Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова
Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 517.53, 517.98

Комлов Александр Владимирович

Аналитические свойства решений некоторых классических и некоммутативных интегрируемых систем

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2010

Работа выполнена на кафедре теории функций и функционального анализа Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научные руководители:	доктор физико-математических наук, профессор Сергеев Армен Глебович
	кандидат физико-математических наук, доцент Домрин Андрей Викторович
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Ильяшенко Юлий Сергеевич
	доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Погребков Андрей Константинович
Ведущая организация:	Московский государственный институт электроники и математики

Защита диссертации состоится 1 октября 2010 г. в 16 ч. 40 м. на заседании диссертационного совета Д.501.001.85 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, Главное здание МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета МГУ. (Главное здание, 14 этаж.)

Автореферат разослан 31 августа 2010г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д.501.001.85 при МГУ
доктор физико-математических наук,
профессор

В.Н.Сорокин

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы.

Диссертация посвящена: 1) изучению свойств решений некоммутативной грассмановой $U(1)$ сигма-модели; 2) изучению свойств локально голоморфных решений интегрируемых эволюционных уравнений параболического типа.

Некоммутативная грассманова $U(1)$ сигма-модель (которой посвящена первая глава диссертации) является простейшим случаем некоммутативной грассмановой $U(n)$ сигма-модели — некоммутативного аналога классической грассмановой сигма-модели. Классическая модель описывается следующим образом. Обозначим через $Gr_k(\mathbb{C}^n)$ комплексный грассманиан (то есть многообразие k-мерных комплексных подпространств в $\mathbb{C}^n$), точки которого отождествляются с ортогональными проекторами в $\mathbb{C}^n$, имеющими k-мерные образы. Рассмотрим гладкое отображение $f : \mathbb{C}P^1 \to Gr_k(\mathbb{C}^n)$ (иначе говоря, $f(z)$ при каждом z есть матрица k-мерного ортогонального проектора в $\mathbb{C}^n$). Энергия этого отображения задается функционалом

$$E(f) := \frac{1}{4}\int\limits_{\mathbb{C}}(|\partial_x f|^2 + |\partial_y f|^2)dxdy = \int\limits_{\mathbb{C}}|\partial_{\bar{z}} f|^2 dxdy,$$

где $z = x+iy$, а $|A|^2 = tr(A^*A)$ обозначает квадрат нормы Гильберта-Шмидта матрицы A. Экстремали данного функционала (решения сигма-модели) называются гармоническими отображениями. Указанная классическая модель подробно изучалась математиками и физиками (см., например, монографию Закржевского[1]).

В теории струн возникает некоммутативный аналог приведенной выше модели, который рассматривался в работах[2, 3, 4, 5]. Он получается из классической модели заменой плоскости $\mathbb{R}^2$ ее некоммутативным аналогом $\mathbb{R}^2_\theta$, $\theta > 0$. Переход к некоммутативной модели совершается по правилам исчисления псевдодифференциальных операторов Вейля[6] и приводит к следующей картине. Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство, a и a^* — стандартные операторы уничтожения и рождения в H. В некоммутативной

[1] W. J. Zakrzewski. Low dimensional sigma models // Adam Hilger, Bristol, 1989.

[2] O. Lechtenfeld and A. D. Popov. Noncommutative multisolitons in 2+1 dimensions // JHEP, №11, 2001, 040.

[3] A. V. Domrin, O. Lechtenfeld and S. Petersen. Sigma-model solitons in the noncommutative plane: construction and stability analysis // JHEP, №03, 2005, 045.

[4] А. В. Домрин. Некоммутативные унитоны // Теор. и матем. физика, т.154, №2, 2008, стр.220-239.

[5] А. В. Домрин. Пространства модулей решений некоммутативной сигма-модели // Теор. и матем. физика, т.156, №3, 2008, стр.307-327.

[6] Л. Хермандер. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными, том III: Псевдодифференциальные операторы // Мир, М., 1987.

грассмановой $U(n)$ сигма-модели вместо отображений $f(\cdot) : \mathbb{C}P^1 \to Gr_k(\mathbb{C}^n)$ рассматриваются ортогональные проекторы P в гильбертовом пространстве $\mathbb{C}^n \otimes H = H^n$. Производная $\partial_{\bar{z}}(\cdot)$ заменяется на оператор $\frac{1}{\sqrt{2\theta}}[I \otimes a, \cdot]$, производная $\partial_z(\cdot)$ — на $-\frac{1}{\sqrt{2\theta}}[I \otimes a^*, \cdot]$, а интеграл по комплексной плоскости $\mathbb{C}$ — на $2\theta Tr_H$, где Tr_H — след оператора по пространству H. Функционалу энергии $E(f)$ соответствует функционал

$$E(P) = \|[I \otimes a, P]\|^2_{HS},$$

где $\|S\|^2_{HS} = Tr_{H^n}(S^*S)$ — квадрат нормы Гильберта-Шмидта оператора S (Tr_{H^n} обозначает след по пространству H^n). Экстремали этого функционала (решения грассмановой $U(n)$ сигма-модели) являются некоммутативными аналогами гармонических отображений из $\mathbb{C}P^1$ в $Gr_k(\mathbb{C}^n)$.

В диссертации изучается только некоммутативная грассманова $U(1)$ сигма-модель. Эта модель представляет физический интерес, несмотря на то, что ее коммутативный аналог тривиален. Она является наиболее доступной для исследования некоммутативной грассмановой сигма-моделью благодаря тому, что определяющий ее оператор $I \otimes a$ (в этом случае совпадающий с a) неприводим.

В приведенных выше работах[2,3,4,5] изучались более общие некоммутативные $U(n)$ сигма-модели, в которых функционал энергии $E(\Phi) = \|[a, \Phi]\|^2_{HS}$ рассматривается на множестве унитарных операторов Φ. Некоммутативные грассмановы $U(n)$ сигма-модели вкладываются в них естественным образом: если P — ортогональный проектор, то $I - 2P$ — унитарный оператор, причем $E(I - 2P) = 4E(P)$.

В работе[4] было показано, что решения некоммутативной $U(1)$ модели имеют целочисленную энергию. Там же были описаны решения некоммутативной $U(1)$ модели с малыми значениями энергии. Одним из результатов главы 1 диссертации является описание всех решений грассмановой $U(1)$ сигма-модели ранга 1. (Этот результат не покрывается работой[4], поскольку решения модели ранга 1 могут иметь сколь угодно большую энергию.)

В работе[3] изучались так называемые диагональные решения некоммутативной $U(1)$ сигма-модели, которые определяются следующим образом. В гильбертовом пространстве H можно ввести канонический ортонормированный базис $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$, порождаемый операторами a и a^*. Именно, вектор e_0 этого базиса выделяется условием $ae_0 = 0$, а вектора e_n совпадают с точностью до нормировки с векторами $(a^*)^n e_0$. Диагональные решения некоммутативной $U(1)$ сигма-модели имеют вид $I - 2P$, где P — проектор на линейную оболочку конечного набора векторов из канонического базиса. Все операторы такого типа действительно являются решениями некоммутативной $U(1)$ сигма-модели. В работе[3] исследован гессиан функционала энергии некоммутативной $U(1)$ сигма-модели в точках, являющихся диагональными решениями

ниями. Доказано[3], что в этих точках он обязательно имеет отрицательное собственное значение.

В разделе 1.3 главы 1 диссертации мы исследуем гессиан функционала энергии для более узкой некоммутативной *грассмановой* $U(1)$ сигма-модели в точках, являющихся диагональными решениями (то есть в точках, отвечающих проекторам на линейную оболочку конечного набора векторов из канонического базиса). Доказано, что он также имеет отрицательное собственное значение во всех точках, кроме тех, которые отвечают проекторам на линейную оболочку первых $n+1$ векторов $e_0, e_1, \ldots, e_n$. Проекторы последнего типа являются локальными минимумами энергии благодаря тому, что их образ инвариантен относительно оператора a. Проекторы, обладающие последним свойством, принято называть BPS-решениями.

Далее изучается функционал энергии $E(P)$ на проекторах с бесконечномерными образом и ядром. Для таких проекторов приобретает важное значение исследование плотности области определения оператора $[a, P]$ (это свойство проектора P называется его допустимостью) и конечности энергии проектора P. Одной из наиболее интересных нерешенных задач в этом направлении является следующая: существуют ли проекторы указанного типа, имеющие конечную энергию? Предполагается[4], что ответ на этот вопрос отрицательный. Поскольку[3] BPS-решения с конечномерным образом являются абсолютными минимумами энергии на классе проекторов данного ранга, кажется разумным искать пример проектора конечной энергии с бесконечномерными образом и ядром именно среди BPS-решений. В диссертации построен целый класс (допустимых) BPS-решений, имеющих бесконечномерные образ и ядро (первый пример такого рода был построен в работе автора [1]). Энергия построенных проекторов (в тех случаях, когда удается ее вычислить) оказывается бесконечной, что свидетельствует в пользу отрицательного ответа на поставленный выше вопрос. Заметим, что построенные в диссертации BPS-решения с бесконечной энергией можно рассматривать как некоммутативные аналоги антиголоморфных отображений из комплексной плоскости $\mathbb{C}$ в грассманиан, не продолжающихся на всю риманову сферу $\mathbb{C}P^1$.

Вторая глава диссертации посвящена изучению вопроса о существовании локально голоморфных решений некоторых интегрируемых эволюционных уравнений параболического типа. Среди этих уравнений содержатся такие хорошо известные уравнения математической физики, как уравнение Кортевега-де Фриза (КдФ)

$$u_t + 6uu_x - u_{xxx} = 0, \tag{1}$$

модифицированное уравнение Кортевега-де Фриза (мКдФ)

$$u_t + 6u^2u_x - u_{xxx} = 0, \tag{2}$$

и нелинейное уравнение Шредингера (НУШ)

$$iu_t + u_{xx} - 2u|u|^2 = 0, \tag{3}$$

в котором $|u(x,t)|^2 = u(x,t)\overline{u(\bar{x},\bar{t})}$.

Введем интересующий нас класс эволюционных уравнений (его подробное описание дано в[7].) Фиксируем точку $x_0 \in \mathbb{C}$ и обозначим через $\mathcal{O}(x_0)$ пространство голоморфных ростков $gl(n,\mathbb{C})$-значных функций в точке x_0, а через $\mathcal{O}(x_0)^{od}$ — пространство голоморфных ростков внедиагональных $gl(n,\mathbb{C})$-значных функций в точке x_0. Будем называть *матричным дифференциальным полиномом* отображение $F : \mathcal{O}(x_0) \to \mathcal{O}(x_0)$ такое, что для любого $\kappa \in \mathcal{O}(x_0)$ каждый элемент матрицы $F(\kappa)$ есть полином от элементов матрицы κ и их производных (один и тот же для всех κ). Пусть a и b — диагональные комплексные $n \times n$ матрицы, причем $a_{ii} \neq a_{jj}$ и $b_{ii} \neq b_{jj}$ для $i \neq j$. Тогда существует[8] единственная последовательность матричных дифференциальных полиномов $F_k : \mathcal{O}(x_0) \to \mathcal{O}(x_0)$, $k = 0, 1, \ldots$ такая, что формальный степенной ряд $F(\kappa, z) := \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{F_k(\kappa)}{z^k}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\partial_x F(\kappa, z) = [az + \kappa, F(\kappa, z)]$$

тождественно по $\kappa \in \mathcal{O}(x_0)^{od}$ и по z, и выполнены начальные условия: $F_0(\kappa) \equiv b$, $F_k(0) \equiv 0$ для $k \geqslant 1$. Уравнение

$$q_t = [a, F_{m+1}(q)] \tag{4}$$

называется m-м *потоком иерархии*, задаваемой матрицами a и b. Здесь $q(x,t)$ — искомая внедиагональная голоморфная функция в окрестности точки $(x_0, t_0) \in \mathbb{C}^2$, а матричный дифференциальный полином F_{m+1} действует по переменной x.

Уравнения (4) для всевозможных матриц a и b являются комплексифицированными формами интегрируемых эволюционных уравнений интересующего нас класса. Для получения вещественных форм указанных уравнений требуется наложить на компоненты матрицы q дополнительные условия симметрии[7, 9]. В диссертации изучаются только иерархии, задаваемые 2×2-матрицами (заметим, что все физически содержательные примеры относятся к этому классу).

Уравнение (4) можно представить в виде условия нулевой кривизны

$$U_t - V_x + [U, V] = 0$$

---

[7] В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский. Теория солитонов. Метод обратной задачи // Наука, М., 1980.

[8] А. В. Домрин. Замечания о локальном варианте метода обратной задачи рассеяния // Труды МИАН т.253, 2006, стр.46-60.

[9] C.-L. Terng and K. Uhlenbeck. Bäcklund transformations and loop group actions // Comm. Pure Appl. Math. v.53, 2000, pp.1-75.

для связности $U(x,t,z)dx+V(x,t,z)dt$, где

$$U(x,t,z)=az+q(x,t),\quad V(x,t,z)=\sum_{j=0}^{\infty}F_{m-j}(q(x,t))z^j.$$

Уравнения, представимые в таком виде, подробно изучались с помощью метода обратной задачи рассеяния[7, 10, 11]. Локальный вариант этого метода был предложен В.Е.Захаровым и А.Б.Шабатом[10]. Позднее этот вариант метода обратной задачи был применен А.В.Домриным[8, 12] для исследования локальной голоморфной задачи Коши для уравнения (4). В частности, в[12] был получен критерий разрешимости локальной голоморфной задачи Коши для этого уравнения, который формулируется ниже. Сначала приведем необходимые определения.

Определение 1. Фиксируем диагональную комплексную $n\times n$ матрицу a такую, что $a_{ii}\neq a_{jj}$ для $i\neq j$. Пусть $q_0\in\mathcal{O}(x_0)^{od}$. Тогда среди формальных степенных рядов вида

$$m(x,z)=I+\sum_{s=1}^{\infty}m_s(x)z^{-s},$$

где $m_s(x)\in\mathcal{O}(x_0)$, существует[12] единственный ряд $m(x,z)$, удовлетворяющий уравнению

$$m_x(x,z)=(az+q_0(x))m(x,z)-m(x,z)az,$$

в котором все матрицы $m_s(x_0)$ внедиагональны. Формальный степенной ряд $Lq_0(z):=m(x_0,z)-I$ называется *локальными данными рассеяния* для потенциала q_0.

Определение 2. Формальный степенной ряд

$$\sum_{s=1}^{\infty}\frac{c_s}{z^s},\quad c_s\in gl(n,\mathbb{C}),$$

принадлежит *классу Жеврея с показателем* α, обозначаемому Gev_α, если степенной ряд $\sum_{s=0}^{\infty}\dfrac{c_s}{(s!)^\alpha}y^s$ имеет ненулевой радиус сходимости.

Имеет место следующий критерий разрешимости[12] локальной голоморфной задачи Коши для уравнения (4). Фиксируем диагональную матрицу a,

[10] В. Е. Захаров, А. Б. Шабат. Интегрирование нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния. II // Функц. анализ и его приложения, т.13, вып.3, 1979, стр.13-22.

[11] Л. Д. Фаддеев и Л. А. Тахтаджян. Гамильтонов подход в теории солитонов // Наука, М., 1986

[12] А. В. Домрин. Мероморфное продолжение решений солитонных уравнений // Изв. РАН, Сер. матем. т.74, вып.3, 2010, стр.23-44.

участвующую в определениях иерархии и данных рассеяния. *Задача Коши для уравнения* (4) *при* $m > 1$ *с начальным условием* $q(x, t_0) = q_0(x)$, *где* $q_0(x) \in \mathcal{O}(x_0)^{od}$, *имеет локальное голоморфное решение в окрестности точки* $(x_0, t_0) \in \mathbb{C}^2$ *тогда и только тогда, когда* $Lq_0 \in Gev_{1/m}$. *Если такое решение существует, то оно единственно.*

Приведенный критерий мотивирует вычисление классов Жеврея данных рассеяния для различных потенциалов. Для любого ростка $q_0 \in \mathcal{O}(x_0)^{od}$ его данные рассеяния Lq_0 принадлежат классу Gev_1[8]. В случае верхнетреугольных 2×2-потенциалов $q_0(x) = \begin{pmatrix} 0 & u(x) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ преобразование рассеяния сводится к преобразованию Лапласа функции u. Это позволяет получить следующий критерий: $Lq_0 \in Gev_\alpha$ тогда и только тогда, когда $u(x)$ — целая функция порядка не выше $\dfrac{1}{1-\alpha}$; если порядок $u(x)$ равен в точности $\dfrac{1}{1-\alpha}$, то эта целая функция имеет конечный тип[12]. Однако в случае общих 2×2-потенциалов вопрос о принадлежности их данных рассеяния конкретному классу Gev_α с $\alpha < 1$ является трудной задачей.

Первые два раздела второй главы диссертации посвящены исследованию этого вопроса. Из полученных там результатов выводятся утверждения о неразрешимости локальной голоморфной задачи Коши для уравнений, включенных в иерархии КдФ, мКдФ и НУШ (и, в частности, для самих этих уравнений), с начальными условиями специального вида. В частном случае уравнения КдФ полученный нами результат совпадает с доказанным в[13].

Для разрешимости локальной голоморфной задачи Коши для уравнения (4) с начальным условием $q(x, t_0) = q_0(x)$ необходимо, чтобы данные рассеяния Lq_0 принадлежали какому-нибудь классу Жеврея с показателем, меньшим 1. Для этого росток $q_0(x)$ должен продолжаться до мероморфной функции на $\mathbb{C}$ и являться пикаровским потенциалом[12].

Определение 3. Пусть a_{11}, a_{22} — различные комплексные числа. Следуя работе[14], скажем, что пара $u(x)$, $v(x)$ мероморфных функций на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ задает *пикаровский потенциал* $\begin{pmatrix} 0 & u(x) \\ v(x) & 0 \end{pmatrix}$, если при каждом $z \in \mathbb{C}$ система двух линейных дифференциальных уравнений

$$E_x = \begin{pmatrix} a_{11}z & u(x) \\ v(x) & a_{22}z \end{pmatrix} E$$

имеет фундаментальную систему решений, мероморфную на всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$ переменного x.

[13] N. Joshi, J. A. Petersen, L. M. Schubert. Nonexistence results for the Korteweg-de Vries and Kadomtsev-Petviashvili equations // Studies in Appl. Math., v.105, 2000, pp.361-374.

[14] F. Gesztesy, R. Weikard. Elliptic algebro-geometric solutions of the KdV and AKNS hierarchies — an analytic approach // Bull.AMS т.35, 1998, pp.271-317.

Основной результат работы[14] состоит в том, что пара эллиптических функций с общей решеткой периодов задает пикаровский потенциал тогда и только тогда, когда этот потенциал является стационарным решением некоторого потока иерархии (4). Все это мотивирует более подробное изучение пикаровских потенциалов с тем, чтобы дать их более явное и полное описание. Заметим, что полученное в работе[15] описание пикаровских потенциалов относилось к случаю, когда $v(x) \equiv 1$, а функция $u(x)$ принадлежит одному из следующих классов: 1) эллиптическая; 2) периодическая и ограниченная вблизи концов полосы периодов; 3) рациональная и голоморфная в точке ∞. В этом случае пикаровость потенциала $\begin{pmatrix} 0 & u(x) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ равносильна выполнению для функции $u(x)$ соответствующего варианта условий Калоджеро-Мозера. В последних двух разделах главы 2 получены новые необходимые условия пикаровости 2×2 -потенциалов общего вида.

Цель работы.

Изучение свойств решений и области определения функционала энергии в некоммутативной грассмановой $U(1)$ сигма-модели. Изучение свойств решений локальной голоморфной задачи Коши для интегрируемых эволюционных уравнений параболического типа.

Научная новизна.

В диссертации получены следующие новые результаты:

1. В некоммутативной грассмановой $U(1)$ сигма-модели описаны решения ранга 1 и изучен вопрос их устойчивости. Для этой же модели исследован вопрос устойчивости диагональных решений: доказано, что гессиан функционала энергии на диагональных решениях, не являющихся BPS-решениями, имеет отрицательное собственное значение.

2. Построен класс проекторов с бесконечномерными образом и ядром, являющихся BPS-решениями. Приведено доказательство допустимости этих проекторов. Приведен пример BPS-решения некоммутативной грассмановой $U(1)$ сигма-модели с бесконечной энергией.

3. Получена верхняя оценка показателя класса Жеврея для данных рассеяния полиномиальных 2×2-потенциалов. Получены нижние оценки показателей классов Жеврея для данных рассеяния 2×2-потенциалов

[15] F. Gesztesy, K. Unterkofler, and R. Weikard. An explicit characterization of Calogero-Moser systems // Trans. AMS v.358, 2006, pp.603-656.

с определенными свойствами тейлоровских коэффициентов. Получено необходимое условие пикаровости 2×2-потенциалов общего вида и более сильное условие пикаровости симметрических 2×2-потенциалов.

4. Получены необходимые условия разрешимости локальной голоморфной задачи Коши для модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза и нелинейного уравнения Шредингера.

Основные методы исследования.

Методы исследования, используемые в диссертации, включают в себя методы функционального анализа, комплексного анализа и теории дифференциальных уравнений.

Теоретическая и практическая ценность работы.

Диссертация носит теоретический характер. Полученные в ней результаты могут представлять интерес для специалистов, занимающихся современной теоретической физикой и классическими нелинейными уравнениями математической физики.

Апробация работы.

Результаты диссертации неоднократно докладывались на заседаниях научного семинара по многомерному комплексному анализу им. А.Г.Витушкина под руководством проф. В.К.Белошапки, член-корр. РАН С.Ю.Немировского, проф. А.Г.Сергеева, член-корр. РАН Е.М.Чирки (механико-математический факультет МГУ имени М.В.Ломоносова) в 2006-2009гг.

Результаты диссертации докладывались также на следующих научных конференциях:

- Международная конференция по геометрическим методам в физике (Беловежа, Польша, 2-8 июля 2006г.)

- Второе российско-армянское совещание по математической физике, комплексному анализу и смежным вопросам (Москва, 5-11 октября 2008 г.)

- Летняя школа-конференция по проблемам алгебраической геометрии и комплексного анализа при Ярославском государственном педагогическом университете (Ярославль, 11-16 мая 2009 г.)

- Международная школа-конференция по геометрии и квантованию (Люксембург, 7 - 11 сентября 2009 г.).

Публикации.

Основное содержание диссертации опубликовано в 4 работах автора, 2 работы из перечня ВАК. Список работ приведен в конце автореферата [1]—[4].

Структура и объем диссертации.

Диссертация состоит из введения, 2 глав и списка литературы. Объем диссертации — 75 страниц, библиография включает 26 наименований.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** приводятся основные определения, такие как определения некоммутативной грассмановой $U(1)$ сигма-модели, иерархии эволюционных уравнений, данных рассеяния, классов Жеврея, пикаровости потенциала. Приводится обзор ранее полученных результатов. Формулируются основные результаты диссертации.

В **первой главе** изучается некоммутативная грассманова $U(1)$ сигма-модель.

В разделе 1.1 приводятся необходимые определения и ранее известные факты, относящиеся к некоммутативной грассмановой $U(1)$ сигма-модели. Дается реализация этой модели в пространстве Баргмана-Фока.

В разделе 1.2 изучается функционал энергии на проекторах ранга один. Обозначим через c_λ когерентное состояние — единственный (с точностью до умножения на θ с $|\theta| = 1$) нормированный собственный вектор оператора a, отвечающий собственному значению $\lambda \in \mathbb{C}$. Основной результат раздела формулируется следующим образом.

Теорема 1. *Проектор P с одномерным образом является решением некоммутативной грассмановой $U(1)$ сигма-модели тогда и только тогда, когда его образ является прямой с направляющим вектором $(a^* - \bar{\lambda})^j c_\lambda$ для некоторых $\lambda \in \mathbb{C}$ и $j = 0, 1, \ldots$. Среди них проекторы на когерентные состояния c_λ отвечают (локальным) минимумам функционала энергии, а максимумы отсутствуют.*

В разделе 1.3 изучается гессиан функционала энергии некоммутативной грассмановой $U(1)$ сигма-модели на диагональных решениях. Основным результатом является следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть P_0 – диагональный проектор с конечномерным образом (то есть проектор на линейную оболочку конечного набора векторов канонического базиса). Тогда P_0 является решением некоммутативной грассмановой $U(1)$ сигма-модели.*

Если P_0 есть проектор на линейную оболочку первых $n+1$ векторов $\{e_0, e_1, \ldots, e_n\}$, то P_0 – локальный минимум функционала энергии. В противном случае гессиан функционала энергии в точке P_0 имеет отрицательное собственное значение.

В разделе 1.4 рассматриваются проекторы P_ϕ на подпространство, являющееся ядром оператора $\phi(a)$, где $\phi(z)$ — произвольный экспоненциальный полином. Для этих проекторов доказана следующая теорема.

Теорема 3. *Проектор P_ϕ для произвольного экспоненциального полинома $\phi(z)$ допустим, то есть оператор $[a, P_\phi]$ плотно определен в H.*

Все такие проекторы являются BPS-решениями, то есть их образ инвариантен относительно оператора a, и имеют бесконечномерное ядро. Образ проектора P_ϕ также бесконечномерен, за исключением случая, когда $\phi(z)$ имеет конечное множество нулей. Для одного из таких проекторов, а именно, проектора $P_{\sin \pi z}$ показано, что:

Теорема 4. *Энергия проектора $P_{\sin \pi z}$ бесконечна.*

Тем самым, проектор $P_{\sin \pi z}$ доставляет пример BPS-решения, имеющего бесконечную энергию.

В разделе 1.5 дан обзор открытых вопросов и приводятся комментарии к результатам, полученным в этой главе.

Во **второй главе** диссертации изучается локальная голоморфная задача Коши для интегрируемых эволюционных уравнений параболического типа. Ключевое значение для разрешимости указанной задачи имеет числовое значение показателя Жеврея для данных рассеяния начального условия. Первые два раздела второй главы посвящены оценкам этих показателей. В качестве следствий мы получаем необходимые условия разрешимости локальной голоморфной задачи Коши для уравнений КдФ, мКдФ, НУШ и уравнений, включенных в порождаемые ими иерархии.

В разделе 2.1 получена верхняя оценка на показатель класса Жеврея для данных рассеяния полиномиальных 2×2-потенциалов.

Теорема 5. *Пусть компоненты u, v потенциала $q_0(x) = \begin{pmatrix} 0 & u(x) \\ v(x) & 0 \end{pmatrix}$ являются полиномами степеней k и l соответственно. Тогда данные рассеяния Lq_0 принадлежат классу $Gev_{\frac{k+l}{k+l+2}}$.*

В разделе 2.2 получена нижняя оценка показателя класса Жеврея для данных рассеяния мономиальных 2×2-потенциалов.

Теорема 6. *Пусть*

$$q_0 = \begin{pmatrix} 0 & A(x-x_0)^k \\ B(x-x_0)^l & 0 \end{pmatrix},$$

где $k, l \in \mathbb{N}_0$, а $A, B \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Тогда данные рассеяния Lq_0 не принадлежат никакому классу Gev_α с $\alpha < \dfrac{k+l}{k+l+2}$.

Эта оценка была также независимо получена в работе[16]. Объединяя верхнюю и нижнюю оценки, получаем точную оценку показателя класса Жеврея для данных рассеяния мономиальных потенциалов.

Используя аналогичные методы, в разделе 2.2 доказываются результаты о неразрешимости локальной голоморфной задачи Коши для уравнений (4) с начальными условиями, которые обладают определенными свойствами симметрии и лорановскими коэффициентами специального вида. В частности, приводятся результаты о неразрешимости локальной голоморфной задачи Коши для уравнений, включенных в иерархии КдФ, мКдФ и НУШ, с начальными условиями специального вида (следствия 6, 7, 9).

Следствие 6. *Пусть мероморфная в $\mathbb{C}$ функция $u_0(x)$ имеет в точке $\xi \in \mathbb{C}$ тейлоровское разложение вида*

$$u_0(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-\xi)^n,$$

где $c_n \geqslant 0$ и $c_N > 0$ для некоторого $N \geqslant 2$. Тогда локальная голоморфная задача Коши для уравнения (4) при $m > 2$ в окрестности произвольной точки $(x_0, t_0) \in \mathbb{C}^2$ с начальным условием $q(x, t_0) = \begin{pmatrix} 0 & u_0(x) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ неразрешима. В частности, локальная голоморфная задача Коши для любого нечетного потока иерархии КдФ, кроме первого (и для самого уравнения КдФ (1) при $m = 3$), в окрестности произвольной точки $(x_0, t_0) \in \mathbb{C}^2$ с начальным условием $u(x, t_0) = u_0(x)$ неразрешима.

Следствие 9. *Пусть мероморфная в $\mathbb{C}$ функция $u_0(x)$ имеет в точке $\xi \in \mathbb{R}$ тейлоровское разложение вида*

$$u_0(x) = C\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-\xi)^n,$$

где $C \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $c_n \geqslant 0$ и $c_N > 0$ для некоторого $N \geqslant 2$. Тогда локальная голоморфная задача Коши для уравнения (4) при $m > 1$ в окрестности произвольной точки $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^2$ с начальным условием $q(x, t_0) =$

[16] А. В. Домрин, А. В. Домрина. О расходимости ряда Концевича-Виттена // Успехи матем. наук, т.63, вып. 4, 2008, стр.185-186.

$\begin{pmatrix} 0 & u_0(x) \\ -\overline{u_0(\bar{x})} & 0 \end{pmatrix}$ *неразрешима. В частности, локальная голоморфная задача Коши для любого потока иерархии НУШ, кроме первого (и для самого уравнения НУШ* (3) *при* $m = 2$*), в окрестности произвольной точки* $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^2$ *с начальным условием* $u(x, t_0) = u_0(x)$ *неразрешима.*

Последние два раздела второй главы посвящены изучению свойства пикаровости 2×2-потенциалов. Как уже говорилось, пикаровость начального условия необходима для наличия локально голоморфных решений уравнения (4). В предложении 10 показано, что пикаровость потенциалов не зависит от выбора чисел $a_{11} \neq a_{22}$.

В разделе 2.3 изучается пикаровость 2×2-потенциалов общего вида. В теореме 7 получено необходимое условие пикаровости для произвольного мероморфного потенциала в случае, когда хотя бы одна из задающих его функций $u(x), v(x)$ имеет полюс $x_0 \in \mathbb{C}$.

Теорема 7. *Пусть* a_{11}, a_{22} *— различные комплексные числа, а* $u(x)$, $v(x)$ *— мероморфные функции в окрестности точки* $x_0 \in \mathbb{C}$*, причем хотя бы одна из них имеет в точке* x_0 *полюс порядка* n*. Пусть система*

$$E_x = \begin{pmatrix} a_{11}z & u(x) \\ v(x) & a_{22}z \end{pmatrix} E$$

имеет при каждом $z \in \mathbb{C}$ *мероморфную в окрестности точки* x_0 *фундаментальную систему решений. Тогда произведение* $u(x)v(x)$ *обязательно имеет в точке* x_0 *полюс второго порядка и*

$$u(x)v(x) = \frac{N^2 - (n-1)^2}{4}(x - x_0)^{-2} + O(1)$$

для некоторого $N = n + 1, n + 3, n + 5, \ldots$.

С помощью данной теоремы получается необходимое условие разрешимости нелинейного уравнения Шредингера.

Следствие 12. *Если нелинейное уравнение Шредингера* (3)*, рассматриваемое в окрестности точки* $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^2$*, с начальным условием* $u(x, t_0) = u_0(x)$ *имеет вещественно-аналитическое решение, то функция* $u_0(x)$ *продолжается до мероморфной в* $\mathbb{C}$ *функции, не имеющей полюсов на вещественной оси.*

Необходимое условие пикаровости из теоремы 7 является довольно ограничительным, а в случае мономиальных потенциалов оно становится даже необходимым и достаточным (теорема 8).

В разделе 2.4 изучается пикаровость симметричных потенциалов (для которых $v(x) = u(x)$). Выбор этого условия вещественности приводит к иерархии мКдФ. В теореме 9 получено необходимое условие пикаровости таких потенциалов, которое является более сильным по сравнению с условием из теоремы 7.

Теорема 9. *Пусть a_{11} и a_{22} — различные комплексные числа. Пусть $u(x)$ — мероморфная функция в окрестности точки $x_0 \in \mathbb{C}$, имеющая в этой точке полюс. Предположим, что система*

$$E_x = \begin{pmatrix} a_{11}z & u(x) \\ u(x) & a_{22}z \end{pmatrix} E$$

имеет при каждом $z \in \mathbb{C}$ мероморфную в окрестности точки x_0 фундаментальную систему решений. Тогда $u(x)$ имеет в точке x_0 полюс первого порядка и разложение $u(x)$ в окрестности точки x_0 имеет вид

$$u(x) = \frac{\pm N}{x - x_0} + \sum_{k=0}^{\infty} u_k (x - x_0)^k,$$

где $N \in \mathbb{N}$ и $u_{2k} = 0$ для $k = 0, \dots, N-1$.

Кроме того, в разделе 2.4 получен аналог условий Калоджеро-Мозера для случая симметричных потенциалов (следствие 13).

Благодарности.

Автор выражает глубокую благодарность своим научным руководителям: доктору физико-математических наук, профессору Армену Глебовичу Сергееву за постоянное внимание к работе и кандидату физико-математических наук, доценту Андрею Викторовичу Домрину за постановку задач и постоянное внимание к работе.

Список публикаций по теме диссертации.

[1] А. В. Комлов. Некоммутативная грассманова $U(1)$ сигма-модель и пространство Баргмана-Фока // Теор. и матем. физика. — 2007. — т. 153, №3 — стр. 347-357.

[2] А. В. Комлов. Оценки классов Жеврея данных рассеяния для полиномиальных потенциалов // Успехи матем. наук. — 2008. — т.63, вып. 4 — стр.189-190.

[3] А. В. Комлов. О полюсах пикаровских потенциалов // Труды ММО. — 2010. — т. 71 — стр.271-283.

[4] A. Komlov. Noncommutative Grassmannian $U(1)$ sigma-model and Bargmann-Fock Space // Journal of Geometry and Symmetry in Physics. — 2007. — v. 10 — pp. 73-81.