Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова

Механико-математический факультет

На правах рукописи

УДК 517.988+519.71

Курбацкий Алексей Николаевич

ОСОБЕННОСТИ МНОЖЕСТВА ТРАНЗИТИВНОСТИ

01.01.02 — Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук

Москва, 2010

Работа выполнена на кафедре теории динамических систем Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Закалюкин Владимир Михайлович.
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Давыдов Алексей Александрович, доктор физико-математических наук, доцент Седых Вячеслав Дмитриевич.
Ведущая организация:	Институт программных систем им. А.К. Айламазяна РАН.

Защита диссертации состоится 1 октября 2010 г. в 16 часов 40 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.85 при Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ, механико-математический факультет, ауд. 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 31 августа 2010 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д 501.001.85 при МГУ,
доктор физико-математических наук,
профессор В. Н. Сорокин

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Диссертация посвящена одному из основных актуальных вопросов геометрической теории оптимального управления, представляющих интерес не только в теории, но и в многочисленных практических задачах. Это вопрос об управляемости системы, то есть возможности иметь желаемый процесс или возможности достичь конечного результата с помощью допустимых управлений. Такое исследование, как правило, предшествует задаче нахождения оптимального управления. В частности, многочисленные публикации посвящены различным случаям необходимых и достаточных условий локальной управляемости систем, то есть существованию управления, при котором за малое время система переходит из некоторого начального состояния в близкое конечное. Подобными вопросами занимались как классики теории динамических систем и оптимального управления Андронов А. А., Понтрягин Л. С., так и современные известные математики Мышкис А. Д., Аграчев А. А., Сарычев А. В., Давыдов А. А. и другие. В книге Давыдова "Качественная теория управляемых систем" [1], вышедшей в 1994 году, изучались типичные особенности множества управляемости и различные смежные вопросы. По-видимому, это первая книга посвященная связи теории управления с теорией особенностей, основы которой заложил В. И. Арнольд.

Управляемая система на многообразии M задается системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x, u),$$

где $x \in M$, управление u принадлежит некоторому подмножеству $B \subset \mathbb{R}^k$, и $f(x, u)$ – гладкое отображение произведения $M \times B$ в пространство TM касательных векторов на M. Другими словами, с геометрической точки зрения управляемая система является семейством индикатрис I_x, представляющих собой для каждой точки x множество допустимых скоростей

$$I_x = \{f(x, \cdot)\}.$$

Подмножество B обычно задается гладкими уравнениями и неравенствами.

Важными понятиями, связанными с локальной управляемостью и рассмотренными в вышеупомянутой книге Давыдова, явились понятия крутого множества, зоны локальной транзитивности и зоны покоя. Крутой об-

[1]Davydov A.A., Qualitative theory of control systems, Translations of Math. Monographs, AMS R.I., 1994, ISBN-0-8212-4590-X.

ластью управляемой системы называлось множество точек фазового пространства, для которых линейная оболочка (положительный конус) индикатрисы не содержит нулевой скорости. Множество локальной транзитивности было впервые введено в работе А. Д. Мышкиса в записках механико-математического факультета Харьковского университета в 1964 году [2]. Зоной локальной транзитивности было названо множество точек, для каждой из которых любая достаточно близкая к ней конечная точка достижима из исходной точки за достаточно короткое время.

Известна теорема о границе (с. 33-34 книги Давыдова):

Граница выпуклой оболочки индикатрисы скоростей в каждой точке границы крутого множества или соответственно зоны транзитивности или зоны покоя содержат нулевую скорость.

Одним из открытых вопросов, сформулированных в книге Давыдова, был вопрос об особенностях границы зон локальной транзитивности на трехмерных многообразиях, решению которого и посвящена настоящая диссертация. Особенности на двумерных многообразиях в книге рассмотрены подробно.

Для полноты изложения в настоящей диссертации приведена полная классификация типичных особенностей зоны локальной транзитивности для двумерных и трехмерных систем.

Во всех определениях зона транзитивности содержит выпуклую оболочку индикатрисы, а как хорошо известно выпуклая оболочка гладкого многообразия не является гладкой. Особенности выпуклых оболочек вложенных подмногообразий сами представляют интерес в выпуклом анализе и т. п. Описание особенностей выпуклых оболочек подмногообразий было начато в 70-е годы в работах Арнольда и его учеников. Были получены особенности кривых, поверхностей, многообразий разных размерностей [3].

Основным методом их изучения явилось применение метода лагранжевых и лежандровых отображений и особенностей семейств функций, зависящих от параметра, также созданной школой Арнольда в 70-е годы. Универсальность этих методов позволила получить особенности функции максимума [4] [5] [6]. Однако на протяжении более 30 лет многообразия с кра-

[2] Мышкис А.Д. О дифференциальных неравенствах с локально ограниченными производными, Зап. мех.-мат. фак. и Харьк. мат. о-ва. 1964. Т. 30. С. 152-163.

[3] Robertson S. A. Stabilization of singularities of convex hulls, Math. USSR sb. 63 499-505, 1989.

[4] Л. Н. Брызгалова, О функциях максимума семейства функций, зависящих от параметров, Функц. анализ и его прил., 12:1 (1978), 66–67.

[5] Л. Н. Брызгалова, Особенности максимума функции, зависящей от параметров, Функц. анализ и его прил., 11:1 (1977), 59–60.

[6] Матов В.И., Особенности функции максимума на многообразии с краем, Труды семинара им. И.

ем выпали из поля зрения авторов. Несмотря на большое количество работ, использующих управления, подчиненные условиям, заданным уравнениями неравенствами, особенности выпуклых оболочек зон транзитивности многообразий с краем явно описаны не были. В настоящей работе актуальный результат, состоящий в классификации типичных особенностей выпуклых оболочек и зон транзитивности для кривых и поверхностей на двумерных и трехмерных многообразиях, наконец получен. Особенности множества транзитивности по существу определяются семейством выпуклых оболочек, зависящим от такого числа параметров какова размерность объемлющего пространства. С первого взгляда задача нахождения особенностей множества транзитивности представляется намного более сложной, чем описание выпуклых оболочек. Видимо, из-за этого до сих пор эта задача, за исключениям случая плоскости, не была решена. Однако, условие принадлежности нулевой скорости границе выпуклой оболочки выделяет только небольшую часть этих особенностей.

В работе исследованы три класса систем.

В первом из них индикатриса I_x в каждой точке является гладкой замкнутой поверхностью.

Во втором I_x является гладкой замкнутой пространственной кривой.

В третьем случае индикатриса I_x является гладким подмногообразием с краем и углами, вложенным в линейное пространство T_xM касательных векторов в каждой точке x. Угол на многообразии – это его подмножество, диффеоморфное координатному углу соответствующего евклидова пространства. Такая система моделирует управления, подчиненные условиям, заданным уравнениями и неравенствами.

Напомним, что допустимым движением называется абсолютно непрерывная кривая $\gamma(t)$ в M, параметризованная некоторым отрезком времени $t \in [0,T]$, скорость $\dot\gamma$ которой в почти каждой точке $m = \gamma(t)$, в которой она определена, принадлежит соответствующему множеству I_m. Допустимому движению отвечает интегрируемая кривая управления $u : [0,T] \to B$. Если при некоторых x индикатриса I_x не выпукла, то применяя кусочно-непрерывные управления, то есть управления с переключениями (bing-bang, можно получить такое же множество допустимых движений системы, как если бы управление было непрерывным, а индикатриса была бы заменена своей выпуклой оболочкой, то есть пересечением всех замкнутых полупространств, содержащих данное множество I_x.

Г. Петровского, (1981), 195-222.

Граница выпуклой оболочки гладкого подмногообразия, вложенного в аффинное пространство, вообще говоря, не является гладкой. В простейших случаях кривых и поверхностей в $\mathbb{R}^3$ их типичные особенности были классифицированы в работах школы В.И.Арнольда [7] [8]. Такие особенности важны в теории дифференциальных уравнений, оптимальном управлении.

Систематическое изучение особенностей выпуклых оболочек подмногообразий различных размерностей вложенных в аффинное пространство было проведено в работах В.Д. Седых [9]. Так в статье 1981 года [10] было получено описание нормальных форм типичных особенностей гладких кривых, вложенных в трехмерное аффинное пространство. В работах 1982 и 1983 года [11], [12] показано, что начиная с размерности $n = 5$ типичные особенности выпуклых оболочек гладких подмногообразий коразмерности $k = 2$ имеют функциональные модули. Получены оценки на количество и структуры функциональных модулей в зависимости от размерности объемлющего пространства и коразмерности k подмногообразия. Еще в одной статье 1983 года [13] развиты методы особенностей преобразования Лежандра для изучения структуры выпуклых оболочек. Наконец, в работе 1988 года [14] изучены стабильные особенности выпуклых оболочек, которые встречаются в пространствах разных размерностей. Рассмотрены страты нормальных форм простейших особенностей подмногообразий коразмерности $k \leqslant 2$ при $n \leqslant 7$.

Классификация особенностей границ выпуклых оболочек кривых и поверхностей с краем или углами до работ автора, по-видимому, не была опубликована. В данной диссертации описаны все возможные типичные особенности выпуклых оболочек вложенных в $\mathbb{R}^3$ подмногообразий с границами и углами.

Как было сказано, особый интерес при изучении общих свойств управ-

[7] Закалюкин В. М., Особенности выпуклых оболочек гладких многообразий, Функциональный анализ и его приложения, Т. 11 (1977), вып. 3, 76-77.

[8] Sedykh V. D. Stabilization of singularities of convex hulls, Math. USSR sb. 63 499-505, 1989.

[9] Седых В. Д., Выпуклые оболочки и преобразование Лежандра, Сибирский математический журнал, т. 24 вып. 6, 122-134, 1983.

[10] Седых В. Д., Строение выпуклой оболочки пространственной кривой, труды семинара им. И. Г. Петровского, вып. 6 1981 г., 239-256.

[11] Седых В. Д., Функциональные модули особенностей выпуклых оболочек многообразий коразмерностей 1 и 2, математический сборник, 119(161) N2(10), 233-247, 1982.

[12] Седых В. Д., Особенности выпуклых оболочек, Сибирский математический журнал, т. 24 вып. 3, 158-175, 1983.

[13] Седых В. Д., Выпуклые оболочки и преобразование Лежандра, Сибирский математический журнал, т. 24 вып. 6, 122-134, 1983.

[14] Седых В. Д., Стабилизация особенностей выпуклых оболочек, математический сборник, 135(177) N4, 514-519, 1988.

ляемой системы представляет собой множество (зона) локальной транзитивности, состоящее из таких точек $m \in M$, что нулевая скорость O принадлежит внутренности выпуклой оболочки соответствующей индикатрисы I_m. В точке m из зоны транзитивности допустимые кривые выходят в любом направлении. Для всякой пары близких точек из множества локальной транзитивности существует достаточно короткая допустимая кривая, соединяющая эти точки. Граница Σ множества локальной транзитивности состоит из точек m в которых O принадлежит границе $H(I_m)$ выпуклой оболочки индикатрисы (см. книгу Давыдова).

В общем положении при бесконечно-гладкой I_m граница выпуклой оболочки $H(I_m)$ не является C^∞—гладкой. Граница Σ множества локальной транзитивности также, вообще говоря, не является гладкой. Она может иметь и более сложные особенности, чем выпуклая оболочка, поскольку при некоторых значениях параметра x особенности выпуклой оболочки перестраиваются.

Цель работы и основные задачи. Основные цели настоящей работы следующие:

– классификация особенностей границы множества транзитивности на двумерных и трехмерных многообразиях в касательном пространстве в каждой точке которых индикатрисы представляют собой гладкие поверхности или гладкие плоские или пространственные кривые.

– описание всех типичных особенностей границы зоны локальной транзитивности для двух и трехмерных управляемых систем общего положения с ограничениями в виде уравнений и неравенств. То есть с индикатрисами, представляющими собой либо простые кривые с концевыми точками, либо поверхности с границами и углами. Под системой общего положения мы понимаем систему из некоторого открытого всюду плотного подмножества пространства управляемых систем, снабженных подходящей топологией, например, C^∞–топологией в случае компактного M.

Итак, мы предполагаем, что индикатриса I_m зависит от двух- или трехмерного параметра m и при каждом значении m является, либо гладкой замкнутой поверхностью, либо гладкой замкнутой кривой, либо гладкой поверхностью с гладкой границей и углами или пространственной кривой с границей (то есть с концевыми точками). Заметим, что полная классификация всех локальных особенностей выпуклых оболочек встречающихся при отдельных значениях параметров в семействах, слишком обширна. Однако, для исследования границы зоны локальной транзитивности нужна только их сравнительно небольшая часть, которая из соображений коразмерности вырождения соответствует дополнительному условию принадлежности начала координат O границе выпуклой оболочки.

Впервые задачу о классификации особенностей границы множества транзитивности поставил А. А. Давыдов.

Методы исследования. В диссертации использованы методы теории особенностей дифференцируемых отображений [15], методы исследования особенностей выпуклых оболочек, разработанные в упомянутых выше работах В. Д. Седых. Методы исследования особенностей двойного преобразования Лежандра [16] [17]. Выпуклая оболочка вложенного многообразия определяется как огибающая опорных гиперповерхностей к подмногообразию. Особенности преобразования Лежандра являются частным случаем особенностей лежандрового отображения, введенного Арнольдом. В 70-е годы эти методы успешно применялись во многих областях: в дифференциальной геометрии, в физике. Нам удалось развить указанные методы в применении к достаточно сложному случаю двойного преобразования Лежандра, послужившего основой доказательства всех основных теорем диссертации. Мы надеемся, что эти методы окажутся полезными в других задачах приложений теории особенностей.

Научная новизна. В диссертации получены следующие основные результаты:

1. Исследованы локальные особенности выпуклых оболочек кривых и поверхностей с краем в двумерном и трехмерном пространствах.

2. Приведена классификация типичных особенностей границы множества локальной транзитивности, указанных с точностью до диффеоморфизма, для управляемых систем в двумерном и трехмерном пространствах.

Теоретическая и практическая ценность. Работа имеет теоретический характер. Результаты диссертации могут найти применения в теории управления, дифференциальных уравнениях, выпуклом анализе.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на семинаре по теории особенностей (МГУ им. М. В. Ломоносова, руководитель

[15]Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн-Заде С.М., Особенности дифференцируемых отображений, Изд.2 М.:МЦНМО, 2004 г., 672 с.

[16]Goryunov V.V., Zakalyukin V.M., Simple symmetric matrix singularities and the subgroups of Weyl groups A,D, E, Moscow Math. Journal, 3(2003), n.2, 507-532.

[17]Горюнов В.В., Закалюкин В.М., Об устойчивости особых лежандровых подмногообразий, "Функц. анализ и его прилож. т.38 (2004), вып. 4, 66-75.

- акад. Арнольд В. И.) (2008 г.), на семинаре по теории динамических систем (МГУ им. М. В. Ломоносова, руководитель - акад. Аносов Д. В.) (2010 г.), на международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам в Суздале (2008 г.), на пятой международной конференции по дифференциальным и функциональным дифференциальным уравнениям в Москве (2008 г.), на семинаре по теории особенностей (Университет города Ливерпуля, Великобритания, руководитель - проф. Горюнов В. В.) (2008 г.), на молодежной конференции "Ломоносов-2009" (2009 г.), на международной конференции по математической теории управления и механике в Суздале (2009 г.).

Публикации. Результаты диссертации были опубликованы в 8 работах, из них 3 из перечня ВАК. Из совместных работ в диссертацию вошли только результаты, принадлежащие лично диссертанту.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, 3 глав, разбитых на параграфы, и списка цитируемой литературы из 33 наименований. Общий объем диссертации – 75 стр.

Краткое содержание работы

В **первой главе** сформулированы все основные результаты диссертации об особенностях границ выпуклых оболочек и зон транзитивности для различных классов систем.

Теорема 1. *Росток во всякой точке границы выпуклой оболочки гладкой плоской кривой общего положения с концевыми точками диффеоморфизмом плоскости приводится либо к ростку гладкой кривой, либо к ростку в нуле графика одной из двух функций* (рис.1)

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{\textit{при}} \quad x \leqslant 0, \\ x^2 & \text{\textit{при}} \quad x > 0; \end{cases} \quad \text{\textit{или}} \quad g(x) = |x|.$$

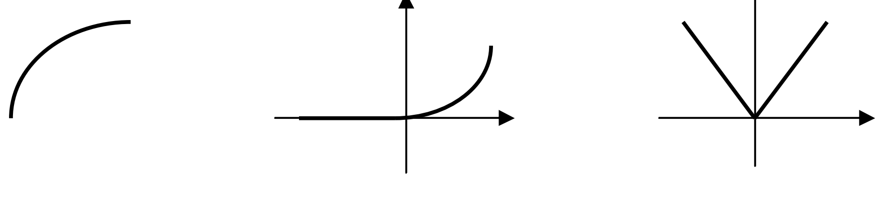

рис. 1

Теорема 2. *Список типичных локальных особенностей границы зоны транзитивности для управляемых систем на двумерном многообразии, индикатрисы которых являются гладкими кривыми с концевыми точками, с точностью до диффеоморфизмов многообразия совпадает со списком теоремы 1.*

Для описания особенностей границ выпуклых оболочек пространственных кривых с концами, введем следующие определения:

Замкнутую выпуклую простую кусочно-гладкую кривую γ , лежащую в плоскости $z = 1$ пространства $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z)\}$ назовем *простой образующей*, если она состоит из перемежающихся отрезков прямых и строго выпуклых дуг, и в их общих точках имеет класс C^1. Кривую γ назовем *образующей с k углами*, если она содержит стороны k углов меньших π, соединенными между собой выпуклыми частями, состоящие из отрезков и дуг, и имеет класс C^1 во всех общих концах гладких частей, за исключением вершин углов. Некоторые стороны могут быть общими для двух углов. Заменив в этом определении одну из прямолинейных сторон угла на дугу выпуклой кривой, получим определение *образующей с k углами и одной особой стороной.*

Коническую поверхность, образованную отрезками, один конец которых находится в начале координат, а другой пробегает либо простую образующую ($k = 0$), либо образующую с $k = 1, 2, \ldots$ углами, одна из сторон которых может быть особой, назовем *k-конусом.*

Заметим, что ростки в начале координат таких конусов имеют функциональные инварианты относительно действия диффеоморфизмов, поскольку касательные векторы в вершине образуют касательный конус, заданный выпуклой кривой на сфере направлений, который подвергается лишь линейным преобразованиям при действии диффеоморфизмов.

Теорема 3. *Росток в любой точке границы выпуклой оболочки связной пространственной кривой общего положения с концевыми точками с помощью диффеоморфизма $\mathbb{R}^3$ приводится к ростку в нуле графика одной из следующих функций $z = f_i(x, y)$, где $i = 1, \ldots, 7$* (рис. 2–4)*:*

$$f_1 = 0 \quad \textit{(росток гладкой поверхности)}; \tag{1}$$

$$f_2(x, y) = |x| \quad \textit{(ребро)}; \tag{2}$$

$$f_3(x,y)=\begin{cases} 0 & \textit{при} \quad x\leqslant 0 \\ x^2 & \textit{при} \quad x>0 \end{cases} \qquad \textit{(сопряжение);} \tag{3}$$

$$f_4(x,y)=\begin{cases} x^2 & \textit{при} \quad y\leqslant x, \quad x\geqslant 0; \\ y^2 & \textit{при} \quad y\geqslant 0, \quad y\geqslant x; \\ 0 & \textit{при} \quad y\leqslant 0, \quad x\leqslant 0; \end{cases} \qquad \textit{(нос);} \tag{4}$$

$$f_5(x,y)=\begin{cases} 0 & \textit{при} \quad y\leqslant 0, \quad x\leqslant 0; \\ x^2 & \textit{при} \quad y\leqslant -x, \quad x\geqslant 0; \\ y^2 & \textit{при} \quad y\geqslant 0, \quad y\leqslant -x; \\ \frac{1}{2}(x^2+y^2)-y-x & \textit{при} \quad x+y\geqslant 0. \end{cases} \qquad \textit{(корма)}; \tag{5}$$

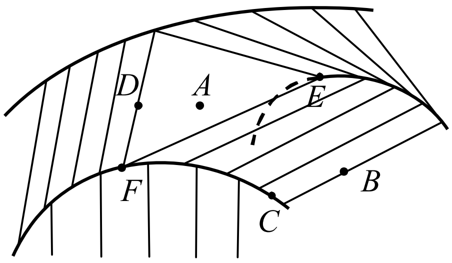

рис.2

$$f_6(x,y)=\min_{z\in\mathbb{R}}\{z^4+xz^2+yz\} \quad \textit{(усеченный ласточкин хвост)} \text{ (рис.3)}; \tag{6}$$

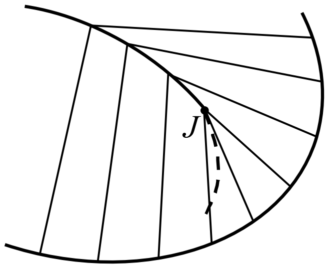

рис.3

$$f_7(x,y)=\begin{cases} y^2+x & \textit{при} \quad x\geqslant 0; \\ y^2 & \textit{при} \quad y\leqslant 0, \quad x\leqslant 0; \\ (1-x)y^2 & \textit{при} \quad y\geqslant 0, \quad x\leqslant 0; \end{cases} \qquad \textit{(изгиб)} \text{ (рис. 4)}; \tag{7}$$

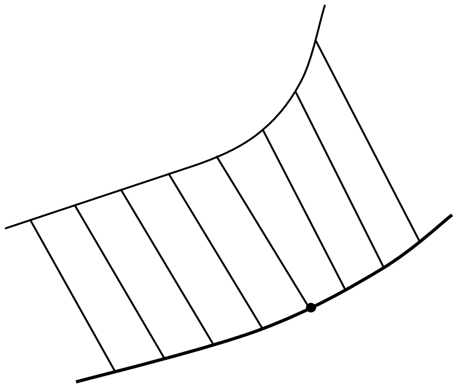

рис.4

либо к ростку в нуле k-конуса при $k = 0, 1, 2$ (рис.5).

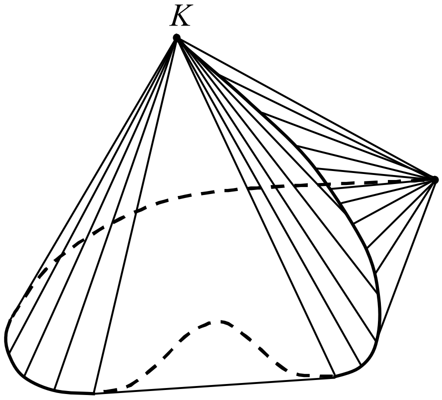

рис.5

Гладкая поверхность (1) может быть либо строго выпуклой, либо развертывающейся (рис. 2, точка B), либо плоской (рис. 2, точка A); "ребро"(2) возникает в типичной точке самой исходной кривой (рис. 2, точка C); особенность 3 появляется, в частности, в точках сопряжения развертывающейся поверхности и части плоскости, (рис. 2, точка D); ростки (4), (5) отвечают вершинам E и F плоских треугольников, возникающих неустранимым образом на границе выпуклой оболочки. Вершина конуса совпадает с концевой точкой (рис. 5, точка K).

Усеченный ласточкин хвост возникает в точке, касательная в которой пересекает кривую еще в одной точке (рис.3, точка J).

Список типичных особенностей границы множества транзитивности управляемой системы на трехмерном многообразии с индикатрисой, являющейся пространственной кривой с концами, дается следующей теоремой:

Теорема 4. *Для семейства общего положения связных пространственных кривых с концевыми точками, зависящего от трех парамет-*

ров, ростки во всякой точке граница Σ множества транзитивности диффеоморфизмом $\mathbb{R}^3$ приводится либо к одному из ростков 1 – 7 поверхностей выпуклых оболочек типичных кривых в $\mathbb{R}^3$, перечисленных в теореме 3, либо к ростку в нуле графика одной из функций

$$f_8(x,y)=\begin{cases} 0 & \textit{при} \quad x\leqslant 0, \quad y\leqslant 0;\\ y^2 & \textit{при} \quad y^2\geqslant x, \quad y\geqslant 0;\\ x & \textit{при} \quad y^2\leqslant x, \quad x\geqslant 0;\end{cases} \quad \textit{(срез)}\ \text{(рис. 6)}; \tag{8}$$

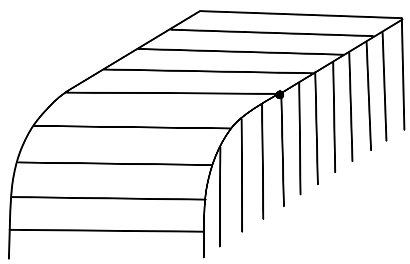

рис.6

$$f_9(x,y)=\begin{cases} 0 & \textit{при} \quad y\leqslant 0, \quad x+\alpha y\leqslant 0;\\ \frac{(x+\alpha y)^2}{1+\alpha^2} & \textit{при} \quad y\leqslant \alpha x, \quad x+\alpha y\geqslant 0, \quad \alpha\neq 0;\\ y^2 & \textit{при} \quad y\geqslant 0, \quad x\leqslant 0;\\ x^2+y^2 & \textit{при} \quad x\geqslant 0, \quad y\geqslant \alpha x.\end{cases} \tag{9}$$

(сопряжение четырех поверхностей – ваза) (рис. 7)*;*

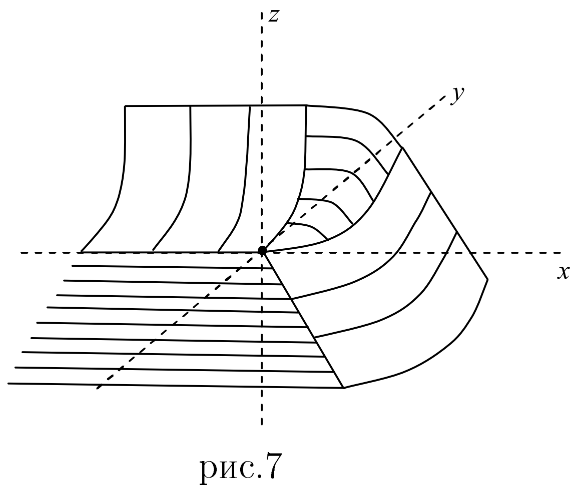

рис.7

$$f_{10}(x,y)=\begin{cases} -y & \textit{при} \quad y\geqslant 0;\\ 0 & \textit{при} \quad y\leqslant 0,\ x\geqslant y;\\ y(x-y)^2 & \textit{при} \quad y\leqslant 0,\ x\leqslant y.\end{cases} \tag{10}$$

(шлем) (рис. 8)*;*

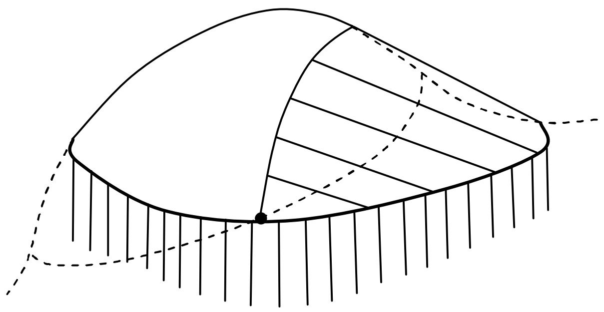

рис. 8

$$f_{11}(x,y) = \begin{cases} |x| & \textit{при} \quad y \geqslant 0; \\ |x| + y^2 & \textit{при} \quad y < 0; \end{cases} \tag{11}$$

(бабочка) (рис.9);

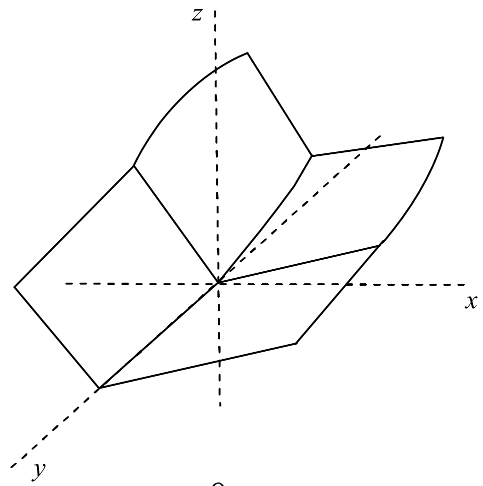

рис.9

либо к ростку в нуле объединения трех поверхностей с краем (рис.10), заданных условиями:

$$\begin{cases} z = 0, \ y \leq 0, \\ y = x^2, \ z \leq -4x^2, \\ z = -t^2, \ y = \frac{1}{4}z + tx, \ 0 \leqslant \dfrac{t}{2x} \leqslant 1. \end{cases} \tag{12}$$

(сопряжение с зонтиком);

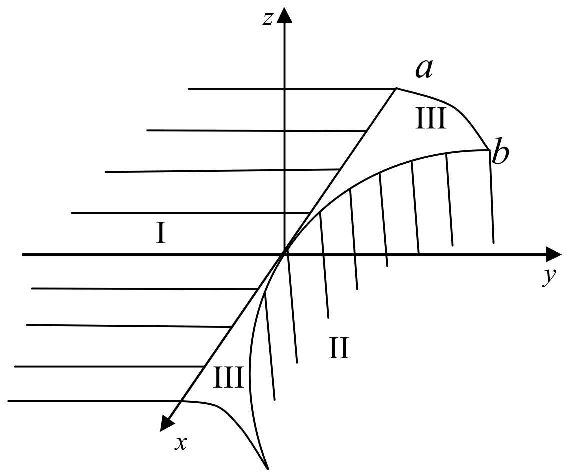

рис.10

либо к ростку в нуле двух поверхностей с общим краем (рис.11), заданных условиями

$$\begin{cases} z = 0 & \textit{при} \quad y, x \geqslant 0 \quad \textit{или} \quad \textit{при}\ x \leq 0, \quad y \geq \frac{1}{4}x^2 \\ z = 2t^3 + xt^2 & \textit{при} \quad 3t^2 + 2tx + y = 0, \quad t \geqslant \max\{0, -\frac{x}{2}\} \end{cases} \tag{13}$$

(тетрадь)

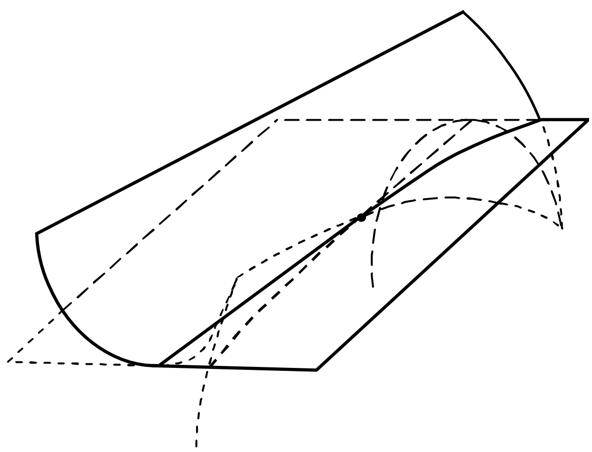

рис. 11

либо к ростку боковой поверхности n-угольной пирамиды в ее вершине (рис 12.) при $n = 3, 4, 5$, то есть к ростку границы области, заданной неравенствами:

$$\begin{array}{ll} x, y, z \geqslant 0 & \text{при} \quad n = 3, \\ x, y, z \geqslant 0, z - x + y \geqslant 0 & \text{при} \quad n = 4, \\ x, y, z \geqslant 0, z - x + y \geqslant 0, z - \alpha x - \beta y \geqslant 0 & \text{при} \quad n = 5 \end{array} \tag{14}$$

(при $n = 5$ нормальная форма имеет два числовых инварианта α и β);

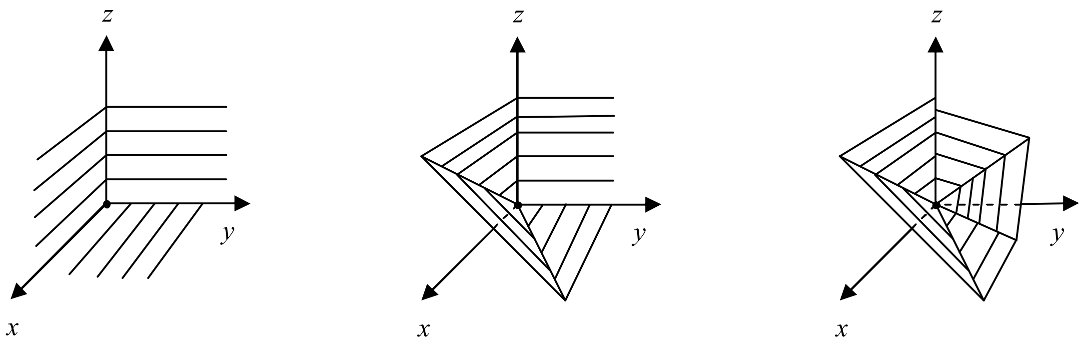

рис.12

либо, наконец, к ростку k-конуса с $k = 0, 1, 2$.

Края a, b поверхностей I и II ростка (12) заданы уравнениями $z = 0$, $y = 0$ и $y = x^2$, $z = -4x^2$. Эти кривые касаются друг друга в единственной общей точке - начале координат. Поверхность III представляет собой часть зонтика Уитни, ограниченного этими же краями и касающегося вдоль них поверхностей I и II (рис. 10).

Теорема 5. *Список типичных особенностей границы выпуклой оболочки гладкой поверхности с гладкой границей в* $\mathbb{R}^3$*, с точностью до диффеоморфизма, состоит из особенностей 1 - 7, 9, 11.*

Теорема 6. *Для семейства общего положения гладких поверхностей с гладким краем, зависящего от трехмерного параметра, список локальных особенностей границы* Σ *множества локальной транзитивности, с точностью до диффеоморфизма* $\mathbb{R}^3$*, состоит из особенностей 1 - 14.*

Теорема 7. *Типичные особенности выпуклых оболочек гладких поверхностей с границей и углами в* $\mathbb{R}^3$ *это либо особенности 1 - 7, 9, 10; либо* k*-конусы с любым* k*.*

Теорема 8. *Для семейства общего положения гладких поверхностей с краем и углами, зависящего от трех параметров* $m = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$*, список локальных особенностей границы зоны локальной транзитивности, с точностью до диффеоморфизма* $\mathbb{R}^3$*, состоит из всех особенностей: 1 - 14 и* k*-конусов с произвольным* $k = 1, 2, \ldots$*.*

Теорема 9. *Для семейства общего положения гладких поверхностей без края в* $\mathbb{R}^3$*, зависящего от параметра* $m = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$*, локальные особенности границы* Σ *множества транзитивности, с точностью до диффеоморфизма* $\mathbb{R}^3$*, следующие: ростки 1 - 6, 9, 12, 14 .*

Замечание. Напомним, что ростки 1 – 3, 9 образуют список нормальных форм типичных особенностей границ выпуклой оболочки поверхности без края.

Теорема 10. *Для семейства общего положения кривых I_m в $\mathbb{R}^2$, зависящих от параметра $m = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, список локальных особенностей границы Σ множества локальной транзитивности, с точностью до диффеоморфизма пространства параметров следующий:*

– росток либо выпуклой кривой, либо прямой;

– росток кривой, который диффеоморфизмом плоскости можно перевести в росток в нуле графика функции $y = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0; \\ x^2 & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

– росток в нуле графика функции $y = -|x|$.

Теорема 11. *Для семейства общего положения кривых $I_m : S^1 \to \mathbb{R}^3$ зависящего от трехмерного параметра $m = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, локальные особенности границы Σ множества транзитивности, с точностью до диффеоморфизма $\mathbb{R}^3$, следующие: ростки 1 - 6, 9, 12, 14.*

Замечание. Напомним, что ростки 1 - 6 образуют полный список нормальных форм ростков границы выпуклой оболочки типичной пространственной кривой без границы.

Во **второй главе** введены основные конструкции и доказаны вспомогательные утверждения.

Третья глава посвящена подробному доказательству всех перечисленных теорем из первой главы.

Благодарности. Автор диссертации выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору Закалюкину Владимиру Михайловичу за постановку задач, постоянное внимание к работе и всяческую поддержку.

Публикации автора по теме диссертации

[1] Курбацкий А. Н. Особенности зоны транзитивности поверхностей с краем в $\mathbb{R}^3$, Успехи математических наук, т. 65, вып. 3 (2010), 199-200.

[2] Закалюкин В. М., Курбацкий А. Н. Выпуклые оболочки кривых и поверхностей и особенности зоны транзитивности в $\mathbb{R}^3$, Труды МИАН им В. А. Стеклова т. 268 (2010), 284-303.

[3] Закалюкин В. М., Курбацкий А. Н. Особенности огибающих семейств плоскостей в теории управления, Труды МИАН им В. А. Стеклова т. 262 (2008), 73-86.

[4] Закалюкин В. М., Курбацкий А. Н. Выпуклые оболочки кривых и особенности множества транзитивности в $\mathbb{R}^3$, Современные проблемы математики и механики, издательство МГУ, т. 4, вып. 2 (2009), 3-23.

[5] Курбацкий А. Н. Особенности огибающих бикасательных к кривым в $\mathbb{R}^3$, Тезисы докладов международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам, Суздаль, издательство Владимирского государственного университета (2008), 151-153.

[6] Закалюкин В. М., Курбацкий А. Н. Особенности множества транзитивности в $\mathbb{R}^3$, Тезисы докладов пятой международной конференции по дифференциальным и функциональным дифференциальным уравнениям, Москва, (2008), 80-81.

[7] Курбацкий А. Н. Выпуклые оболочки кривых и особенности множества транзитивности, Тезисы докладов секции "Математика и механика"международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых ”Ломоносов-2009”, М.: Механико-математический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова, (2009), 37.

[8] Закалюкин В. М., Курбацкий А. Н. Особенности зоны транзитивности поверхностей с краем в $\mathbb{R}^3$, Тезисы докладов международной конференции по математической теории управления и механике, Москва, издательство МИАН (2009), 166-167.

В работах 2, 3, 4, 6, 8 Закалюкину В. М. принадлежит постановка задача и описание общих методов исследования. Формулировки теорем и их доказательства принадлежат Курбацкому А. Н.