Московский Государственный Университет
имени М. В. Ломоносова

Механико–математический факультет

На правах рукописи
УДК 512.743, 515.745

Аржанцев Иван Владимирович

Вложения однородных пространств и геометрическая теория инвариантов

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико–математических наук

Москва – 2010

Работа выполнена на кафедре высшей алгебры Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научный консультант	—	доктор физико-математических наук, профессор Эрнест Борисович Винберг.
Официальные оппоненты	—	доктор физико-математических наук, профессор Дмитрий Наумович Ахиезер,
		доктор физико-математических наук, профессор Аркадий Львович Онищик,
		доктор физико-математических наук, профессор Александр Николаевич Панов.
Ведущая организация	—	Санкт-Петербургский государственный университет.

Защита диссертации состоится 24 декабря 2010 г. в 16 ч. 45 мин. на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 при Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова по адресу: РФ, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, МГУ, Механико-математический факультет, аудитория 14–08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 24 ноября 2010 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д.501.001.84 при МГУ
доктор физико-математических наук,
профессор А. О. Иванов

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Диссертация посвящена теории алгебраических групп преобразований, теории открытых эквивариантных вложений однородных пространств алгебраических групп и геометрической теории инвариантов. Постановки задач современной теории инвариантов, связанные с нахождением образующих алгебры инвариантов, изучением орбит действия алгебраической группы и их замыканий, классификацией действий того или иного типа, восходят к классическим работам математиков XIX века (Кэли, Сильвестр, Гордан, Гильберт и другие). В то же время исследование геометрии алгебраических многообразий с действием алгебраической группы, построение факторов по таким действиям и конструктивное описание факторпространств мотивировано современными проблемами алгебраической геометрии, теории представлений и математической физики (теория особенностей алгебраических многообразий, построение многообразий модулей, параметризующих классы изоморфизма геометрических объектов, описание и реализация представлений различных алгебраических структур).

Всюду далее основное поле $\mathbb{K}$ предполагается алгебраически замкнутым полем нулевой характеристики. Пусть G — аффинная алгебраическая группа над полем $\mathbb{K}$ и X — алгебраическое многообразие, снабженное регулярным действием $G{\times}X \to X$ группы G. В этом случае будем говорить, что X является G-многообразием. Аффинная алгебраическая группа G называется *редуктивной*, если G не содержит нетривиальных нормальных унипотентных подгрупп или, эквивалентно, каждый рациональный G-модуль вполне приводим.

Пусть H — замкнутая подгруппа аффинной алгебраической группы G. Согласно теореме Шевалле, однородное пространство G/H несет каноническую структуру квазипроективного многообразия, для которой транзитивное действие группы G левыми сдвигами регулярно. Важной задачей является описание геометрии многообразия G/H в терминах теоретико-групповых свойств пары (G,H). Известно, что однородное пространство G/H проективно тогда и только тогда, когда H — параболическая подгруппа в G. Критерий Мацусимы, доказанный независимо Ю. Мацусимой[1] и А.Л. Онищиком[2] в комплексно-аналитической категории, а затем А. Бялыницким-Бирулей в алгебраической ситуации, утверждает, что для редуктивной группы G однородное пространство G/H аффинно тогда и только тогда, когда подгруппа H редуктивна. Позже Д. Луна нашел простое доказательство критерия Мацусимы, основанное на использовании теоремы Морозова-Джекобсона. Конструктивное описание *обозримых* подгрупп H, т.е подгрупп, для которых однородное пространство G/H квазиаффинно, получено А.А. Сухановым[3]. Отметим, что до настоящего времени неизвестны критерий аффинности однородного пространства G/H в случае произвольной группы G, а также теоретико-групповая характеризация *эпиморфных* подгрупп, т.е. подгрупп $H \subseteq G$, для которых каждая регулярная функция на однородном пространстве G/H постоянна. Еще один важный класс подгрупп образуют *подгруппы Гроссханса.* Так называют обозримые подгруппы $H \subseteq G$, для которых алгебра регулярных функций $\mathbb{K}[G/H]$ конечно порождена. В случае редуктивной группы G

[1] Y.Matsushima: Espaces homogénes de Stein des groupes de Lie complexes. Nagoya Math. J. **16** (1960), 205–218.

[2] А.Л.Онищик: Комплексные оболочки компактных однородных пространств. Докл. АН СССР **130:4** (1960), 726–729.

[3] А.А.Суханов: Описание наблюдаемых подгрупп линейных алгебраических групп. Мат. сборник **137:1** (1988), 90–102.

теорема Ф. Гроссханса[4] связывает такие подгруппы с 14-й проблемой Гильберта: для обозримой подгруппы H конечная порожденность алгебры $\mathbb{K}[G/H]$ равносильна конечной порожденности алгебр инвариантов $\mathbb{K}[V]^H$, где V пробегает все конечномерные рациональные G-модули. В настоящее время известно, что подгруппами Гроссханса являются подгруппы из определенных классов (например, редуктивные подгруппы или унипотентные радикалы параболических подгрупп), а также построено несколько серий унипотентных подгрупп, не являющихся подгруппами Гроссханса. Первая серия была получена М. Нагатой и затем усовершенствована Р. Стейнбергом, другая основана на конструкции П. Робертса. Обзор результатов теории алгебраических однородных пространств можно найти в книге Ф. Гроссханса[5].

Важной характеристикой действия является его сложность. Понятие сложности однородного пространства возникло в работе Д. Луны и Т. Вуста[6], а для произвольного действия было введено в работе Э.Б. Винберга[7]. Как показали исследования последующих десятилетий, сложность адекватно отражает степень трудностей, возникающих в классификационных задачах, и играет ключевую роль при изучении геометрии однородного пространства, в теории его эквивариантных открытых вложений, в теории инвариантных гамильтоновых систем на кокасательном расслоении и других областях, связанных с однородными пространствами и действиями.

Напомним определение сложности. Пусть аффинная алгебраическая группа G действует на неприводимом многообразии X, и B — борелевская подгруппа в G. *Сложностью* $c(X) = c_G(X)$ G-многообразия X называют минимальную коразмерность B-орбиты на X для индуцированного B-действия. По теореме Розенлихта сложность действия равна степени трансцендентности поля $\mathbb{K}(X)^B$ рациональных B-инвариантных функций на X. Нормальное G-многообразие X называют *сферическим*, если $c(X) = 0$, или, эквивалентно, на X имеется открытая B-орбита. Однородное пространство G/H редуктивной группы G и подгруппа $H \subseteq G$ называются *сферическими*, если G/H является сферическим относительно действия группы G левыми сдвигами. Теория сферических многообразий является одним из наиболее разработанных разделов теории алгебраических групп преобразований. Ниже мы рассмотрим ее в контексте более общей теории вложений однородных пространств.

Зафиксируем аффинную алгебраическую группу G и ее замкнутую подгруппу H. *Вложением* однородного пространства G/H называется пара (X, x), где X — алгебраическое G-многообразие и $x \in X$ — точка, орбита Gx которой открыта и плотна в X, а стабилизатор G_x совпадает с подгруппой H. Можно сказать, что вложения однородного пространства G/H — это G-многообразия с предписанной открытой G-орбитой. В частности, каждое сферическое многообразие можно рассматривать как вложение некоторого сферического однородного пространства. Исторически теория вложений однородных пространств возникла из задач перечислительной геометрии: число тех или иных геометрических объектов интерпретировалось как индекс пересечения дивизоров на однородном пространстве, и для вычисления такого индекса пространство удобно пополнить и учитывать точки пересечения "на бесконечности". Позже выяснилось, что в терминах вложений можно описывать свойства исходного

[4]F.D.Grosshans: Observable groups and Hilbert's fourteenth problem. Amer. J. Math. **95** (1973), no. 1, 229–253.

[5]F.D.Grosshans: Algebraic Homogeneous Spaces and Invariant Theory. Lecture Notes Math. **1673**, Springer-Verlag, Berlin, 1997.

[6]D.Luna, Th.Vust: Plongements d'espaces homogènes. Comment. Math. Helv. **58** (1983), 186–245.

[7]Э.Б.Винберг: Сложность действий редуктивных групп. Функ. анализ и прил. **20:1** (1986), 1–13.

однородного пространства G/H. Вот замечательный пример: однородное пространство G/H является сферическим тогда и только тогда, когда каждое его вложение содержит конечное число G-орбит. Это утверждение следует из работ нескольких авторов, а именно, Ф. Серведио[8] доказал конечность числа G-орбит на аффинном сферическом многообразии, Д. Луна и Т. Вуст[6] обобщили это на произвольные сферические многообразия, и Д.Н. Ахиезер[9] доказал обратную импликацию. Более общо, сложность произвольного однородного пространства можно охарактеризовать в терминах вложений. По аналогии с работами В.И. Арнольда по теории особенностей, *модальностью* действия связной аффинной алгебраической группы F на многообразии X называют целое неотрицательное число

$$\mathrm{mod}_F(X) = \max_{Y\subseteq X} \min_{y\in Y} \mathrm{codim}_Y Fy,$$

где Y пробегает все F-инвариантные неприводимые подмногообразия в X. Тем самым, модальность действия — это максимальное число параметров в непрерывном семействе орбит на многообразии. В частности, действия модальности нуль — это действия с конечным числом орбит. Э.Б. Винберг[7] показал, что для произвольного многообразия X с действием редуктивной группы G модальность $\mathrm{mod}_B(X)$ совпадает со сложностью действия. В частности, модальность $\mathrm{mod}_G(X)$ вложения (X,x) однородного пространства G/H не превосходит его сложности. С другой стороны, Д.Н. Ахиезер[10] построил проективное вложение произвольного однородного пространства G/H, модальность которого равна $c_G(G/H)$. Итак, сложность однородного пространства редуктивной группы — это максимальное значение модальности по всем его вложениям.

Для сферических однородных пространств построена замечательная теория вложений, см.[6],[11],[12], обобщающая теорию торических многообразий. Здесь вложения задаются так называемыми цветными конусами и веерами. Развивая результаты Д. Луны и Т. Вуста[6], Д.А. Тимашев[13] получил аналогичное (но существенно более сложное) описание вложений однородных пространств сложности один. Однако для однородных пространств сложности $\geqslant 2$ описание всех вложений в рамках теории Луны-Вуста едва ли возможно. Поэтому естественно исследовать специальные классы вложений данного однородного пространства.

Будем называть вложение (X,x) однородного пространства G/H *аффинным*, если X является аффинным многообразием. Нетрудно показать, что однородное пространство допускает аффинное вложение тогда и только тогда, когда оно квазиаффинно. Важным дополнительным средством изучения аффинных вложений по сравнению с проективным случаем является G-модульная структура на алгебре регулярных функций $\mathbb{K}[X]$ и взаимодействие этой структуры с умножением в алгебре. С другой стороны, аффинные вложения можно получать из проективных, переходя от проективного многообразия к конусу над ним. Эти соображения часто используются в диссертации.

---

[8] F.Servedio: Prehomogeneous vector spaces and varieties. Trans. Amer. Math. Soc. **176** (1973), 421-444

[9] Д.Н.Ахиезер: О действиях с конечным числом орбит. Функ. анализ и прил. **19:1** (1985), 1–5.

[10] Д.Н.Ахиезер: О модальности и сложности действий редуктивных групп. УМН **43:2** (1988), 129–130.

[11] F.Knop: The Luna-Vust theory of spherical embeddings. Proc. Hyderabad Conf. on Algebraic Groups (S. Ramanan, ed.), pp. 225–249, Manoj Prakashan, Madras, 1991.

[12] D.A.Timashev: Homogeneous spaces and equivariant embeddings. To appear in Encyclopaedia Math. Sci. **138**, Springer-Verlag, 2010.

[13] Д.А.Тимашев: Классификация G-многообразий сложности 1. Известия РАН, Сер. мат. **61:2** (1997), 127–162.

Насколько нам известно, впервые аффинные вложения однородных пространств аффинных алгебраических групп рассматривались в работе М. Розенлихта [14]. Через несколько лет в работах Г. Хохшильда и Г. Мостова был введен комплексно-аналитический вариант этого понятия. Важными примерами описания всех аффинных вложений данного однородного пространства являются классификация S-многообразий (Э.Б. Винберг и В.Л. Попов[15]) и построенная В.Л. Поповым[16] теория SL(2)-вложений. Активно развивающаяся в последнее время теория аффинных алгебраических моноидов также является частью теории аффинных вложений, так как каждый аффинный моноид с группой обратимых элементов G является аффинным вложением однородного пространства $(G\times G)/G$, и обратно, каждое такое вложение имеет структуру моноида. К теории аффинных вложений следует отнести многочисленные результаты о замыканиях орбит алгебраических групп на аффинных многообразиях. Среди них — критерий Д. Луны[17] замкнутости орбит, который послужил мотивировкой для введения автором в работе [16] понятия *аффинно замкнутого* пространства, т.е. аффинного однородного пространства, которое допускает только тривиальное аффинное вложение. В диссертации мы описываем аффинно замкнутые пространства для произвольной аффинной алгебраической группы и используем это понятие при решении других задач. Среди прочего, мы описываем (совм. с Д.А. Тимашевым) аффинные однородные пространства редуктивной группы, каждое аффинное вложение которых имеет конечное число орбит, и находим максимальное значение модальности по всем аффинным вложениям данного аффинного однородного пространства. Обобщая результат В.Л. Попова[16] о группе эквивариантных автоморфизмов SL(2)-вложения, мы получаем условие разрешимости связной компоненты единицы группы эквивариантных автоморфизмов аффинного вложения.

Пусть H — подгруппа Гроссханса в группе G. Тогда однородное пространство G/H допускает аффинное вложение в спектр $\mathrm{Spec}\,\mathbb{K}[G/H]$ алгебры регулярных функций на пространстве G/H. В работе [10] мы назвали это вложение *каноническим* и обозначили его $\mathrm{CE}(G/H)$. Из результатов Ф. Гроссханса следует, что $\mathrm{CE}(G/H)$ — нормальное аффинное вложение, в котором дополнение к открытой орбите имеет коразмерность $\geqslant 2$. Эти свойства определяют каноническое вложение однозначно, и из существования у однородного пространства G/H аффинного вложения с такими свойствами следует, что H — подгруппа Гроссханса в G. В диссертации каноническое вложение играет ключевую роль: с его помощью мы осуществляем переход от аффинных вложений к вложениям с малой границей.

Мы рассматриваем несколько приложений теории аффинных вложений. Первое относится к классификации алгебр с конечно порожденными инвариантными подалгебрами. Хорошо известно, что каждая подалгебра в алгебре многочленов $\mathbb{K}[x]$ над произвольным полем $\mathbb{K}$ конечно порождена. Нетрудно показать, что это свойство выполнено и в любой конечно порожденной целостной алгебре, размерность Крулля которой равна 1. С другой стороны, в алгебре $\mathbb{K}[x,y]$ легко указать не конечно порожденную мономиальную подалгебру. Используя лемму Нетер о нормализации, можно вложить такую подалгебру в любую алгебру с размерностью Крулля $\geqslant 2$. В диссертации найдены все аффинные G-алгебры, в которых каждая инвариантная

[14]M.Rosenlicht: On quotient varieties and the affine embedding of certain homogeneous spaces. Trans. Amer. Math. Soc. **101** (1961), 211–223.

[15]Э.Б.Винберг, В.Л.Попов: Об одном классе квазиоднородных аффинных многообразий. Изв. АН СССР. Сер. мат. **36:4** (1972), 749–763.

[16]В.Л.Попов: Квазиоднородные аффинные алгебраические многообразия группы SL_2. Изв. АН СССР. Сер. мат. **37:4** (1973), 792–832.

[17]D.Luna: Adhérences d'orbite et invariants. Invent. Math. **29** (1975), 231–238.

подалгебра конечно порождена. Напомним, что *аффинной G-алгеброй* называется конечно порожденная $\mathbb{K}$-алгебра A с заданным действием аффинной алгебраической группы G автоморфизмами, причем это действие определяет на A структуру рационального G-модуля. Оказывается, что помимо одномерных алгебр интересующим нас свойством обладают только алгебры функций на S-многообразиях, определяемых полугруппой ранга один, и алгебры функций на аффинно замкнутых однородных пространствах. Второе приложение касается инвариантных алгебр на однородных пространствах компактных групп Ли. Задача описания инвариантных подалгебр в банаховой алгебре всех непрерывных комплекснозначных функций на однородном пространстве K/L компактной группы Ли K изучалась начиная с 60-х годов XX века методами функционального анализа, см. например[18],[19]. В работах В.М. Гичева и И.А. Латыпова намечен алгебраический подход к решению этой задачи. В диссертации, основываясь на идеях Э.Б. Винберга, мы превращаем этот подход в строго обоснованное соответствие.

Напомним, что действие редуктивной группы на аффинном многообразии называется *стабильным*, если типичная орбита этого действия замкнута[20]. Стабильные действия играют важную роль в геометрической теории инвариантов, поскольку условию стабильности удовлетворяет действие группы на инвариантных аффинных картах множества стабильных точек линеаризованного расслоения. Класс стабильных действий удобен для исследования методами современной теории инвариантов, так как стабильные действия — это действия, для которых слой общего положения морфизма факторизации состоит из одной орбиты. Мы доказываем, что для произвольного действия полупростой группы G на аффинном многообразии X диагональное G-действие на декартовой степени X^m становится стабильным при достаточно больших значениях m. Это подтверждает общий тезис о том, что типичное действие полупростой группы стабильно; в случае линейных действий это следует из критерия стабильности В.Л. Попова[20] и таблиц А.Г. Элашвили. Теорема Д. Луны[21] утверждает, что для любых редуктивных подгрупп F и H редуктивной группы G левое действие подгруппы F на аффинном однородном пространстве G/H стабильно. В диссертации изучается стабильность действия редуктивных подгрупп на аффинных вложениях некоторых неаффинных однородных пространств G/H.

Значительная часть диссертации посвящена геометрической теории инвариантов. Основу этой теории составляет конструкция Д. Мамфорда[22]. Пусть X — нормальное проективной многообразие с действием редуктивной группы G, и L — обильное линейное расслоение на X. Предположим, что расслоение L *G-линеаризовано*, т.е. задано такое регулярное действие группы G на пространстве расслоения L, что проекция $L \to X$ G-эквивариантна и действие линейно на слоях. Линеаризация определяет структуру рационального модуля на пространствах сечений $\Gamma(X, L^{\otimes m})$ тензорных степеней расслоения L. С каждым инвариантным сечением $f \in \Gamma(X, L^{\otimes m})^G$ свяжем открытое аффинное инвариантное подмножество $X_f = \{x \in X; f(x) \neq 0\}$.

[18] R.Gangolli: Invariant function algebras on compact semisimple Lie groups. Bull. Amer. Math. Soc. **71** (1965), 634–637.

[19] J.Wolf: Translation-invariant function algebras on compact groups, Pacif. J. Math. **15** (1965), 1093–1099.

[20] В.Л.Попов: Критерий стабильности действия полупростой группы на факториальном многообразии. Изв. АН СССР. Сер. мат. **34:3** (1970), 523–531.

[21] D.Luna: Sur les orbites fermées des groupes algébriques reductifs. Invent. Math. **16** (1972), 1–5.

[22] D.Mumford, J.Fogarty, F.Kirwan: Geometric invariant theory. Third edition. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete **34**, Springer-Verlag, Berlin, 1994.

Тогда множеством *полустабильных точек* $X^{ss}(L)$ называется объединение подмножеств X_f по всем натуральным m и всем $f \in \Gamma(X, L^{\otimes m})^G$. Множество полустабильных точек допускает фактор $X^{ss}(L) \to X^{ss}(L)//G$, который получен склейкой категорных факторов для аффинных многообразий $X_f \to X_f//G$. Зафиксируем последнее свойство в качестве определения. Пусть U — нормальное алгебраическое многообразие с действием редуктивной группы G. Инвариантный аффинный морфизм $p\colon U \to Y$ в алгебраическое многообразие Y называется *хорошим фактором*, если индуцированный им гомоморфизм пучков алгебр $p^*\colon \mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_U^G$ является изоморфизмом. Термин "good quotient" впервые был использован в работе К.С. Шешадри[23]. Хороший фактор является категорным в категории алгебраических многообразий, поэтому для данного действия может быть не более одного такого фактора, и факторпространство Y принято обозначать $U//G$. Известно, что для фактора Мамфорда $X^{ss}(L) \to X^{ss}(L)//G$ факторпространство $X^{ss}(L)//G$ проективно. Конструкцию Мамфорда можно обобщить на произвольное нормальное G-многообразие X и произвольное G-линеаризованное линейное расслоение L, используя в определении $X^{ss}(L)$ только аффинные открытые подмножества X_f. Здесь факторпространства $X^{ss}(L)//G$ квазипроективны.

Определение хорошего фактора является весьма ограничительным, и далеко не каждое G-многообразие допускает такой фактор. С другой стороны, на данном G-многообразии может быть много инвариантных открытых подмножеств, обладающих хорошим фактором. Такие подмножества принято называть *хорошими G-подмножествами*. Одной из центральных задач геометрической теории инвариантов является задача описания всех хороших G-подмножеств на данном G-многообразии X. Будем говорить, что открытое подмножество V хорошего G-подмножества U *насыщено* в U, если $V = p^{-1}(W)$ для некоторого открытого подмножества $W \subseteq U//G$. Ясно, что при описании хороших G-подмножеств достаточно ограничиться максимальными относительно насыщенных включений. Имеет смысл рассматривать хорошие G-подмножества для конкретных классов факторпространств. Помимо квазипроективных мы рассматриваем более широкий класс *A2-многообразий*, т.е. многообразий, любые две точки которых имеют общую аффинную окрестность. По аналогии с определением квазипроективного многообразия как локально замкнутого подмножества проективного пространства, теорема Я. Влодарчика характеризует A2-многообразия как замкнутые подмногообразия торических многообразий. Максимальные хорошие G-подмножества среди всех хороших G-подмножеств с квазипроективным (соответственно A2-) факторпространством называют *qp-максимальными* (соответственно *$(G,2)$-максимальным*). Известно, что на гладком G-многообразии X каждое qp-максимальное подмножество имеет вид $X^{ss}(L)$ для некоторого линеаризованного линейного расслоения L. Ю. Хаузен[24] доказал, что этот результат справедлив для произвольного нормального G-многообразия, если заменить линеаризованные линейные расслоения на подходящим образом определенные линеаризованные дивизоры Вейля.

Два линеаризованных линейных расслоения L_1 и L_2 на G-многообразии X называются *GIT-эквивалентными*, если $X^{ss}(L_1) = X^{ss}(L_2)$. Как показано в работах[25],[26],[27],

[23]C.S.Seshadri: Quotient spaces modulo reductive algebraic groups. Ann. Math. **95** (1972), 511–556.

[24]J.Hausen: Geometric invariant theory based on Weil divisors. Compos. Math. **140** (2004), no. 6, 1518–1536.

[25]I.V.Dolgachev, Y.Hu: Variation of geometric invariant theory quotients. (With an appendix: "An example of a thick wall" by N.Ressayre). Publ. Math., Inst. Hautes Etud. Sci. **87** (1998), 5–56.

[26]M.Thaddeus: Geometric invariant theory and flips. J. Amer. Math. Soc. **9** (1996), 691–723.

[27]N.Ressayre: The GIT-equivalence for G-line bundles. Geom. Dedicata **81** (2000), no. 1–3, 295–324.

для проективного G-многообразия отношение GIT-эквивалентности определяет на конусе линеаризованных обильных расслоений структуру веера. Будем называть этот веер *GIT-веером.* Для доказательства этого результата и вычисления GIT-веера в указанных работах использовался численный критерий Мамфорда. Например, И.В. Долгачев и Ю. Ху[25] вычислили этим методом GIT-веер для диагонального действия группы $\mathrm{SL}(n)$ на $(\mathbb{P}^{n-1})^m$.

В работе Ф. Берхтольда и Ю. Хаузена[28] в случае действия тора на аффинном многообразии Z был предложен элементарный метод вычисления GIT-веера, который описывает GIT-эквивалентность для различных линеаризаций тривиального линейного расслоения. Здесь GIT-конуса получаются всевозможными пересечениями орбитных конусов. Если Z факториально, то так получаются все qp-максимальные подмножества. В диссертации мы обобщаем этот подход и описываем все qp-максимальные и $(G,2)$-максимальные подмножества на аффинном факториальном многообразии с действием связной редуктивной группы G. Наши результаты включают в себя полученные ранее А. Бялыницким-Бирулей и Й. Свицицкой описания максимальных хороших подмножеств для линейных представлений торов и для действий подторов на торическом многообразии. Следует отметить, что комбинаторное описание максимальных хороших G-подмножеств, факторпространства для которых являются произвольными алгебраическими многообразиями, или, более общо, алгебраическими пространствами, неизвестно. Пример, разобранный в работе[29], показывает, что такое описание едва ли возможно.

Одной из основных идей, использованных в диссертации, является перенос результатов с аффинных на произвольные многообразия с помощью так называемой конструкции Кокса. В известной работе[30] Д. Кокс связал с каждым невырожденным торическим многообразием кольцо многочленов, которое позже стали называть *кольцом Кокса* торического многообразия. Ю. Ху и С. Кил[31] заметили, что кольцо Кокса можно определить для более широкого класса многообразий, и охарактеризовали многообразия с конечно порожденным кольцом Кокса в терминах геометрической теории инвариантов. Грубо говоря, кольцо Кокса нормального многообразия X с конечно порожденной группой классов дивизоров $\mathrm{Cl}\,(X)$ определяется как

$$R(X) := \bigoplus_{D\in \mathrm{Cl}\,(X)} \Gamma(X, \mathcal{O}_X(D)).$$

Формальное определение, особенно в случае наличия кручения в группе $\mathrm{Cl}\,(X)$, требует дополнительных усилий, см.[32],[33] и [4]. Важным свойством кольца Кокса при условии свободности группы $\mathrm{Cl}\,(X)$ является его факториальность[32],[34]. Если в группе $\mathrm{Cl}\,(X)$ есть кручение, мы определяем градуированную версию факториальности и доказываем, что кольцо $R(X)$ ею обладает, а также приводим примеры нефакториальных колец Кокса.

---

[28] F.Berchtold, J.Hausen: GIT-equivalence beyond the ample cone. Michigan Math. J. **54** (2006), 483–515.

[29] J.Święcicka: A combinatorial construction of sets with good quotients by an action of a reductive group. Colloq. Math. **87** (2001), no. 1, 85–102.

[30] D.A.Cox: The homogeneous coordinate ring of a toric variety. J. Alg. Geom. **4** (1995), 17–50.

[31] Y.Hu, S.Keel: Mori dream spaces and GIT. Michigan Math. J. **48** (2000), 331–348.

[32] F.Berchtold, J.Hausen: Homogeneous coordinates for algebraic varieties. J. Algebra **266** (2003), no. 2, 636–670.

[33] J.Hausen: Cox rings and combinatorics II. Mosc. Math. J. **8** (2008), no. 4, 711–757.

[34] E.J.Elizondo, K.Kurano, K.Watanabe: The total coordinate ring of a normal projective variety. J. Algebra **276** (2004), no. 2, 625–637.

Далее будем предполагать, что многообразие X имеет конечно порожденную группу $\mathrm{Cl}\,(X)$ и конечно порожденное кольцо Кокса $R(X)$. *Тотальным координатным пространством* $\overline{X}$ многообразия X называют аффинное (однородно факториальное) многообразие $\mathrm{Spec}\,R(X)$. Определим *квазитор Нерона-Севери* H_X многообразия X как диагонализуемую алгебраическую группу, группа характеров которой отождествлена с $\mathrm{Cl}\,(X)$. Тогда $\mathrm{Cl}\,(X)$-градуировка на $R(X)$ определяет действие квазитора H_X на многообразии $\overline{X}$. Имеется открытое H_X-инвариантное подмножество $\widehat{X} \subseteq \overline{X}$, дополнение к которому имеет коразмерность $\geqslant 2$, и многообразие X реализуется как хороший фактор $\widehat{X}$ по действию квазитора H_X. Морфизм факторизации $q\colon \widehat{X} \to X$ называют *универсальным торсором* или *реализацией Кокса* для многообразия X. Важно отметить, что примеры реализаций Кокса возникали в разных работах до или одновременно с публикацией статьи Д. Кокса. Например, построенная Э.Б. Винбергом[35] обертывающая полугруппа в нашей терминологии является тотальным координатным пространством над чудесной компактификацией полупростой группы присоединенного типа в смысле де Кончини–Прочези.

В работе Ф. Берхтольда и Ю. Хаузена[36] предложен способ кодировать реализацию Кокса многообразия X с помощью комбинаторных данных, связанных с системой образующих факториального кольца $R(X)$. Авторы назвали эти данные *кольцом со связкой* (a bunched ring). Используя кольцо со связкой, можно охарактеризовать многие геометрические свойства исходного многообразия.

Реализация Кокса оказывается удобной для задания многообразий того или иного типа. Например, в работе В.В. Батырева и Ф. Хаддад[37] на этом пути было найдено единообразное описание всех аффинных $\mathrm{SL}(2)$-вложений как факторов четырехмерных гиперповерхностей. Как отмечалось выше, кольцо Кокса торического многообразия является кольцом многочленов, но для неполных многообразий обратное утверждение неверно. Тем не менее, вычисление кольца Кокса часто позволяет найти все торические многообразия в данном классе многообразий, см.[38],[37], [6], [12] и [13].

В диссертации основное применение конструкции Кокса связано с классификацией вложений с малой границей. Будем говорить, что вложение (X, x) однородного пространства G/H имеет *малую границу*[39], если многообразие X нормально и дополнение к открытой G-орбите в X имеет коразмерность $\geqslant 2$. Если H — подгруппа Гроссханса в G, то единственным аффинным вложением с малой границей однородного пространства G/H является его каноническое вложение $\mathrm{CE}(G/H)$. Пример проективного вложения с малой границей определяет диагональное действие группы $\mathrm{SL}(n)$ на $(\mathbb{P}^{n-1})^m$ при $m < n$. Для вложений с малой границей кольцо Кокса $R(X)$ совпадает с кольцом Кокса однородного пространства $R(G/H)$, которое в свою очередь изоморфно $\mathbb{K}[G/H_1]$, где H_1 — пересечение ядер всех характеров подгруппы H. Универсальным торсором является проекция однородных пространств $G/H_1 \to G/H$, и для описания вложений с малой границей и определенными условиями максимальности (проективность, A2-максимальность, 2-полнота) мы используем комбинаторное описание максимальных хороших H_X-подмножеств на аффинном (факториальном)

[35]E.B.Vinberg: On reductive algebraic semigroups. In "Lie Groups and Lie Algebras: E.B.Dynkin Seminar" (S.Gindikin, E. Vinberg Eds.), AMS Transl. **169** (1995), 145–182.

[36]F.Berchtold, J.Hausen: Cox rings and combinatorics. Trans. Amer. Math. Soc. **359** (2007), no. 3, 1205–1252.

[37]V.Batyrev, F.Haddad: On the geometry of SL(2)-equivariant flips. Moscow Math. J. **8** (2008), no. 4, 621–646.

[38]С.А.Гайфуллин: Аффинные торические SL(2)-вложения. Мат. сборник **199:3** (2008), 3–24.

[39]F.Bien, A.Borel: Sous-groupes épimorphiques de groupes linéaires algébriques II. C. R. Acad. Sci. Paris. Série I. **315** (1992), 1341–1346.

многообразии $\mathrm{CE}(G/H_1)$. В частности, мы получаем теорему конечности для таких вложений. Поскольку вложения с малой границей возникают у нас вместе со своей реализацией Кокса, мы можем воспользоваться теорией колец со связками и описать все локально факториальные и $\mathbb{Q}$-факториальные вложения, а также вычислить различные конуса дивизоров на пространстве вложения.

Также реализация Кокса использована в диссертации для описания qp-максимальных и $(G,2)$-максимальных хороших G-подмножеств на произвольном нормальном G-многообразии X со свободной конечно порожденной группой $\mathrm{Cl}\,(X)$ и конечно порожденным кольцом $R(X)$. Для этого устанавливается соответствие между хорошими G-подмножествами на X и хорошими $(G \times H_X)$-подмножествами на $\overline{X}$. В частности, для данного класса многообразий мы получаем положительный ответ на вопрос А. Бялыницкого-Бирули[40] о конечности числа qp-максимальных подмножеств.

Цель работы. Исследование действий аффинных алгебраических групп на алгебраических многообразиях; изучение свойств аффинных вложений однородных пространств; исследование важного инварианта нормального алгебраического многообразия с конечно порожденной группой классов дивизоров – кольца Кокса; применение конструкции Кокса для решения задач теории алгебраических групп преобразований, развитие комбинаторных методов геометрической теории инвариантов применительно к одной из центральных задач этой теории — задаче эффективного описания максимальных открытых подмножеств, допускающих хороший фактор; классификация вложений с малой границей для однородных пространств; изучение геометрии таких вложений и GIT-факторов.

Методы исследования. В работе используются методы современной теории инвариантов, структурная теория и теория представлений аффинных алгебраических групп, методы алгебраической геометрии и коммутативной алгебры, теории групп и алгебр Ли, выпуклой и комбинаторной геометрии, комбинаторные методы геометрической теории инвариантов.

Научная новизна. Результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем.

1. Получена полная классификация аффинных однородных пространств сложности один полупростых алгебраических групп. Этот результат завершает классификацию аффинных однородных пространств редуктивных групп малой сложности и подтверждает предположение, высказанное Э.Б. Винбергом в 1986 г. Классифицированы линейные редуктивные группы со сферическими орбитами.
2. Получено эффективное описание нормальных стягиваний аффинных сферических многообразий, дана характеризация тотальных пространств таких стягиваний.
3. Найдены все аффинные однородные пространства редуктивной группы, каждое аффинное вложение которых содержит конечное число орбит (совм. с Д.А. Тимашевым); вычислено максимальное значение модальности по всем аффинным вложениям аффинного однородного пространства.
4. Решена задача классификации аффинных G-алгебр, в которых каждая инвариантная подалгебра конечно порождена.

[40] A. Białynicki-Birula: Finiteness of the number of maximal open subsets with good quotients. Transform. Groups **3** (1998), no. 4, 301–319.

5. Доказана стабильность диагонального действия полупростой группы G на декартовой степени X^m аффинного G-многообразия X при достаточно больших значениях m. Найдены все простые и полупростые неприводимые подгруппы простой группы G, которые стабильно действуют на главном аффинном однородном пространстве группы G.
6. Исследован новый инвариант алгебраического многообразия — кольцо Кокса. Доказана однородная факториальность колец Кокса, вычислено кольцо Кокса однородного пространства алгебраической группы, найдены примеры колец Кокса, не являющихся факториальными.
7. Развит новый метод применения колец Кокса в теории алгебраических групп преобразований. Этот метод использован при решении одной из центральных задач геометрической теории инвариантов: задачи описания открытых инвариантных подмножеств, допускающих хороший фактор. Для действия редуктивной группы на многообразии с конечно порожденным кольцом Кокса описаны такие подмножества с квазипроективным и A2-факторпространством, доказана конечность числа максимальных подмножеств с этими свойствами, найдена реализация Кокса глубоких GIT-факторов. Эти результаты позволяют вычислять важные геометрические характеристики факторпространств в комбинаторных терминах.
8. Решена задача комбинаторного описания вложений с малой границей для однородных пространств алгебраических групп; описаны проективные вложения с малой границей, доказана теорема конечности для таких вложений. Эти результаты основаны на предложенном диссертантом методе редукции к аффинному каноническому вложению.
9. Решена известная задача комбинаторной и геометрической характеризации сюръективности отображения умножения на однородных компонентах мультиградуированной алгебры. Эти результаты дают ответ на вопрос, поставленный Т. Ода в 1997 г.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Ее результаты и методы могут быть использованы в исследованиях по теории инвариантов, теории алгебраических групп, алгебраической геометрии и теории представлений. Результаты диссертации могут быть использованы в специальных курсах для студентов и аспирантов, обучающихся по специальности математика.

Апробация работы. Результаты диссертации неоднократно докладывались на научно-исследовательских семинарах кафедры высшей алгебры механико-математического факультета МГУ, а также на следующих международных и российских конференциях.

1. I-й коллоквиум по теории Ли и ее приложениям (Виго, Испания, 17–22 июля 2000 г.).
2. Международная конференция «Geometry and Topology of Quotients» (Аризона, США, 5–8 декабря 2002 г.).
3. Семинар по геометрическим представлениям и теории инвариантов (Манчестер, Великобритания, 12–15 марта 2003 г.).
4. Международная алгебраическая конференция, посвященная 250-летию Московского университета и 75-летию кафедры высшей алгебры (Москва, 27 мая – 2 июня 2004 г.).
5. Международная алгебраическая конференция, посвященная 60-летию Ю.А. Дрозда (Киев, Украина, 23–24 декабря 2004 г.).

6. Международная конференция по торической топологии (Осака, Япония, 29 мая – 3 июня 2006 г.).
7. Семинар по группам Ли, алгебраическим группам и группам преобразований (Билефельд, Германия, 15–16 июля 2006 г.).
8. Международная конференция по радикалам «ICOR-2006» (Киев, Украина, 1–5 августа 2006 г.).
9. Международный семинар «Group Embeddings: Geometry and Representations» (Банфф, Канада, 16–21 сентября 2007 г.).
10. Международная алгебраическая конференция, посвященная 100-летию Д.К. Фаддеева (Санкт-Петербург, 24–29 сентября 2007 г.).
11. Международная алгебраическая конференция, посвященная 100-летию А.Г. Куроша (Москва, 28 мая – 3 июня 2008 г.).
12. Международная конференция «New Horizons in Toric Topology» (Манчестер, Великобритания, 7–11 июля 2008 г.).
13. Конференция «Молодая Математика России» (Москва, 12–13 января 2009 г.).
14. Международный семинар «Cox Rings» (Тюбинген, Германия, 10–11 июля 2009 г.).

Результаты диссертации докладывались на заседании Московского Математического Общества 19 февраля 2008 г., международных конференциях «Мальцевские Чтения» в институте математики СО РАН (Новосибирск) в 2004, 2006 и 2008 г., на алгебраическом семинаре института Анри Пуанкаре (Париж, Франция, 19 мая 2003 г.), на семинаре по алгебре и геометрии института Фурье (Гренобль, Франция) в 1999, 2001 и 2003 г., на алгебраических семинарах Киевского Национального университета им. Т.Г. Шевченко и института математики НАН Украины в 2004, 2007 и 2009 г., и на семинаре по геометрии Эдинбургского университета (Эдинбург, Великобритания, 5 ноября 2009 г.). Материалы диссертации использовались в программах специальных курсов по теории инвариантов и теории алгебраических групп на механико-математическом факультете МГУ, в институте Фурье (Гренобль, Франция, апрель–июнь 2003 г.) и в Тюбингенском университете (Тюбинген, Германия, апрель–июнь 2007 г.).

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в 19 работах, список которых приведен в конце автореферата.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения и 6 глав, главы делятся на разделы. Объём диссертации — 244 стр., список литературы включает 139 наименований.

Содержание работы

Во **введении** дана общая характеристика работы, изложена краткая история решаемых задач и их современное состояние, обосновывается актуальность темы исследования и кратко описывается содержание работы. Здесь же зафиксированы основные соглашения и обозначения.

В **главе 1** получены результаты, относящиеся к теории алгебраических групп преобразований аффинных многообразий. В **разделе 1.1** мы напоминаем необходимые сведения об алгебраических группах преобразований и однородных пространствах алгебраических групп. В **разделе 1.2** получена классификация аффинных однородных пространств сложности один полупростых групп. Одним из важнейших классификационных результатов теории алгебраических групп преобразований является классификация М. Крамера[41] сферических аффинных однородных пространств простых групп. Составленные в работе[41] таблицы, которые помимо перечня однородных пространств содержат образующие весовой полугруппы для каждого из пространств, многократно использовались в работах по теории инвариантов, теории представлений, теории интегрируемых систем, дифференциальной геометрии и математической физике. Классификация сферических аффинных однородных пространств полупростых групп была получена И.В. Микитюком[42] и, независимо, М. Брионом[43]. Наконец, все аффинные однородные пространства сложности один простых групп были найдены Д.И. Панюшевым[44]. В диссертации мы в определенном смысле завершаем этот классификационный цикл и получаем список аффинных однородных пространств сложности один полупростых групп. Это результат совместной работы с О.В. Чувашовой [7]. Здесь же мы напоминаем необходимые сведения из симплектической геометрии и теории интегрируемых гамильтоновых систем и объясняем значение однородных пространств сложности один для этих областей. Использованный нами метод классификации близок к методу работы И.В. Микитюка[42]. В частности, операция, которую мы называем сцепкой, в[42] называлась "расширением пар". Отметим, что применение операции сцепки двух пар алгебра-подалгебра позволяет избежать рассмотрения глубины подалгебры (М. Брион) и проводить индукцию лишь по числу простых компонент объемлющей алгебры. Вычисление сложности однородного пространства основано на изучении стационарной подалгебры общего положения для представления изотропии и применении формул Панюшева (теоремы 1.11 и 1.12). Как показывает наша классификация, списки однородных пространств сложности $\leqslant 1$ имеют разумный объем. Это подтверждает предположение, высказанное в работе[7], где задача классификации пространств сложности один была поставлена впервые.

Раздел 1.3 посвящен изучению различных вариантов конструкции стягивания действия редуктивной группы G на аффинном многообразии Y, определенной в работе В.Л. Попова[45], и характеризации многообразий, возникающих в качестве тотальных пространств стягивания. Стягивание действия является одним из основных инструментов, используемых в современной теории инвариантов. Его эффективность объясняется тем, что стягивание сохраняет многие свойства действия, но приводит к действиям, которые в определенном смысле проще. Мы применяем эту конструкцию к задаче классификации действий с однопараметрическим семейством типичных орбит. Инвариантные фильтрации, по которым производится стягивание, можно задавать выпуклыми конусами, и в случае сферического многообразия Y каждое нормальное стягивание так реализуется. Применительно к аффинным алгебраическим моноидам такой подход использован в работе Э.Б. Винберга[35].

В **разделе 1.4** мы классифицируем все конечномерные рациональные G-модули редуктивной группы G, в которых все G-орбиты сферичны. Доказано, что каждый такой модуль становится сферическим после расширения группы G централизующим ее тором. Классификация сферических модулей получена в работе К. Бенсона

[41] M.Krämer: Sphärische Untergruppen in kompakten zusammenhängenden Liegruppen. Composit. Math. **38** (1979), 129–153.

[42] И.В.Микитюк: Об интегрируемости инвариантных гамильтоновых систем с однородными конфигурационными пространствами. Мат. сборник **129:4** (1986), 514–534.

[43] M.Brion: Classification des espaces homogènes sphériques. Compositio Math. **63** (1987), 189–208.

[44] D.I.Panyushev: Complexity of quasiaffine homogeneous varieties, t-decompositions, and affine homogeneous spaces of complexity 1. Advances in Soviet Math. **8** (1992), 151–166.

[45] В.Л.Попов: Стягивание действий редуктивных алгебраических групп. Мат. сборник **130:3** (1986), 310–334.

и Г. Ратклиффа и, независимо, А.С. Лехи. Результаты классификации собраны в таблицах 5–7. Также показано, что алгебры G^s- и U-инвариантов для таких G-модулей свободны. Классифицированы действия со сферическими орбитами на проективизациях $\mathbb{P}(V)$ конечномерных рациональных G-модулей V. Эти результаты опубликованы в работе [9]. Результаты этого раздела получили дальнейшее развитие в работах К. Кавеха, А. Гори и Ф. Подесты.

В **разделе 1.5** доказано, что для произвольного действия полупростой группы G на аффинном многообразии X найдется такое натуральное число n, что диагональное действие группы G на декартовой степени $X \times X \times \cdots \times X$ (m копий) стабильно для любого $m \geqslant n$. Результаты этого раздела опираются на работу Э.Б. Винберга[46] и опубликованы в [3].

В **разделе 1.6** дано новое элементарное доказательство нетривиальной импликации в критерии Мацусимы: если однородное пространство G/H редуктивной группы G является аффинным многообразием, то подгруппа H редуктивна. В отличие от других доказательств, где редуктивность H выводится из отсутствия в H нетривиальных нормальных унипотентных подгрупп, мы доказываем, что все конечномерные рациональные представления группы H вполне приводимы. Для этого мы рассматриваем инвариантные идеалы в алгебре регулярных функций $\mathbb{K}[G/H]$ и показываем, что аффинность G/H равносильна тривиальности идеала, определенного в работе Э.Б. Винберга[46]. Помимо доказательства критерия Мацусимы, информация об инвариантных идеалах в алгебре $\mathbb{K}[G/H]$ может быть полезна и в других ситуациях. В случае, когда алгебра $\mathbb{K}[G/H]$ конечно порождена, она содержит наименьший ненулевой радикальный инвариантный идеал (мы называем его *граничным*), который состоит из функций, равных нулю на дополнении к открытой орбите в каноническом вложении пространства G/H. Если G редуктивна, то в $\mathbb{K}[G/H]$ есть и наибольший собственный инвариантный идеал I_m; он соответствует (единственной) замкнутой G-орбите в каноническом вложении. Если не предполагать, что алгебра $\mathbb{K}[G/H]$ конечно порождена, то наибольший инвариантный идеал все равно существует и совпадает с идеалом, определенным Э.Б. Винбергом. Мы определяем в этой ситуации аналог граничного идеала и показываем, что для обозримой подгруппы H условие аффинности однородного пространства G/H равносильно тому, что граничный идеал алгебры $\mathbb{K}[G/H]$ совпадает со всей алгеброй. Результаты раздела 1.6 опубликованы в статье [11].

Глава 2 посвящена аффинным вложениям однородных пространств. В первом разделе мы рассматриваем аффинно замкнутые однородные пространства. В случае редуктивной группы G из результатов Д. Луны[17] следует, что однородное пространство G/H аффинно замкнуто тогда и только тогда, когда подгруппа H редуктивна и имеет конечный индекс в своем нормализаторе $N_G(H)$. В совместной работе с Н.А. Тенновой [18] мы обобщаем теорему Луны и описываем аффинно замкнутые однородные пространства произвольной аффинной алгебраической группы G.

Теорема 2.3 *Пусть $G = LG^u$ — разложение Леви аффинной алгебраической группы G в полупрямое произведение редуктивной подгруппы L и унипотентного радикала G^u, $\varphi\colon G \to G/G^u \cong L$ и $K := \varphi(H)$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *однородное пространство G/H аффинно замкнуто;*

(2) *однородное пространство L/K аффинно замкнуто.*

Во втором разделе мы переходим к классификации аффинных однородных пространств редуктивных групп, каждое аффинное вложение которых имеет конечное

[46]E.B.Vinberg: On stability of actions of reductive algebraic groups. "Lie Algebras, Rings and Related Topics", Fong Yuen, A.A.Mikhalev, E.Zelmanov Eds, Springer-Verlag Hong-Kong (2000), 188–202.

число G-орбит. Как было отмечено выше, этому требованию удовлетворяют все сферические однородные пространства. Из явного описания аффинных вложений группы SL(2), полученного В.Л. Поповым[16], следует, что здесь также число орбит всегда конечно. Заметим, что SL(2)-вложения имеют сложность один. Наконец, очевидно, что интересующему нас условию конечности удовлетворяют аффинно замкнутые однородные пространства. Рассматривая аффинно замкнутое однородное пространство G/T, где T — максимальный тор группы G, мы замечаем, что сложность аффинно замкнутого однородного пространства может быть сколь угодно большой. Поэтому, в отличие от проективных вложений, конечность числа орбит в аффинных вложениях не может быть охарактеризована только в терминах сложности. Полученная в совместной с Д.А. Тимашевым работе [16] классификация по существу задает естественное объединение указанных выше трех классов однородных пространств (теорема 2.9). В качестве обобщения этого результата в работе [2] найдено максимальное значение модальности по всем аффинным вложениям данного аффинного однородного пространства. Каждому квазиаффинному однородному пространству G/H сопоставим целое число

$$a_G(G/H) = \max_X \operatorname{mod}_G(X),$$

где X пробегает все аффинные вложения пространства G/H.

Теорема 2.16 *Пусть H – редуктивная подгруппа в G.*
(1) *Если группа $N_G(H)/H$ конечна, то $a_G(G/H) = 0$.*
(2) *Если $N_G(H)/H$ бесконечна, то*

$$a_G(G/H) = \max_{H'} c(G/H'),$$

где H' пробегает все нетривиальные расширения H при помощи одномерного подтора из $N_G(H)$. В частности, $a_G(G/H) = c(G/H)$ или $c(G/H) - 1$.

Среди прочего, этот результат показывает, что если замыкание SL(3)-орбиты на произвольном SL(3)-многообразии может содержать (не более чем) трехпараметрическое семейство орбит, то на аффинном SL(3)-многообразии в замыкании орбиты может лежать (не более чем) двухпараметрическое семейство орбит. Применительно к однородному пространству $G/\{e\}$ теорема 2.16 допускает алгебраическую переформулировку. Предположим, что группа G связна и полупроста, и рассмотрим действие G на алгебре $\mathbb{K}[G]$ левыми сдвигами аргумента. Пусть $A \subseteq \mathbb{K}[G]$ — конечно порожденная подалгебра, инвариантная относительно этого действия. Тогда для любого простого инвариантного идеала $I \lhd A$ имеет место неравенство на степень трансцендентности подполя инвариантов поля частных факторалгебры A/I:

$$\operatorname{td}(\operatorname{Quot}(A/I))^G \leqslant \frac{1}{2}(\dim G - \operatorname{rk} G) - 1,$$

причем существует подалгебра A и идеал I, для которых это неравенство обращается в равенство (следствие 2.18).

В **разделе 2.3** мы напоминаем необходимые сведения о подгруппах Гроссханса и изучаем каноническое вложение $\operatorname{CE}(G/H)$, где H — подгруппа Гроссханса в G. Рассматривается редуктивная оболочка подгруппы и исследуется, следуя работе [10], наличие G-неподвижной точки в каноническом вложении. Также в этом разделе мы перечисляем свойства канонического вложения однородного пространства G/P^u, где G — связная редуктивная группа и P^u — унипотентный радикал параболической подгруппы P группы G. Эти свойства потребуются нам в главе 5. Они в основном были получены Д.А. Тимашевым и вошли в совместную работу [19].

В **разделе 2.4** мы возвращаемся к понятию стабильного действия и находим все простые и полупростые неприводимые подгруппы H простой группы G, которые действуют стабильно на главном аффинном однородном пространстве группы G. Последний термин восходит к работам И.М. Гельфанда; в нашей терминологии главное аффинное однородное пространство — это каноническое вложение однородного пространства G/U, где U — максимальная унипотентная подгруппа группы G. Результаты этого раздела используют и развивают методы работы Э.Б. Винберга[46] и отвечают на вопрос, поставленный в этой работе. Они опубликованы в статье [8].

Раздел 2.5 посвящен эквивариантным автоморфизмам аффинных вложений. Поскольку группа эквивариантных автоморфизмов однородного пространства G/H отождествляется с факторгруппой $N_G(H)/H$ нормализатора $N_G(H)$, для каждого вложения $G/H \hookrightarrow X$ группа $\mathrm{Aut}_G(X)$ его эквивариантных автоморфизмов может рассматриваться как подгруппа в $N_G(H)/H$. Мы изучаем вопрос о том, насколько могут отличаться группы $N_G(H)/H$ и $\mathrm{Aut}_G(X)$. Основной результат этого раздела (теорема 2.50) утверждает, что для аффинного вложения с конечным числом G-орбит и G-неподвижной точкой связная компонента единицы $\mathrm{Aut}_G(X)^0$ группы эквивариантных автоморфизмов разрешима. Этот результат получен автором и опубликован в совместной с Д.А. Тимашевым работе [19].

В **разделе 2.6** классифицированы аффинные G-алгебры, каждая инвариантная подалгебра в которых конечно порождена. Мы разделили их на три типа (теорема 2.66): одномерные (в смысле Крулля) алгебры, алгебры функций на S-многообразиях, определяемых полугруппой ранга один, и алгебры функций на аффинно замкнутых однородных пространствах. Для всех прочих аффинных G-алгебр имеется единая геометрическая конструкция, которая приводит к не конечно порожденной инвариантной подалгебре (лемма 2.60). Для редуктивной группы G эти результаты получены в работе [10]. Случай нередуктивной группы G в некотором смысле проще, здесь отсутствует второй из перечисленных типов. Классификация в этом случае основана на результатах раздела 2.1 и опубликована в совместной с Н.А. Тенновой работе [18].

Наконец, последний раздел второй главы посвящен применению теории аффинных вложений к задаче классификации инвариантных алгебр на однородных пространствах компактных групп Ли. Мы систематизируем известные ранее факты об инвариантных алгебрах, устанавливаем биективное соответствие между конечно порожденными инвариантными алгебрами и аффинными вложениями, рассматриваемыми с точностью до определенной эквивалентности (теорема 2.75), а также указываем интерпретации вышеизложенных результатов в терминах инвариантных алгебр. Например, из теоремы 2.9 следует, что при любой реализации сферы в качестве однородного пространства компактной группы Ли каждая конечно порожденная инвариантная алгебра содержит лишь конечное число радикальных инвариантных идеалов. Все результаты этого раздела содержатся в [17, Section 5].

В **главе 3** разрабатываются комбинаторные методы для решения задачи описания открытых инвариантных подмножеств данного G-многообразия, допускающих хороший фактор. В первом разделе мы напоминаем необходимые сведения о хороших факторах по действию редуктивной группы. В **разделе 3.2** излагается конструкция Д. Мамфорда[22], сопоставляющая каждому линеаризованному расслоению на многообразии множество его полустабильных точек и хороший фактор для этого множества. Здесь же дано более общее понятие линеаризованного дивизора Вейля и приведена теорема Ю. Хаузена[24] о том, что множества полустабильных точек линеаризованных дивизоров Вейля включают в себя все максимальные qp-подмножества.

Два следующие раздела посвящены комбинаторному описанию qp- и $(G,2)$-максимальных подмножеств для действия редуктивной группы G на аффинном факториальном многообразии Z. Пусть G — связная редуктивная группа, $M_{\mathbb{Q}} := M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ — рациональное векторное пространство, порожденное решеткой характеров группы G и Z — неприводимое аффинное G-многообразие.

(1) *Весовой конус* G-многообразия Z — это выпуклый конус $\omega(Z) \subseteq M_{\mathbb{Q}}$, порожденный всеми характерами $\chi \in M$, для которых $\Gamma(Z, \mathcal{O})_\chi \neq 0$.

(2) Для каждой точки $z \in Z$ определим ее *орбитный конус* как выпуклый конус $\omega(z) \subseteq M_{\mathbb{Q}}$, порожденный всеми характерами $\chi \in M$, для которых найдется полуинвариант $f \in \Gamma(Z, \mathcal{O})_\chi$ с $f(z) \neq 0$.

(3) Определим *GIT-конус* $\lambda(\chi) \subseteq M_{\mathbb{Q}}$ характера $\chi \in M$ как пересечение всех орбитных конусов содержащих χ:

$$\lambda(\chi) \ := \bigcap_{\chi \in \omega(z)} \omega(z).$$

(4) Назовем *GIT-веером* G-многообразия Z множество $\Lambda(Z)$ всех GIT-конусов $\lambda(\chi)$, где $\chi \in M$.

Теорема 3.28 *Пусть G — связная редуктивная группа и Z — неприводимое аффинное G-многообразие.*

(1) *Весовой конус, орбитные конуса и GIT-конуса для G-действия на Z являются полиэдральными; число орбитных конусов и GIT-конусов конечно.*

(2) *Для каждого характера $\chi \in M$ соответствующее множество полустабильных точек $Z^{ss}(\chi) \subseteq Z$ может быть задано как*

$$Z^{ss}(\chi) \ = \ \{z \in Z;\ \chi \in \omega(z)\}.$$

(3) *GIT-веер $\Lambda(Z)$ является веером в пространстве $M_{\mathbb{Q}}$, и объединение конусов $\lambda(\chi) \in \Lambda(Z)$ совпадает с весовым конусом $\omega(Z)$.*

(4) *Для характера $\chi \in M$ множество $Z^{ss}(\chi) \subseteq Z$ непусто тогда и только тогда, когда $\chi \in \omega(Z)$. Длю любых двух характеров $\chi, \chi' \in \omega(Z) \cap M$ имеем*

$$Z^{ss}(\chi) \subseteq Z^{ss}(\chi') \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda(\chi) \succeq \lambda(\chi').$$

(5) *Если многообразие Z факториально, то $\Lambda(Z)$ биективно отображается на множество qp-максимальных хороших G-подмножеств в Z посредством отображения $\lambda \mapsto Z^{ss}(\chi)$, где χ — произвольный характер из относительной внутренности конуса λ.*

Обозначим через $\Omega(Z)$ множество всех орбитных конусов $\omega(z)$, где $z \in Z$.

(1) Назовем подмножество $\Psi \subseteq \Omega(Z)$ *2-связным набором*, если $\tau_1^\circ \cap \tau_2^\circ \neq \emptyset$ для любых $\tau_1, \tau_2 \in \Psi$.

(2) Назовем 2-связный набор *2-максимальным*, если он не содержится ни в каком другом 2-связном наборе.

(3) Скажем, что 2-связный набор Ψ является *гранью* 2-связного набора Ψ' (обозначение: $\Psi \preceq \Psi'$), если для любого конуса $\omega' \in \Psi'$ найдется такой конус $\omega \in \Psi$, что $\omega \preceq \omega'$.

(4) С каждым набором конусов $\Psi \subseteq \Omega(Z)$ мы связываем G-инвариантное подмножество $U(\Psi) \subseteq Z$:

$$U(\Psi) \ := \ \{z \in Z;\ \omega_0 \preceq \omega(z) \text{ для некоторого } \omega_0 \in \Psi\}.$$

(5) С каждым G-инвариантным открытым подмножеством $U \subseteq Z$ свяжем набор орбитных конусов

$$\Psi(U) \ := \ \{\omega(z);\ z \in U,\ G \cdot z \text{ замкнута в } U\}.$$

Теорема 3.38 *Пусть G — связная редуктивная группа и Z — аффинное факториальное G-многообразие. Тогда следующие отображения конечных множеств взаимно обратны*:

$$\begin{array}{rcl} \{\text{2-максимальные наборы в } \Omega(Z)\} & \longleftrightarrow & \{(G,2)\text{-макс. хорошие подмножества в } Z\}, \\ \Psi & \to & U(\Psi), \\ \Psi(U) & \leftarrow & \Psi. \end{array}$$

Эти биекции сохраняют частичные порядки:

$$\Psi \preceq \Psi' \;\Leftrightarrow\; U(\Psi) \supseteq U(\Psi').$$

Условие 2-максимальности набора состоит в том, что любые два конуса из набора имеют общую внутреннюю точку. Такие наборы описывают $(G,2)$-максимальные подмножества. В свою очередь, условие квазипроективности фактора состоит в том, что общая внутреняя точка имеется у всех конусов набора. Эти результаты получены совместно с Ю. Хаузеном и опубликованы в работе [15]. Их доказательство основано на факторизации по действию максимальной полупростой подгруппы в группе G и редукции общего случая к известному ранее случаю действия тора.

В **разделе 3.5** получена алгебраическая характеризация GIT-веера для действия алгебраического тора T на аффинном многобразии Z. Такое действие соответствует мультиградуировке на аффинной алгебре A регулярных функций на Z решеткой характеров M тора T. Назовем пару весов $u, v \in M$ *порождающей*, если найдется такое $m > 0$, что для любого $k > 0$ отображение умножения определяет сюръекцию

$$\mu_{km} \colon A_{kmu} \otimes_{\mathbb{K}} A_{kmv} \;\to\; A_{km(u+v)}, \qquad f \otimes g \;\mapsto\; fg.$$

Теорема 3.43 *Пусть $\Lambda(A)$ — это GIT-веер аффинной M-градуированной алгебры A без делителей нуля.*

(1) *Если $u, v \in M$ — порождающая пара, то веса u и v лежат в одном GIT-конусе $\lambda \in \Lambda(A)$.*

(2) *Если $u, v \in M$ лежат в одном GIT-конусе $\lambda \in \Lambda(A)$ и вес u попадает в относительную внутренность λ°, то пара u, v является порождающей.*

Эти результаты дают ответ на вопрос, поставленный Т. Ода в 1997 г. Если два веса $u, v \in M$ лежат на границе GIT-конуса $\lambda \in \Lambda(A)$, то охарактеризовать порождающие пары в терминах GIT-веера не удается: легко показать, что такая пара может быть порождающей, а пример 3.44 демонстрирует обратную возможность. Теорема 3.47 доставляет критерий сюръективности отображения умножения на однородных компонентах в терминах нормальности образа отображения между GIT-факторами. Также мы приводим алгоритм вычисления GIT-веера мультиградуированной алгебры, заданной образующими и соотношениями. Основные результаты этого раздела получены совместно с Ю. Хаузеном и опубликованы в [14].

Глава 4 начинается с определения кольца Кокса $R(X)$ нормального алгебраического многообразия X с конечно порожденной группой классов дивизоров $\mathrm{Cl}\,(X)$. Для удобства изложения в первом разделе мы определяем дивизориальные алгебры

$$\bigoplus_{D \in K} \Gamma(X, \mathcal{O}_X(D)), \quad \text{где} \quad \Gamma(X, \mathcal{O}_X(D)) = \{f \in \mathbb{K}(X)^\times \,:\, \mathrm{div}(f) + D \geqslant 0\} \cup \{0\},$$

которые строятся по произвольной конечно порожденной подгруппе K в группе дивизоров Вейля $\mathrm{WDiv}\,(X)$ на многобразии X. Если группа $\mathrm{Cl}\,(X)$ свободна, то кольцо Кокса можно определить как дивизориальную алгебру, построенную по подгруппе K, которая проектируется на $\mathrm{Cl}\,(X)$ изоморфно. Мы проверяем, что с точностью до изоморфизма кольцо Кокса не зависит от выбора подгруппы K. Если группа $\mathrm{Cl}\,(X)$

имеет кручение, то можно выбрать подгруппу K так, чтобы ее проекция на $\mathrm{Cl}(X)$ была сюръективной. Тогда кольцо Кокса получается факторизацией дивизориальной алгебры, построенной по K, по идеалу, который определяет отождествление однородных компонент дивизориальной алгебры, отвечающих линейно эквивалентным дивизорам из K, см. **раздел 4.3**. Следуя работе [4], мы проверяем корректность определения кольца Кокса и доказываем однородную факториальность этого мультиградуированного кольца (предложение 4.31), т.е. однозначность разложения ненулевого однородного элемента на однородные простые множители (определение 4.22). Оказывается, что в случае свободной градуирующей группы $\mathrm{Cl}(X)$ однородная факториальность равносильна факториальности, и тем самым мы получаем простое доказательство известной ранее теоремы о факториальности колец Кокса. Если же группа $\mathrm{Cl}(X)$ имеет кручение, то кольцо $R(X)$ может не быть факториальным. Чтобы привести соответствующий пример, мы вычисляем кольцо Кокса однородного пространства G/H связной группы G с тривиальной группой Пикара и тривиальными характерами. Здесь кольцо Кокса $R(G/H)$ изоморфно кольцу $\mathbb{K}[G/H_1]$, где H_1 — пересечение ядер всех характеров подгруппы H (теорема 4.41). В частности, если N — это нормализатор максимального тора T в группе $\mathrm{SL}(2)$, то кольцо Кокса $R(\mathrm{SL}(2)/N)$ изоморфно $\mathbb{K}[\mathrm{SL}(2)/T]$, и поэтому факториальным не является. Другой пример такого сорта можно получить, рассматривая факторпространство $\mathbb{K}^2$ по линейному действию группы кватернионов Q_8, см. пример 4.47. Более того, для любой конечно порожденной абелевой группы A с кручением найдется однородное пространство G/H, для которого $\mathrm{Cl}(G/H)$ изоморфна A и кольцо $R(G/H)$ не факториально, см. пример 4.42.

Наряду с алгебраическими свойствами колец Кокса, в главе 4 мы изучаем каноническую реализацию многообразия X в качестве хорошего фактора открытого подмножества $\widehat{X}$ тотального координатного пространства $\overline{X}$ многообразия X по действию квазитора Нерона-Севери H_X. Такую реализацию $q\colon \widehat{X} \to X$ мы называем *реализацией Кокса* многообразия X. Аффинные многообразия X характеризуются условием $\widehat{X} = \overline{X}$. В **разделе 4.5** мы получаем характеризацию реализации Кокса в терминах действия квазитора на однородно факториальном аффинном многообразии (предложение 4.44), описываем реализацию Кокса для факторпространств векторных пространств по линейному действию конечной группы (теорема 4.45) и для однородного пространства G/H алгебраической группы G. В последнем случае, если подгруппа H_1 оказывается подгруппой Гроссханса в G, то тотальное координатное пространство $\overline{G/H}$ изоморфно каноническому вложению однородного пространства G/H_1. Также мы приводим пример аффинного многообразия, кольцо Кокса которого не конечно порождено.

В **разделе 4.6** мы получаем аналог теоремы Кокса[30] о подъеме автоморфизмов для аффинных многообразий. Пусть $R = \oplus_{u\in M} R_u$ — коммутативная ассоциативная алгебра с единицей, градуированная конечно порожденной группой M. Определим подгруппу $\widetilde{\mathrm{Aut}}(R)$ группы автоморфизмов алгебры R как

$$\widetilde{\mathrm{Aut}}(R) = \{\varphi \in \mathrm{Aut}(R) \mid \exists \varphi_0 \in \mathrm{Aut}(M) : \varphi(R_u) = R_{\varphi_0(u)} \ \forall\ u \in M\}.$$

Теорема 4.52 утверждает, что для неприводимого нормального аффинного многообразия с конечно порожденной группой $\mathrm{Cl}(X)$, квазитором Нерона-Севери H_X и условием $\mathbb{K}[X]^\times = \mathbb{K}^\times$ имеется следующая точная последовательность:

$$1 \to H_X \to \widetilde{\mathrm{Aut}}(R(X)) \to \mathrm{Aut}(X) \to 1.$$

Этот результат позволяет перенести понятия ручного и дикого автоморфизмов с аффинного пространства на любое аффинное торическое многообразие: для этого надо поднять автоморфизм аффинного торического многообразия на его кольцо Кокса, которое является кольцом многочленов.

В **главе 5** изучаются эквивариантные открытые вложения однородных пространств с малой границей. В первом разделе доказано, что проективные вложения с малой границей однородного пространства G/H в случае эпиморфной подгруппы H отвечают тем характерам H, ядра которых являются подгруппами Гроссханса в G. Этот результат был известен специалистам, некоторый его вариант содержится в работе[39]. Затем мы находим характеризацию тех характеров, ядра которых обозримы. Гарантировать условие Гроссханса сложнее, поэтому все последующие результаты этой главы получены в предположении, что подгруппа H является *расширением Гроссханса*, т.е. H связна и отвечающая ей подгруппа H_1 есть подгруппа Гроссханса в G. Мы доказываем, что построенное по характеру проективное вложение с малой границей зависит только от GIT-конуса, в который попадает характер. Отсюда вытекает конечность числа классов изоморфизма проективных вложений с малой границей (теорема 5.12). Также доказано, что однородное пространство G/H, где $G = (\mathrm{SL}(2))^9$, а H — эпиморфная подгруппа, указанная в работе [39], не допускает пополнений с малой границей (теорема 5.10). Результаты этого раздела опубликованы в работе [5].

Раздел 5.2 носит вспомогательный характер. В нем собраны результаты из [13, Section 2], которые показывают, что открытые вложения $V \to X$ с малой границей алгебраического многообразия V биективно соответствуют промежуточным хорошим H_V-подмножествам W_X, где $\widehat{V} \subseteq W_X \subseteq \overline{V}$. При этом многообразие X является факторпространством W_X по действию тора H_V, а морфизмы V-вложений соответствуют включениям между подмножествами W_X многообразия $\overline{X}$.

В **разделе 5.3** эти соображения применены к описанию A2-максимальных вложений с малой границей однородного пространства G/H, где H — расширение Гроссханса. Здесь $V = G/H$, $\widehat{V} = G/H_1$, а $\overline{V}$ — каноническое вложение пространства G/H_1. Как следует из теоремы 3.38, промежуточные подмножества W_X, отвечающие A2-максимальным вложениям с малой границей, задаются 2-максимальными наборами орбитных конусов, причем для того, чтобы открытая орбита на пространстве вложения была изоморфна G/H, нужно, чтобы набор был внутренним (теорема 5.30). Отсюда следует конечность максимальных вложений. Все результаты этого раздела получены совместно с Ю. Хаузеном в работе [13].

В **разделе 5.3** рассматриваются примеры вложений однородных пространств с малой границей. Среди прочего, приводится полученная в [5, §5] классификация проективных вложений с малой границей для однородных пространств группы SL(3), а также описание вложений с малой границей однородных пространств простых групп в торические многообразия (предложение 5.41).

Раздел 5.5 посвящен геометрии вложений с малой границей. Используя теорию колец со связками, мы описываем конуса эффективных, подвижных, полуобильных и обильных дивизоров вложения с малой границей, характеризуем локально факториальные и $\mathbb{Q}$-факториальные вложения и, при определенных ограничениях на каноническое вложение пространства G/H_1, описываем гладкие вложения и вычисляем канонический класс вложения.

В **главе 6** мы возвращаемся к задаче описания хороших G-подмножеств. На этот раз рассматривается произвольное нормальное G-многообразие со свободной конечно порожденной группой классов дивизоров $\mathrm{Cl}(X)$ и конечно порожденным кольцом Кокса $R(X)$. Мы работаем с эквивариантной реализацией Кокса, т.е. с подъемом действия группы G на тотальное координатное пространство $\overline{X}$, коммутирующим с действием тора Нерона-Севери, см. [15] и [12]. Результаты главы 3 дают полное описание максимальных хороших подмножеств для действия редуктивной группы на аффинном факториальном многообразии с квазипроективными и A2-факторпространствами. Теперь мы можем применить это описание к тотальному координатному пространству $\overline{X}$, рассматриваемому как аффинное факториальное $(G\times H_X)$-многообразие. Следующий результат показывает как получить из этого описания все хорошие G-подмножества на многообразии X. Пусть X — G-многообразие с эквивариантной реализацией Кокса $q\colon \widehat{X} \to X = \widehat{X}/\!/H_X$ и тотальным координатным пространством $\overline{X}$. Для любого хорошего $(G \times H_X)$-подмножества $W \subseteq \overline{X}$ положим

$$W \sqcap_G \widehat{X} := \left\{ x \in W \cap \widehat{X};\ \lim_{G\times H_X}(x,W) \subseteq \widehat{X} \text{ и } H_X x_0 \text{ замкнута в } \widehat{X}\ \forall\, x_0 \in \lim_{G\times H_X}(x,W) \right\}.$$

Здесь символом $\lim_{G\times H_X}(x,W)$ обозначена (единственная) замкнутая $(G \times H_X)$-орбита в замыкании $(G \times H_X)$-орбиты точки x на W.

Теорема 6.5 *Для любого хорошего $(G \times H_X)$-подмножества $W \subseteq \overline{X}$ подмножество $W \sqcap_G \widehat{X}$ является $(G \times H_X)$-насыщенным в W и H_X-насыщенным в $\widehat{X}$. Это определяет сюръекцию*

$$\begin{array}{ccc} \left\{\text{хорошие } (G \times H_X)\text{-подмножества в } \overline{X}\right\} & \longrightarrow & \left\{\text{хорошие } G\text{-подмножества в } X\right\}, \\ W & \mapsto & q(W \sqcap_G \widehat{X}), \end{array}$$

для которой отображение $U \mapsto q^{-1}(U)$ является правым обратным. Далее, любое максимальное ($(G,2)$-максимальное, qp-максимальное) хорошее G-подмножество $U \subseteq X$ имеет вид $U = q(W \sqcap_G \widehat{X})$ для некоторого максимального ($(G \times H_X,2)$-максимального, qp-максимального) хорошего $(G \times H_X)$-подмножества $W \subseteq \overline{X}$.

Соответствие из теоремы 6.5 применимо к очень широкому классу G-многообразий. Тем не менее оно оказывается полезным даже в классической задаче о вариации фактора множества полустабильных точек при различных выборах обильного линеаризованного расслоения на проективном многообразии. При некоторых естественных ограничениях такая вариация описывается GIT-веером для $(G \times H_X)$-действия на $\overline{X}$, который определяется своими стенками, т.е. орбитными конусами коразмерности один. Предположим, что группа G полупроста. Тогда стенки — это орбитные конуса точек категорного фактора $\overline{X}/\!/G$, стабилизаторы которых относительно действия тора H_X одномерны. Во многих случаях известной информации об образующих алгебры G-инвариантов и соотношениях между ними достаточно, чтобы явно выписать уравнения, задающие стенки GIT-веера. Мы иллюстрируем этот метод, вычисляя GIT-веер для диагонального действия симплектической группы $\mathrm{Sp}(2n)$ на произведении $\mathbb{P}(\mathbb{K}^{2n})^m$ нескольких копий проективизации ее тавтологического представления (теорема 6.12). Другая серия примеров — это произведения проективизаций неприводимых компонент приводимых представлений группы G, алгебра инвариантов которых свободна. Возникающие здесь факторпространства оказываются торическими многообразиями.

Известное соответствие Гельфанда-Макферсона[47] связывает типичные орбиты диагонального действия группы $\mathrm{SL}(n)$ на $(\mathbb{P}^{n-1})^m$ и типичные орбиты естественного действия тора на грассманиане $G(n,m)$. Это соответствие определяет изоморфизмы между определенными факторпространствами для обоих действий. В рамках нашего соответствия между хорошими подмножествами на G-многообразии и его тотальном координатном пространстве соответствие Гельфанда-Макферсона можно обобщить на многие классы действий и доказать изоморфизм обратных пределов системы GIT-факторов для действия полупростой группы и соответствующего ему действия тора (теорема 6.17).

В последнем разделе мы описываем реализацию Кокса для GIT-факторов. Естественно предположить, что такая реализация получается при факторизации относительно действия тора Нерона-Севери подходящего открытого подмножества в факторпространстве $\overline{X}/\!/G$. Другими словами, для нахождения реализации Кокса (или вычисления кольца Кокса) GIT-фактора надо профакторизовать тотальное координатное пространство многообразия X по действующей полупростой группе G. Оказывается, такое предположение верно не для всех GIT-факторов, а только для тех из них, для которых соответствующие GIT-конуса расположены в определенном смысле далеко от границы носителя GIT-веера (теорема 6.22). Зная реализацию Кокса, мы вновь можем воспользоваться теорией колец со связками и описать конуса дивизоров для GIT-факторов, а также охарактеризовать локально факториальные и $\mathbb{Q}$-факториальные GIT-факторы. Все результаты шестой главы получены совместно с Ю. Хаузеном и опубликованы в работе [15].

Благодарности. Автор выражает глубокую благодарность своему учителю профессору Эрнесту Борисовичу Винбергу за постоянную поддержку, полезные советы и обсуждения. Большую роль в работе сыграли консультации профессора Мишеля Бриона (Гренобль, Франция). Очень важным для автора является многолетнее сотрудничество с доцентом Дмитрием Андреевичем Тимашевым и профессором Юргеном Хаузеном (Тюбинген, Германия). Автор глубоко благодарен всем сотрудникам кафедры высшей алгебры Механико-математического факультета МГУ за творческую атмосферу, которая способствует занятиям научной работой.

[47] I.M.Gelfand, R.W.MacPherson: Geometry in Grassmanians and a generalization of the dilogarithm. Adv. Math. **44** (1982), 279–312.

Публикации автора по теме диссертации

[1] И.В. Аржанцев, Стягивания аффинных сферических многообразий. Математический сборник **190** (1999), № 7, 3–22.

[2] И.В. Аржанцев, О модальности и сложности аффинных вложений. Математический сборник **192** (2001), № 8, 47–52.

[3] И.В. Аржанцев, О стабильности диагональных действий. Математические заметки **71** (2002), № 6, 803–806.

[4] И.В. Аржанцев, О факториальности колец Кокса. Математические заметки **85** (2009), № 5, 643–651.

[5] И.В. Аржанцев, Проективные вложения однородных пространств с малой границей. Известия РАН. Серия математическая **73** (2009), № 3, 5–22.

[6] И.В. Аржанцев, С.А. Гайфуллин, Кольца Кокса, полугруппы и автоморфизмы аффинных многообразий. Математический сборник **201** (2010), № 1, 3–24. (Диссертанту принадлежат результаты параграфов 2, 3 и 5.)

[7] И.В. Аржанцев, О.В. Чувашова, Классификация аффинных однородных пространств сложности один. Математический сборник **195** (2004), № 6, 3–20. (Диссертанту принадлежит метод классификации и теорема 3, О.В. Чувашова проводила вычисления в рамках предложенного метода.)

[8] I.V. Arzhantsev, On stability of subgroup actions on certain quasihomogeneous G-varieties. Journal of Lie Theory **10** (2000), no. 2, 345–357.

[9] I.V. Arzhantsev, A classification of reductive linear groups with spherical orbits. Journal of Lie Theory **12** (2002), no. 1, 289–299.

[10] I.V. Arzhantsev, Algebras with finitely generated invariant subalgebras. Annales de L'Institut Fourier **53** (2003), no. 2, 379–398.

[11] I.V. Arzhantsev, Invariant ideals and Matsushima's criterion. Communications in Algebra **36** (2008), no. 12, 4368–4374.

[12] I.V. Arzhantsev, S.A. Gaifullin, Homogeneous toric varieties. Journal of Lie Theory **20** (2010), no. 2, 283–293. (Диссертанту принадлежит постановка задачи; основной результат, теорема 1.1, получен авторами совместно.)

[13] I.V. Arzhantsev, J. Hausen, On embeddings of homogeneous spaces with small boundary. Journal of Algebra **304** (2006), no. 2, 950–988. (Диссертанту принадлежат результаты параграфа 4; результаты параграфов 2, 3 и 5 получены авторами совместно.)

[14] I.V. Arzhantsev, J. Hausen, On the multiplication map of a multigraded algebra. Mathematical Research Letters **14** (2007), no. 1, 129–136. (Диссертанту принадлежит пример 1.2; теоремы 1.1 и 1. 5 получены авторами совместно.)

[15] I.V. Arzhantsev, J. Hausen, Geometric Invariant Theory via Cox Rings. Journal of Pure and Applied Algebra **213** (2009), no. 1, 154–172. (Диссертанту принадлежат результаты параграфов 5 и 6; результаты параграфов 3, 4, 7 и 8 получены авторами совместно.)

[16] I.V. Arzhantsev, D.A. Timashev, Affine embeddings with a finite number of orbits. Transformation Groups **6** (2001), no. 2, 101–110. (Диссертанту принадлежит формулировка основного результата работы, теоремы 3, и теорема 4; доказательство теоремы 3 получено авторами совместно.)

[17] I.V. Arzhantsev, Affine embeddings of homogeneous spaces. In: "Surveys in Geometry and Number Theory" (N. Young, Editor), LMS Lecture Notes Series **338**, Cambridge University Press (2007), 1–51.

[18] И.В. Аржанцев, Н.А. Теннова, Об аффинно замкнутых однородных пространствах. "Современная математика и ее приложения" **14** (2004) (том посвящен 70-летию В.Н. Латышева), 121–127; English transl.: Journal of Mathematical Sciences **131** (2005), no. 6, 6133–6139. (Диссертанту принадлежит постановка задачи и теорема 3, теорема 2 получена авторами совместно.)

[19] I.V. Arzhantsev, D.A. Timashev, On the canonical embeddings of certain homogeneous spaces. In: "Lie Groups and Invariant Theory: A.L. Onishchik's jubilee volume" (E.B. Vinberg, Editor), AMS Translations, Series 2, vol. **213** (2005), 63–83. (Диссертанту принадлежат результаты параграфа 2.)

Работы [1] – [16] опубликованы в журналах из перечня ВАК РФ ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертации на соискание ученой степени доктора и кандидата наук.