*} \eta = 0, \tag{1}$$

где $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$, η — вероятностная мера на Ω.

В том случае, когда $n = 2$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -1$, любое решение уравнения (1) по определению есть (r_1, r_2)–инвариантная мера, следовательно (в силу утверждения 1.1.2), для многозначного отображения, параметризованного посредством r_1 и r_2, существует инвариантная мера.

Пусть S — дискретная полугруппа. Мера μ на Ω называется S–инвариантной, если $s_*\eta = \eta$ для любого $s \in S$. Согласно классическому результату Боголюбова и Крылова, если $r_1, \dots, r_n$ — непрерывные преобразования компактного топологического пространства, а полугруппа S с образующими $r_1, \dots, r_n$ — правоаменабельна, то существует S–инвариантная мера, которая и является решением уравнения (1).

В работе имеется пример, который показывает, что не все меры, удовлетворяющие уравнению (1) S–инвариантны.

Символом $\langle r_1, \dots, r_n \rangle$ обозначается полугруппа с образующими $r_1, \dots, r_n$.

Утверждение **1.2.1.** *Пусть r_1 и r_2 непрерывные отображения компактного топологического пространства Ω, а полугруппа $S = \langle r_1, r_2 \rangle$ абелева. Тогда в групповой алгебре $\mathcal{A} = \{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i s_i,\ s_i \in S\}$ над S существует последовательность, действие которой на произвольную конечную меру на Ω имеет предельную точку — (r_1, r_2)–инвариантную меру.*

Коммутативность полугруппы преобразований может быть заменена правоаменабельностью при введении дополнительного условия.

Говорят, что в полугруппе S выполнен *закон сокращения*, если для любых элементов $a, b, c \in S$ из $ca = cb$ или $ac = bc$ следует $a = b$.

Утверждение **1.2.2.** *Пусть r_1 и r_2 непрерывные отображения компактного пространства Ω с σ–алгеброй измеримых множеств на нем, полугруппа $S = \langle r_1, r_2 \rangle$ правоаменабельна и в S выполнен закон сокращения. Тогда в групповой алгебре $\mathcal{A} = \{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i s_i,\ s_i \in S\}$ над S существует последовательность, действие которой на произвольную конечную меру на Ω имеет предельную точку — (r_1, r_2)–инвариантную меру.*

Несколько более сложная конструкция позволяет описать все решения системы уравнений:

$$r_{1*}\nu = r_{2*}\nu = \ldots = r_{n*}\nu \tag{2}$$

Теорема **1.2.1.** *Пусть $r_1, \ldots, r_n$ непрерывные отображения компактного пространства Ω с σ–алгеброй измеримых множеств на нем, полугруппа $S = \langle r_1, \ldots, r_n \rangle$ правоаменабельна и в S выполнен закон сокращения. Тогда в групповой алгебре $\mathcal{A} = \{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i s_i,\ s_i \in S\}$ над S существует последовательность, действие которой на произвольную конечную меру на Ω имеет предельную точку — решение системы (2).*

В параграфе 1.2 показано также, что класс мер, удовлетворяющих системе (2), «шире» класса S–инвариантных мер: приведен пример отображений $r_1, \ldots, r_n$ с полугруппой $S = \langle r_1 \ldots r_n \rangle$ таких, что существует решение системы (2), не являющееся S–инвариантной мерой.

Аналогичным образом в §1.2 решаются уравнения вида $A_1 f = A_2 f$ или системы $A_1 f = \ldots = A_n f$, где операторы $A_1, \ldots, A_n$ действуют в пространстве равномерно ограниченных на окружности функций класса C^α, $\alpha \geq 1$.

В параграфе 2.1 изучается структура множества инвариантных мер многозначных отображений.

Многозначное отображение R на S^1, параметризованное гладкими отображениями r_1 и r_2, называется растягивающим, если для почти всех $t \in S^1$ выполняются неравенства $r_2'(t) > r_1'(t) > 0$.

В отличие от растягивающих однозначных отображений окружности, для таких многозначных отображений абсолютно непрерывная инвариантная мера не единственна. Более того, имеет место следующее

Утверждение **2.1.1.** *Существует бесконечно много линейно независимых абсолютно непрерывных мер, инвариантных относительно растягивающего многозначного отображения окружности.*

Пусть P — непустое компактное подмножество локально выпуклого линейного топологического пространства E, μ — вероятностная мера на P. Говорят, что точка $p \in E$ *представлена посредством меры* μ, если $f(p) = \int\limits_P f d\mu$ для любого непрерывного линейного функционала f на E. Точка $p \in P$ называется *крайней*, если она не представляется в виде выпуклой линейной комбинации других элементов P. Множество крайних точек обозначим через ex$P$.

Следующая теорема указывает на различия свойств мер, инвариантных относительно однозначных и многозначных отображений.

Теорема **2.1.1.** *Существуют многозначное отображение F окружности в себя, элемент $\hat{m}$ из множества M инвариантных мер для F и две различные меры, представляющие $\hat{m}$ и сосредоточенные на ex$M$.*

Существует такое существенно многозначное отображение R окружности в себя, что для любого элемента y из множества инвариантных мер Y существует единственная мера μ, представляющая y и сосредоточенная на ex$Y$.

При помощи теоремы 2.1.1 и теоремы Шоке-Мейе о максимальных мерах[29] доказывается

Теорема **2.1.3.** *Существуют многозначные отображения окружности в себя, множество инвариантных мер которых суть симплексы или не являются симплексами.*

Параграф 2.2 посвящен изучению различных типов мер, инвариантных относительно многозначных и однозначных отображений. Помимо абсолютно непрерывных инвариантных мер для линейного $(2, 3)$–отображения (описанных как частный случай в утверждении 2.1.1) в работе построены атомическая и сингулярная непрерывная инвариантные меры для этого отображения. Тем самым существует соответствующее решение уравнения $T_{2*}\eta = T_{3*}\eta$, где η – мера на окружности, а T_2 и T_3 – отображения удвоения и утроения аргумента. Вопросы подобного типа изучались Фюрстенбергом еще в 60-е годы XX века, который поставил следующую (до сих пор нерешенную) проблему:

Существует ли сингулярная непрерывная мера на окружности, инвариантная относительно отображений T_2 и T_3?

В работе показано, что данный вопрос эквивалентен следующему:

Существует ли функция ограниченной вариации из $L^2[0, 2\pi]$ не равная тождественной и такая, что коэффициенты ее ряда Фурье $F(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{2\pi int}$ удовлетворяют следующим трем условиям:

$$c_0 = 2c_0 + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^{|k|} c_{k+1} = 3c_0 + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-2c_{3k} + c_{3k+1} + c_{3k+2}), \quad (3)$$

$$c_k = \frac{c_p}{2^m 3^n}, \text{ где } k = 2^m 3^n p,\ p \text{ взаимно просто с 2 и 3}, \quad (4)$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|c_1| + 2|c_2| + \ldots + n|c_n|}{n} = 0. \quad (5)$$

Как видно из нижеследующего утверждения, для определенного класса коэффициентов, удовлетворяющих условиям (3), (4), (5), сумма ряда Фурье с такими коэффициентами имеет неограниченную вариацию.

Утверждение **2.2.1.** *Пусть p_m — m–е по счету натуральное число, взаимно простое с 2 и 3. Тогда функция*

$$f(t) = \sum_{m=1}^{M} c_{p_m} \sum_{\substack{n=3^k 2^l \\ k,l=0,1,\ldots}} \frac{1}{p_m n} \sin p_m n t$$

недифференцируема почти всюду на $(0, 2\pi)$.

Схожие условия на коэффициенты Фурье можно указать для линейных многозначных отображений окружности, а также для линеаризуемых (с помощью непрерывной монотонной замены координат) отображений. В отличие от однозначных отображений, не все растягивающие многозначные отображения можно линеаризовать. В параграфе 2.2 построен пример нелинеаризуемого многозначного отображения.

В параграфе 3.1 получено уравнение на плотность абсолютно непрерывной инвариантной меры многозначного отображения, которое является аналогом уравнения Перрона-Фробениуса.

Пусть Ω — пространство с σ–алгеброй измеримых подмножеств, R — многозначное отображение Ω в себя с графиком Γ_R, Λ — мера на Γ_R с проекциями $\pi_{1*}\Lambda = \lambda_1$ и $\pi_{2*}\Lambda = \lambda_2$.

Теорема **3.1.1.** *Абсолютно непрерывная относительно Λ мера μ на Γ_R инвариантна для R тогда и только тогда, когда для почти всех $x \in \Omega$*

$$\frac{d\lambda_1}{d\lambda}(x) \sum_{\pi_1(t_i)=x} \rho(t_i) \frac{d\Lambda}{d\pi_{1i*}^{-1}\lambda_1}(t_i) = \frac{d\lambda_2}{d\lambda}(x) \sum_{\pi_2(u_j)=x} \rho(u_j) \frac{d\Lambda}{d\pi_{2j*}^{-1}\lambda_2}(u_j),$$

где ρ – плотность меры μ относительно Λ, а $\lambda = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

Похожее уравнение можно получить и для параметризованных отображений:

Теорема **3.1.2.** *Абсолютно непрерывная относительно λ мера η на Ω является (r_1, r_2)–инвариантной тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{r_1(t_i)=x} \rho(t_i) \frac{d\lambda}{dr_{1i*}^{-1}\lambda}(t_i) = \sum_{r_2(u_j)=x} \rho(u_j) \frac{d\lambda}{dr_{2j*}^{-1}\lambda}(u_j),$$

где ρ – плотность меры η относительно λ.

Приведенные выше два уравнения имеют хотя бы одно решение для случая растягивающего многозначного отображения. При этом множество растягивающих многозначных отображений не совпадает с множеством параметризованных отображений с аменабельной полугруппой, описанным в §1.2. На это указывает построенный в параграфе 3.1 пример растягивающего многозначного отображения такого, что полугруппа, образованная r_1 и r_2 не является аменабельной.

В параграфе 3.2 показано, что конечность или бесконечность абсолютно непрерывной инвариантной меры зависит от класса гладкости отображения.

Назовем многозначное отображение R *кусочно-непрерывным (кусочно-дифференцируемым, класса C^{α})*, если имеет место разбиение:

$$\Gamma_R = \Gamma_{\varphi_1} \cup \ldots \cup \Gamma_{\varphi_n},$$

где $\Gamma_{\varphi_1}, \ldots, \Gamma_{\varphi_n}$ — графики некоторых однозначных кусочно-непрерывных (кусочно-дифференцируемых, класса C^{α}) отображений $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — однозначных ветвей отображения R. Кусочно-гладкое многозначное отображение R *растягивает (несжимает)* в точке $x_0 \in \Gamma_R$, если существует такое разбиение $\Gamma_R = \Gamma_{\varphi_1} \cup \ldots \cup \Gamma_{\varphi_n}$, для которого из условия $x_0 \in \Gamma_{\varphi_i}$ следует, что

$$\varphi_i{}'(\pi_1(x_0)) > 1 \ \ (\varphi_i{}'(\pi_1(x_0)) = 1).$$

Для несжимающих многозначных отображений класса C^2 установлена следующая теорема, характеризующая структуру соответствующих инвариантных мер.

Теорема **3.2.1.** *Если несжимающее в $(0,0)$ многозначное отображение R из S^1 в себя класса гладкости C^2 растягивает во всех других точках непрерывности, то для R существует бесконечная абсолютно непрерывная инвариантная мера. Если при этом R не менее чем двузначно в окрестности нуля, то для R одновременно существует и конечная абсолютно непрерывная инвариантная мера.*

Ограничение на класс гладкости в теореме 3.2.1 существенно, как показывает следующая

Теорема **3.2.2.** *Для любого $\alpha \in (1,2)$ найдется такое несжимающее в $\{(0,0)\}$ и растягивающее в других точках непрерывности многозначное отображение из S^1 в себя класса гладкости C^{α}, что все инвариантные для него абсолютно непрерывные меры с единственной возможной особенностью в точке $(0,0)$ конечны.*

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю — доктору физико-математических наук, профессору Анатолию Михайловичу Степину за постановку задач, ценные обсуждения и постоянное внимание к работе.

Работы автора по теме диссертации

1. А. Н. Горбачев, А. М. Степин “Об инвариантных мерах для многозначных отображений”, Успехи математических наук, 2009, т.64, вып.6 (390), стр. 173-174.

2. А. Н. Горбачев ”Инвариантные меры несжимающих многозначных отображений окружности”, Вестник МГУ, сер.1. Математика. Механика, 2010, т. 3, с. 43-46.

3. А. Н. Горбачев, А. М. Степин “Инвариантные меры многозначных отображений”, Деп. в ВИНИТИ 13.10.09 № 619-В2009 МГУ, Москва, 22 стр.

   В работах [1], [3] на роль аменабельности в задаче об инвариантных мерах (Теорема 1) указано А. М. Степиным, реализация этой идеи выполнена А. Н. Горбачевым; наблюдения о возможности неединственного разложения инвариантной меры по крайним точкам сделано А. М. Степиным, основанное на этом доказательство теоремы 2 предложено А. Н. Горбачевым.

4. A. N. Gorbachev ”Invariant Measures for Multivalued Mappings”, Сборник трудов Добрушинской международной конференции, 2009, стр. 71-73.