МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ им. М. В. ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет

На правах рукописи

УДК 512.772.1

**КУСТАРЕВ Андрей Александрович**

# ИНВАРИАНТНЫЕ ПОЧТИ КОМПЛЕКСНЫЕ СТРУКТУРЫ НА КВАЗИТОРИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЯХ

Специальность 01.01.04 – геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

**Москва 2010**

Работа выполнена на кафедре высшей геометрии и топологии Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова

| | |
|---|---|
| Научные руководители: | член-корреспондент РАН,<br>профессор Бухштабер Виктор Матвеевич,<br><br>доктор физико-математических наук,<br>доцент Панов Тарас Евгеньевич |
| Официальные оппоненты: | доктор физико-математических наук<br>Ландо Сергей Константинович<br><br>кандидат физико-математических наук<br>Дужин Сергей Васильевич |
| Ведущая организация: | Институт математики<br>им. С. Л. Соболева СО РАН |

Защита диссертации состоится 1 октября 2010 года в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 при Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, МГУ имени М. В. Ломоносова, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 1 сентября 2009 года.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д.501.001.84 при МГУ,
доктор физико-математических наук,
профессор

А. О. Иванов

# Общая характеристика работы

**Актуальность темы.**

Тема настоящей диссертации – инвариантные почти комплексные структуры на квазиторических многообразиях. Мы исследуем вопросы существования, единственности и эквивалентности таких структур, а также характеризацию этих структур в терминах комбинаторных данных квазиторического многообразия.

Квазиторические многообразия – один из основных объектов торической топологии, области математики, возникшей за последние 20 лет на стыке таких классических областей, как эквивариантная алгебраическая топология, симплектическая и алгебраическая геометрия и комбинаторика. Ключевой в создании торической топологии явилась статья Дэвиса и Янушкиевича [1]. В этой работе был построен топологический аналог торического многообразия – центрального объекта торической геометрии. Новые объекты вошли в литературу под именем «квазиторических многообразий». Оказалось, что квазиторические многообразия наследуют фундаментальные свойства теории проективных торических многообразий, такие как комбинаторное описание кольца когомологий, стратификация по орбитам действия тора.

В работе [2] был описан комбинаторный язык, позволивший описать все топологические свойства и характеристики квазиторических многообразий в терминах чисто комбинаторных данных – простого многогранника и целочисленной характеристической функции. Это сделало возможным конструктивное построение в терминах комбинаторных данных канонической инвариантной гладкой структуры и канонической стабильно комплексной структуры на квазиторическом многообразии.

Известная задача о том, когда стабильно комплексная структура на многообразии эквивалентна почти комплексной, была решена в работе [3]. Критерий таков: условие $\big(c_n(M^{2n}),[M^{2n}]\big) = \chi(M^{2n})$, необходимое для того, чтобы стабильно комплексная структура была почти комплексной, является также и достаточным.

Задачи существования стабильно комплексных и почти комплексных структур на многообразиях важны, поскольку напрямую связаны с задачей существованием комплексных и симплектических структур на многообразии. Рассматриваемая задача находится в ведении алгебраической топологии, в то время как вопросы об интегрируемости почти комплексной структуры или эквивалентности симплектической структуре относятся к дифференциальной геометрии и анализу. К примеру, до сих пор остается открытой проблема о существовании комплексной структуры на шестимерной сфере. Известно лишь, что для ортогональной комплексной структуры ответ отрицательный [4].

Для существования симплектических структур на открытых многообразиях, согласно $h$-принципу Громова, достаточно существования почти комплексной структуры. [5] На компактных многообразиях задача становится гораздо сложнее. Для компактных многообразий размерности $2n > 4$ пока не известно ни одного препятствия к существованию симплектических структур, кроме топологических.

[1] Michael W. Davis and Tadeusz Januszkiewicz. Convex polytopes, Coxeter orbifolds and torus actions. Duke Math. J., 62 (1991), no. 2, 417-451.

[2] Victor M. Buchstaber, Taras E. Panov and Nigel Ray. Spaces of polytopes and cobordism of quasitoric manifolds. Moscow Math. J. 7 (2007), nu. 2, 219-242.

[3] Emery Thomas. Complex structures on real vector bundles. Amer. J. Math. 89 (1967), 887-908

[4] Claude LeBrun. Orthogonal complex structures on $S^6$ Proc. of the American Mathematical Society, Vol. 101 (1987), nu. 1

[5] М. Л. Громов. Стабильные отображения слоений в многообразия. Изв. АН СССР. Сер. матем. 1969. Т.33. С. 707-734.

В размерности 4 имеется теорема Таубса [6], использующая технику инвариантов Зайберга-Виттена. Согласно ей, связная сумма двух четырехмерных компактных многообразий с $b_2^+ > 0$ не имеет нетривиальных инвариантов Зайберга-Виттена и тем самым не может обладать симплектической структурой.

Одним из наиболее известных результатов, касающихся инвариантных симплектических структур является теорема Дельзана [7], согласно которой любое симплектическое многообразие с гамильтоновым действием тора половинной размерности является торическим. Имеется ряд результатов о симплектических действиях окружности на многообразиях [8] [9] [10].

**Цель работы.** Исследование вопросов существования, единственности и эквивалентности инвариантных почти комплексных структур на квазиторических многообразиях, а также зависимости этих структур от комбинаторных данных квазиторического многообразия.

**Научная новизна.** Результаты диссертации являются новыми.

Основные результаты диссертации:

1. Получен критерий эквивалентности канонической стабильно комплексной структуры на квазиторическом многообразии $M^{2n}$ некоторой $T^n$-инвариантной почти комплексной структуре. Тем самым, дан ответ на вопрос, поставленный в классической работе Дэвиса и Янушкиевича [11] о комбинаторном критерии существования инвариантной почти комплексной структуры. Результат является следствием двух основных теорем работы. Первая теорема – существование инвариантной почти комплексной структуры на квазиторическом многообразии с положительной полиориентацией. Вторая теорема – эквивалентность двух инвариантных стабильно комплексных структур с данной полиориентацией.

2. Получена оценка на число инвариантных почти комплексных структур на квазиторическом многообразии $M^{2n}$. Это число не превосходит $2^n$. Структуры считаются эквивалентными, если соответствующие им отображения $M^{2n} \to BU(n)$ гомотопны. С помощью комплексной $K$-теории устанавливается, что число структур не превосходит число положительных полиориентаций. Число положительных полиориентаций, в свою очередь, является инвариантом многогранника $P$ (пространства орбит действия) и может быть оценено с помощью комбинаторных методов.

3. Получены структурные теоремы, описывающие множества классов инвариантных почти комплексных структур с точностью до эквивариантной и неэквивариантной эквивалентности соответственно. Показано, что для существования эквивариантной гомотопии между двумя структурами

[6] C. H. Taubes. The Seiberg-Witten invariants, symplectic forms. Math. Res. Lett. 1994. V. 1. P. 809-822

[7] D. Delzant. Hamiltoniens periodiques et images convexes de l'application moment. Bull. Soc. math, France, 116 (1988), 315-339

[8] A. Hattori. $S^1$-actions on unitary manifolds and quasi-ample line bundles. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 31 (1985), 433-486

[9] D. McDuff. The moment map for circle actions on symplectic manifolds, Journal of geometry and physics 5 (1988), 149-160

[10] K.E.Feldman. Hirzebruch genera of manifolds equipped with a Hamiltonian circle action. arXiv:math/0110028v2

[11] Michael W. Davis and Tadeusz Januszkiewicz. Convex polytopes, Coxeter orbifolds and torus actions. Duke Math. J., 62 (1991), no. 2, 417-451.

достаточно совпадения этих структур на прообразе двумерного остова многогранника.

**Методы исследования.** В работе используются методы классической алгебраической топологии и теории препятствий, адаптированные к эквивариантной ситуации торических действий. Важную роль играют методы торической топологии, развитые в работе Бухштабера, Панова и Рэя [12]. Конструкции, используемые в диссертации, опираются на методы симплектической и алгебраической геометрии, геометрии выпуклых многогранников и комбинаторики.

**Теоретическая и практическая ценность.** Работа носит теоретический характер. Результаты и методы диссертации могут найти применение в комбинаторике, алгебраической и торической топологии, комплексной дифференциальной геометрии.

**Апробация диссертации.** Результаты диссертации докладывались:

- Неоднократно (2008-2010 гг.) на семинаре им. М. М. Постникова «Алгебраическая топология» кафедры высшей геометрии и топологии МГУ; руководители чл.-корр. РАН, проф. В. М. Бухштабер и проф., д.ф.-м.н. А. В. Чернавский.

- На научно-исследовательском семинаре «Топологические инварианты особенностей» кафедры высшей геометрии и топологии МГУ; руководитель проф., д.ф.-м.н. С. М. Гусейн-Заде, в марте 2010 года.

- На научном семинаре «Характеристические классы в теории пересечений», НМУ, МЦНМО, руководители – д.ф.-м.н. С. К. Ландо и д.ф.-м.н. М.Э.Казарян.

- На международной научной конференции «Топология и динамика: мемориал В.А.Рохлина», Институт Леонарда Эйлера, г. Санкт-Петербург, в январе 2010 года.

- На международной научной конференции «Геометрия, топология, алгебра и теория чисел, приложения», МИРАН им. В.А. Стеклова, г. Москва, в августе 2010 года.

- На международной научной конференции «Toric Topology In Manchester», Манчестер, Великобритания, в ноябре 2009 года.

- На международном математическом конгрессе ICM2010, HICC, Хайдарабад, Индия, в августе 2010 года.

**Публикации.** Основные результаты диссертации опубликованы в трех работах автора, список которых приведён в конце автореферата [1-3].

**Структура диссертации.** Диссертация состоит из введения и трех глав. Текст диссертации изложен на 75 страницах. Список литературы содержит 28 наименований.

---

[12] Victor M. Buchstaber, Taras E. Panov and Nigel Ray. Spaces of polytopes and cobordism of quasitoric manifolds. Moscow Math. J. 7 (2007), no. 2, 219-242.

# Содержание работы

Во введении описана история рассматриваемой проблемы, приведён список основных результатов, изложено содержание диссертационной работы и дан список основных обозначений.

Глава 2 содержит основные понятия и факты о торических многообразиях. Торические многообразия как класс алгебраических многообразий впервые возникли в алгебраической геометрии в начале 1970-х годов в связи с задачами эквивариантной компактификации действий алгебраического тора. Геометрия торических многообразий, или "торическая геометрия", очень быстро превратилась в один из самых привлекательных разделов алгебраической геометрии и нашла приложения во многих других областях исследований, которые до этого казались весьма далекими друг от друга. Классическая конструкция торических многообразий приводится в разделе 2.2.1. Отдельно обсуждаются проективные торические многообразия (раздел 2.2.2), происходящие из простых многогранников.

Наряду с классической конструкцией торических многообразий, описанной в разделе 2.2, имеется другая конструкция (Батырева-Кокса), описывающая торические многообразия как факторпространства некоторых открытых подмножеств в $\mathbb{C}^m$ по действию подгрупп алгебраического тора. Версии этой конструкции появлялись в работах различных авторов с начала 1990-х годов. Конструкции Батырева-Кокса посвящен раздел 2.3.

В разделе 2.4 мы излагаем подход к определению гладких торических многообразий на основе метода симплектической редукции (раздел 2.4.1). Этот метод позволяет получать гладкое проективное торическое многообразие $V_P$ как фактор некоторого компактного подмногообразия $\mathcal{Z}_P \subset U(\Sigma_P)$ по свободному действию компактной группы $K$, изоморфной компактному тору размерности $m-n$. Таким образом, в гладком проективном случае вместо факторизации некомпактного множества $U(\Sigma)$ по некомпактной группе $G$ можно рассматривать факторизацию компактного многообразия по компактной группе. Исторически именно метод симплектической редукции послужил мотивацией для введения конструкции из раздела 2.3.

В разделе 2.4.2 более подробно рассматривается структура многообразия уровня для отображения моментов, соответствующего действию группы $K$ на множестве $U(\Sigma_P)$ в случае, когда $\Sigma_P$ – полный неособый веер, определяемый простым многогранником $P$. Это многообразие уровня, называемое момент-угол многообразием, используется в конструкции торических многообразий методом симплектической редукции (раздел 2.4.3). Данная конструкция является известной, однако само момент-угол многообразие до сих пор изучалось довольно мало. Как было отмечено во введении, момент-угол многообразия сами по себе представляют большой интерес, ввиду их обширных взаимосвязей с различными конструкциями из комбинаторной геометрии и гомологической алгебры.

В разделе 2.5 более подробно изучается действие компактного тора $T$, содержащегося в алгебраическом торе $T_{\mathbb{C}}$; полученные результаты будут играть мотивирующую роль для конструкций из следующей главы.

В главе 3 мы осуществляем переход от алгебраических построений торической геометрии к топологической теории действий тора на многообразиях. Основным объектом изучения становится класс компактных $2n$-мерных многообразий с действием $n$-мерного тора $T$, обладающих свойствами, моделирующими действие компактного тора на неособых торических многообразиях.

В работе [13] Дэвис и Янушкиевич использовали топологические свойства действия тора на торическом многообразии для определения нового класса многообразий с действием тора. Эти многообразия, впоследствии названные квазиторическими, можно рассматривать как «топологические аналоги» неособых компактных торических многообразий. Определение и конструкции из работы Дэвиса и Янушкиевича приведены в разделе 3.1.

В разделе 3.2 завершается комбинаторное описание квазиторических многообразий $M$. Характеристические пары $(P, \lambda)$ заменяются на более естественно задаваемые комбинаторные квазиторические пары $(P, \Lambda)$, состоящие из ориентированного простого многогранника и целочисленной матрицы специального вида. По сравнению с характеристической парой, пара $(P, \Lambda)$ несет некоторую дополнительную информацию, которая эквивалентна выбору полиориентации – ориентации для многообразия $M$ и всех его характеристических подмногообразий. Получаемое взаимно однозначное соответствие между комбинаторными квазиторическими парами и классами эквивалентных полиориентированных квазиторических многообразий уточняет результат Дэвиса и Янушкиевича о соответствии квазиторических многообразий и характеристических пар.

В разделе 3.3 приводится явная геометрическая конструкция канонической модели $M(P, \Lambda)$ квазиторического многообразия как фактор-пространства момент-угол многообразия $\mathcal{Z}_P$ по свободному действию тора. Эта конструкция может рассматриваться как обобщение конструкции проективных торических многообразий методом симплектической редукции. Ее достоинством по сравнению с изначальной конструкцией Дэвиса-Янушкиевича является геометричность; благодаря этому мы построим явные канонические инвариантные гладкие структуры на квазиторических многообразиях, а далее опишем инвариантные стабильно комплексные структуры.

В разделе 3.4 приводится несколько эквивалентных определений знака неподвижной точки квазиторического многообразия. Определения и конструкции разделов 3.3 и 3.4 необходимы для работы с квазиторическими многообразиями на нужном уровне – в частности, для корректной формулировки критерия существования инвариантной почти комплексной структуры.

Глава 4 является ядром диссертации: в ней приведены формулировки и доказательства собственно результатов работы.

Основной результат диссертации таков:

**Теорема.** *Каноническая стабильно комплексная структура на квазиторическом многообразии эквивалентна некоторой инвариантной почти комплексной, если и только если соответствующая ей полиориентация положительна.*

Это утверждение, в свою очередь, является следствием теорем 4.1 и 4.2, формулировки которых приведены ниже.

**Теорема 4.1 (существование).** *Квазиторическое многообразие $M$ допускает $T^n$-инвариантную почти комплексную структуру тогда и только тогда, когда оно обладает положительной полиориентацией.*

Утверждение теоремы было ранее получено Н. Э. Добринской для случая $n < 8$

[13] Michael W. Davis and Tadeusz Januszkiewicz. Convex polytopes, Coxeter orbifolds and torus actions. Duke Math. J., 62 (1991), no. 2, 417-451.

иным методом. Существенные результаты были также получены в работе [14].

Теорема 4.1 является решением проблемы, поставленной в упоминавшейся выше работе Дэвиса и Янушкиевича: найти комбинаторный критерий существования инвариантной почти комплексной структуры на квазиторическом многообразии (Prob. 7.6, p. 450).

Схема доказательства теоремы 4.1 следующая. Мы фиксируем на $M$ инвариантную риманову метрику и строим согласованную с этой метрикой $T^n$-инвариантную почти комплексную структуру $J$ по индукции. Через $sk_i(P)$ будем обозначать объединение всех граней размерности $i$ многогранника $P$. Предполагая, что $J$ построена на $\pi^{-1}(sk_{i-1}(P))$ – прообразе $(i-1)$-мерного остова многогранника $P$, мы продолжаем $J$ на $\pi^{-1}(sk_i(P))$. Препятствием к продложению $J$ оказывается клеточная коцепь $\sigma_J^i \in C^i(P, \pi_{i-1}(SO(2i)/U(i)))$. После этого доказываются стандартные для теории препятствий утверждения, что $\sigma_J^i$ – коцикл, и что если $\sigma_J^i = \delta\beta$, то $J$ может быть изменена на прообразе внутренностей $(i-1)$-мерных клеток $P$ и продолжена на $\pi^{-1}(sk_i(P))$.

Приведем последовательность лемм, образующих полное доказательство теоремы 4.1.

**Лемма 4.12** *Если $M_G \subset M$ – квазиторическое подмногообразие, то $\xi_j \perp M_G$ и $\xi_j \perp \xi_k$ при $j \neq k$.*

**Лемма 4.13** *Пусть $J$ – структура на $\pi^{-1}(sk_0(P))$, построенная по некоторой полиориентации $o$. Структура $J$ продолжается на $\pi^{-1}(sk_1(P))$, тогда и только тогда, когда полиориентация $o$ положительна.*

Лемма 4.13 – единственное место в доказательстве, где используется положительность полиориентации. Оказывается, если инвариантная почти комплексная структура построена на прообразе 1-остова многогранника $P$, то ее можно продолжить и на прообраз всего многогранника, но доказать это уже труднее.

Предположим, что структура $J$ задана на $\pi^{-1}(sk_{i-1}(P))$ и попытаемся продолжить ее на прообраз $i$-мерного остова $P$.

Пусть $\iota : P \to M$ – непрерывное вложение многогранника $P$ в $M$, удовлетворяющее условию: $\pi \circ \iota = id$. Вложение $\iota$ строится как композиция $P \to P \times T^n \to M$, где последняя стрелка – отображение факторизации.

Если $V$ – вещественное евклидово пространство четной размерности с фиксированной ориентацией, то через $\mathbb{J}(V)$ будем обозначать пространство всех комплексных структур на $V$, согласованных с метрикой и ориентацией $V$. Для наших приложений будет важен случай $V = \tau(M_G)|_x$, где $G \subset P$ – некоторая грань, а $x \in \iota(G)$. Отметим, что после выбора базиса в $V$ пространство $\mathbb{J}(V)$ естественно отождествляется с $SO(2i)/U(i)$, где $i = \dim G$. В частности, $\mathbb{J}(V)$ всегда односвязно.

Пусть $G \subset P$ – некоторая $i$-мерная грань, $M_G = \pi^{-1}(G)$ – соответствующее квазиторическое подмногообразие.

**Лемма 4.14** *Пространство структур $J$ на $\pi^{-1}(Int\, G)$, согласованных с полиориентацией $o$, гомеоморфно пространству непрерывных отображений* $\mathrm{Map}(Int\, G, \mathbb{J}(\tau(M_G)|_x))$, *где $x \in \iota(Int\, G)$ – произвольная точка.*

---

[14] Mikiya Masuda. Unitary toric manifolds, multi-fans and equivariant index. Tohoku Math. J. 51 (1999), no. 2, 237-265

Фиксируем произвольную точку $x \in \iota(G)$ и тривиализацию расслоения $\tau(M_G)$ над $\iota(G)$. Поскольку структура $J$ уже задана на $\iota(\partial G) \subset \pi^{-1}(sk_{i-1}(P))$, она определяет некоторое непрерывное отображение $f : \partial G \to \mathbb{J}(\tau(M_G)|_x)$. Гомотопический класс сфероида $f$ мы обозначим через $C_G$.

**Лемма 4.15** *Структура $J$, согласованная с $o$, продолжается с $\pi^{-1}(sk_{i-1}(P))$ на $\pi^{-1}(sk_{i-1}(P)) \cup M_G$, если и только если $C_G = 0$ в группе $\pi_{i-1}(\mathbb{J}(\tau(M_G)|_x))$, где $x \in \iota(G)$ – некоторая фиксированная точка.*

Чтобы корректно определить препятствующую коцепь $\sigma_J^i \in C^i(P, \pi_{i-1}(SO(2i)/U(i)))$, нужно доказать три технические леммы.

**Лемма 4.16** *Пусть $\dim G = i$, $j \leqslant 2i-2$, $x \in \iota(G)$, $y \in \iota(P)$. Тогда гомотопические группы $\pi_j(\mathbb{J}(\tau(M_G)|_x))$ и $\pi_j(\mathbb{J}(\tau(M)|_y))$ канонически изоморфны.*

**Лемма 4.17** *Отображение*

$$c_* : \pi_j(SO(2r)/U(r)) \to \pi_j(SO(2r+2)/U(r+1))$$

*является изоморфизмом при $j \leqslant 2r-2$.*

Рассмотрим произвольное вложение двух граней $H \subset L$, размерности которых различаются на единицу и обе не меньше $i$. Пусть $x \in \iota(H)$. Тогда имеется вложение пространств комплексных структур

$$c(H, L) : \mathbb{J}(\tau(M_H)|_x) \to \mathbb{J}(\tau(M_L)|_x),$$

определенное формулой $J \to J \oplus t_{\pi/2}$, где $t_{\pi/2}$ – поворот на угол $\pi/2$ в двумерном ортогональном дополнении $\tau(M_H)|_x^{\perp} \subset \tau(M_L)|_x$. Направление поворота продиктовано коориентацией $\tau(M_H)|_x$ в $\tau(M_L)|_x$.

Если мы фиксируем вещественные базисы в $\tau(M_H)|_x$ и $\tau(M_L)|_x$ так, чтобы один из них являлся частью другого, то $c(H, L)$ превратится в каноническое вложение однородных пространств $c : SO(2r)/U(r) \to SO(2r+2)/U(r+1)$, где $r = \dim H$.

Рассмотрим теперь произвольную цепочку вложений $G = G_0 \subset \ldots \subset G_{n-i} = P$, в которой размерности любых двух соседних граней различаются на единицу. Определим изоформизм $c_*(G, P) : \pi_j(\mathbb{J}(\tau(M_G)|_x)) \to \pi_j(\mathbb{J}(\tau(M)|_x))$ по формуле $c_*(G, P) = c_*(G_{n-i-1}, G_{n-i}) \circ \ldots \circ c_*(G_0, G_1)$.

**Лемма 4.18** *Изоморфизм $c_*(G, P)$ не зависит от выбора цепочки $G = G_0 \subset \ldots \subset G_{n-i} = P$.*

Все сказанное можно суммировать в следующем утверждении.

**Лемма 4.19** *Пусть структура $J$ задана на $\pi^{-1}(sk_{i-1}(P))$ и согласована с $o$. Тогда определена препятствующая коцепь $\sigma_J^i \in C^i(P, \pi_{i-1}(SO(2i)/U(i))$ – функция на $i$-мерных гранях $P$, равная нулю, если и только если $J$ продолжается на $\pi^{-1}(sk_i(P))$ как согласованная с $o$ структура.*

Коцепь $\sigma_J^i$ в общем случае совершенно не обязана быть нулевой, но мы покажем, что структуру $J$ можно соответствующим образом изменить так, чтобы препятствия к ее продолжению исчезли.

**Лемма 4.20** *Предположим, что структура $J$ согласована с $o$ и определена на $\pi^{-1}(sk_{i-1}(P))$, $Q$ – некоторая $(i+1)$-мерная грань $P$. Тогда*

$$\sum_{G\subset\partial Q}\sigma^i_J(G)=0.$$

**Лемма 4.21** *Если структура $J$ согласована с $o$, определена на $\pi^{-1}(sk_{i-1}(P))$ и препятствующая коцепь $\sigma^i_J$ является кограницей, то можно так изменить $J$ на $\pi^{-1}(sk_{i-1}(P))$, не меняя на $\pi^{-1}(sk_{i-2}(P))$, что для новой структуры $J'$ будем иметь $\sigma^i_{J'}=0$.*

Теперь мы можем привести полное доказательство теоремы 4.1. Лемма 4.13 и положительность полиориентации $o$ гарантируют, что продолжение $J$ с $\pi^{-1}(sk_0(P))$ на $\pi^{-1}(sk_1(P))$ возможно. В силу лемм 4.19 и 4.20, при $i>1$ препятствием к продолжению $J$ с $\pi^{-1}(sk_{i-1}(P))$ на $\pi^{-1}(sk_i(P))$ является коцепь $\sigma^i_J\in C^i(P,\pi_{i-1}(SO(2i)/U(i)))$, причем $\partial\sigma^i_J=0$. Так как многогранник $P$ ацикличен как клеточный комплекс, $\sigma^i_J$ является кограницей, и, в силу леммы 4.21, существует $T^n$-инвариантная почти комплексная структура $J'$ на $\pi^{-1}(sk_i(P))$.

Приведем теперь формулировку второй основной теоремы – о стабильной эквивариантной эквивалентности структур.

**Теорема 4.2 (стабильная эквивалентность)**. *Пусть $J_0$ и $J_1$ – две $T^n$-инвариантные комплексные структуры на расслоении $\tau(M)\oplus\mathbb{R}^{2l}$, $l>0$, индуцирующие одну полиориентацию на $M$. Тогда $J_0$ и $J_1$ эквивариантно гомотопны. Иными словами, существует непрерывное по $t$ семейство $J(t)$ инвариантных комплексных структур на $\tau(M)\oplus\mathbb{R}^{2l}$ такое, что $J(0)=J_0$ и $J(1)=J_1$.*

Прокомментируем условие теоремы 4.2. Любая $T^n$-инвариантная комплексная структура $J$ на расслоении $\tau(M)\oplus\mathbb{R}^{2l}$ обязательно индуцирует ориентацию на $M$, так как действие $T^n$ на слагаемом $\mathbb{R}^{2l}$ тривиально и подрасслоение $\tau(M)\subset\tau(M)\oplus\mathbb{R}^{2l}$ $J$-инвариантно. Кроме того, $J$ индуцирует также и ориентацию любого характеристического подмногообразия $\pi^{-1}(F_j)\subset M$, так как $\pi^{-1}(F_j)$ инвариантно относительно действия $T^n$, и следовательно, касательное расслоение $\tau(\pi^{-1}(F_j))\subset\tau(M)|_{\pi^{-1}(F_j)}$ также $J$-инвариантно. Следовательно, $M$ является полиориентированным квазиторическим многообразием.

Доказательство теоремы 4.2 состоит в построении эквивариантной гомотопии между $J_0$ и $J_1$ индукцией по остовам. Аналогично стандартной теории препятствий, мы показываем, что продолжение гомотопии с $\pi^{-1}(sk_{i-1}(P))$ на $\pi^{-1}(sk_i(P))$ равносильно обращению в ноль некоторой различающей коцепи $d^i(J_0,J_1)\in C^i(P,\pi_i(SO(2i)/U(i)))$. Как будет ясно ниже, условие $l>0$ в формулировке теоремы нельзя отбросить. Детали доказательства в многом аналогичны теореме 4.1, поэтому здесь мы их не приводим.

Из доказательств теорем 4.1 и 4.2 следует ряд утверждений о структуре множества $T^n$-инвариантных почти комплексных структур на данном квазиторическом многообразии.

**Следствие 4.4** *Пусть $J_0$ и $J_1$ – две $T^n$-инвариантные почти комплексные структуры на квазиторическом многообразии $M$, согласованные с одной* *полиориентацией $o$. Тогда $J_0$ и $J_1$ гомотопны в классе неинвариантных почти комплексных структур на $M$.*

**Следствие 4.5** *Пусть $J_0$ и $J_1$ – две $T^n$-инвариантные почти комплексные структуры на квазиторическом многообразии $M$, согласованные с одной полиориентацией $o$ и совпадающие на $\pi^{-1}(sk_3(P^n))$. Тогда $J_0$ и $J_1$ гомотопны в классе инвариантных почти комплексных структур на $M$.*

**Следствие 4.6** *Множество структур на $M^{2n}$, рассматриваемых с точностью до эквивариантной гомотопии и согласованных с данной положительной полиориентацией, может быть неканонически отождествлено с $\mathbb{Z}^{f_1(P)-f_0(P)+1}$. Здесь $f_1(P)$ – число ребер, $f_0(P)$ – число вершин многогранника $P$.*

**Следствие 4.7** *На любом квазиторическом многообразии $M^{2n}, n > 1$ с положительной полиориентацией существует бесконечное количество эквивариантно негомотопных друг другу $T^n$-инвариантных почти комплексных структур.*

В частности, уже на многообразии $\mathbb{C}P^2$ имеется бесконечное количество $T^2$-инвариантных почти комплексных структур, между которыми не существует эквивариантной гомотопии.

Раздел 4.5 посвящен исследованию некоторых комбинаторных аспектов, таких, как существование в каждой четной размерности квазиторического многообразия, не допускающего никакой положительной полиориентации (предложение 4.30). Кроме того, мы вводим новый комбинаторный инвариант $i(P)$ многогранника $P$, устанавливаем его простейшие свойства и связь с неэквивариантными классами эквивалентности почти комплексных структур.

В предложении 4.33 мы устанавливаем оценку $i(P) \leqslant n-1$, откуда следует такой результат.

**Теорема 4.8** *Число инвариантных почти комплексных структур на квазиторическом многообразии $M^{2n}$ не превосходит $2^n$.*

В формулировке последней теоремы структуры рассматриваются с точностью до неэквивариантной эквивалентности, т.е. лишь с точностью до гомотопии соответствующих классифицирующих отображений $M^{2n} \to BU(n)$.

В разделе 4.6 приводится краткий обзор задачи Хирцебруха о допустимых значениях чисел Черна для различных классов многообразий – комплексных алгебраических, связных почти комплексных, квазиторических многообразий. Теорема 4.1 позволяет полностью описать характеристические числа почти комплексных квазиторических многообразий в размерности 4 (предложение 4.40).

**Благодарности.**

Автор благодарит своих научных руководителей, члена-корреспондента РАН, профессора Виктора Матвеевича Бухштабера и доктора физико-математических наук, доцента Панова Тараса Евгеньевича, за постановку задачи, внимание и интерес к работе. Автор также благодарит всех сотрудников кафедры высшей геометрии и топологии за творческую атмосферу, которая способствовала научной работе.

# Работы автора по теме диссертации


[1] А. А. Кустарев. Циклы особенностей и характеристические классы в кобордизмах. УМН, 2007, 62:5, 157-158.

[2] А. А. Кустарев. Эквивариантные почти комплексные структуры на квазиторических многообразиях. УМН, 2009, 64:1(385), 153-154.

[3] А. А. Кустарев. Эквивариантные почти комплексные структуры на квазиторических многообразиях Тр. МИАН, 2009, 266, 140-148.