МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 515.126.4

Фоменко Татьяна Николаевна

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК И СОВПАДЕНИЙ

01.01.04 - геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва 2010

Работа выполнена на кафедре общей математики
факультета Вычислительной Математики и Кибернетики
Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова

Официальные оппоненты: член-корреспондент РАН
доктор физико-математических наук профессор
Матвеев Сергей Владимирович,
доктор физико-математических наук профессор
Арутюнов Арам Владимирович,
доктор физико-математических наук профессор
Смирнов Владимир Алексеевич

Ведущая организация: Воронежский государственный университет

Защита диссертации состоится 24 декабря 2010 г. в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 при Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова по адресу: РФ, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские Горы, д.1, МГУ имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, аудитория 1408.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке
Механико-математического факультета МГУ имени М.В.Ломоносова
(Главное здание МГУ, 14 этаж.)

Автореферат разослан 24 ноября 2010 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
Д.501.001.84 при МГУ имени М.В.Ломоносова,
доктор физико-математических наук,
профессор А.О.Иванов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Диссертация относится к теории неподвижных точек и совпадений отображений топологических пространств. В работе решаются задачи, связанные с тремя аспектами этой теории: существованием неподвижных точек и совпадений, их минимизации и аппроксимации. Приведем кратко постановки и предысторию этих задач.

В диссертации решается задача вычисления степени эквивариантного отображения когомологических сфер с действиями конечных и некоторых компактных групп. С этой целью в работе развита теория введенного ранее автором индекса эквивариантности отображений когомологических сфер, перестановочных с действиями конечной циклической группы. *G-когомологической n-мерной сферой* называется паракомпактное хаусдорфово пространство с конечно-порожденными целочисленными когомологиями Александрова-Чеха, когомологии которого с коэффициентами в группе G совпадают с когомологиями стандартной n-мерной сферы. Пусть X - $\mathbb{Z}_k$-когомологическая n-сфера, и $T : X \to X$ - гомеоморфизм, задающий действие группы $\mathbb{Z}_k$ на X, то есть $T^k = id_X$. Напомним, что действие T группы $\mathbb{Z}_k$ называется *свободным*, если $T^q(x) \neq x, x \in X, q = 1, 2, ..., k-1$. Действие T *полусвободно*, если оно свободно вне множества $F = \{x \in X \mid T(x) = x\}$ неподвижных точек.

Впервые гомологическими методами задача вычисления степени эквивариантного отображения в описанных условиях изучалась при $G = \mathbb{Z}_k$ и простом k в семинаре П.А.Смита[1], результаты которого получили название теории Смита. Вся теория была распространена затем на случай любого $k \geq 2$ и полусвободного действия группы $\mathbb{Z}_k$ и развита в работах[2] [3]. В теории Смита вводятся так называемые индексы Смита, и степень $degf$ эквивариантного отображения $F : X \to X$ вычисляется (по модулю k) через эти индексы и степень сужения отображения f на подмножество F неподвижных точек заданного действия группы $\mathbb{Z}_k$, которое также является $\mathbb{Z}_k$-когомологической сферой.

[1]Смит П.А., "Прибавление «В» к книге С.Лефшеца «Алгебраическая топология»". М., 1949.

[2]Израилевич Я.А., "Индекс полусвободного периодического отображения". Мат.Заметки. 1973. т.13,№1.

[3]Израилевич Я.А., Мухамадиев Э.М., "К теории периодических отображений сфер". Седьмая летняя мат.школа. ИМ АН УССР, Киев, 1970.

Задачи, связанные с вычислением степени эквивариантных отображений относительно *неполусвободных* действий группы $\mathbb{Z}_k$, а также перестановочных с действиями двух различных конечных циклических групп, не укладываются в теорию Смита. Для решения подобных задач был привлечен так называемый метод спектральной последовательности Бореля[4 5 6], состоящий в следующем.

Пусть $E_{\mathbb{Z}_k}$ - универсальное, а $B_{\mathbb{Z}_k}$ - классифицирующее пространства для группы $\mathbb{Z}_k$. Известно, что $E_{\mathbb{Z}_k} = S^\infty$ - бесконечномерная сфера с каноническим свободным действием группы $\mathbb{Z}_k$, а $B_{\mathbb{Z}_k} = L^k_\infty$ - бесконечномерная линза - пространство орбит указанного действия $\mathbb{Z}_k$ на S^∞. При заданном действии группы $\mathbb{Z}_k$ на X пространство орбит $X_{\mathbb{Z}_k}$ диагонального действия $\mathbb{Z}_k$ на $X \times E$ расслаивается над $B_{\mathbb{Z}_k}$ со слоем X при помощи отображения π, индуцированного проекцией на сомножитель $\hat{\pi} : X \times E \to E$. Описанное расслоение $\pi : X_{\mathbb{Z}_k} \to B_{\mathbb{Z}_k}$ называется *расслоением Бореля*[7] для пространства X по действию группы $\mathbb{Z}_k$. Аналогично определяется относительное расслоение Бореля со слоем-парой (X, A), где A - подмножество, инвариантное относительно действия $\mathbb{Z}_k$.

Было введено понятие спектрального индекса[4] действия $\mathbb{Z}_k$ на паре когомологических сфер (X, A), определяемого с помощью единственного возможно нетривиального дифференциала спектральной последовательности расслоения Бореля, и получены аналоги основных теорем Смита, а также ряд более точных и тонких результатов[4 5 6]. Спектральный индекс является образующим элементом группы $\mathbb{Z}_k$, если действие этой группы свободно вне $\mathbb{Z}_k$-когомологической сферы A. Естественно возник вопрос, всегда ли такие инвариантные $\mathbb{Z}_k$-когомологические сферы существуют.

Утвердительный ответ на этот вопрос был получен Т.Н.Щелоковой (Фоменко) для любых действий группы $\mathbb{Z}_k$ на $\mathbb{Z}$-когомологической сфере, когда k есть степень простого числа[8]. А именно, было доказано, что

---

[4]Борисович Ю.Г., Израилевич Я.А., "Вычисление степени эквивариантного отображения методом спектральных последовательностей". Труды Мат.ф-та ВГУ, Воронеж, 1973, вып.X, с.1-12

[5]Израилевич Я.А., "О вычислении степени эквивариантного отображения методом спектральных последовательностей". Тр.мат.ф-та ВГУ. Воронеж, 1974, вып.12

[6]Борисович Ю.Г., Израилевич Я.А., Щелокова Т.Н., "К методу спектральной последовательности А.Бореля в теории эквивариантных отображений". Успехи Мат.наук, 1977, вып.№1(193)

[7]Borel A., "Seminar on transformation groups". Ann. of Math.Studies, 1960, №46

[8]Щелокова Т.Н., "О вычислении степени отображений, эквивариантных относительно действий группы $\mathbb{Z}_k$". Труды НИИМ ВГУ, Воронеж, 1975, вып. XX, стр.51-56

множество всех стационарных точек (то есть точек с нетривиальными группами изотропии) действия группы $\mathbb{Z}_k$ является в этом случае $\mathbb{Z}_k$-когомологической сферой. На основе этого была получена формула для вычисления (по модулю k) степени эквивариантного отображения $\mathbb{Z}$-когомологической сферы с действием группы $\mathbb{Z}_k$ в себя через степени сужений этого отображения на подмножества стационарных точек действий примарных циклических подгрупп группы $\mathbb{Z}_k$ и соответствующие спектральные индексы[9]. Была также обнаружена и исследована связь спектральных индексов с индексами Смита[10].

Однако если отображение $f : (X, A_1) \to (Y, A_2)$ пар *различных* когомологических сфер перестановочно с заданными на них действиями группы $\mathbb{Z}_k$, формальные размерности инвариантных относительно этих действий $\mathbb{Z}_k$-когомологических сфер A_1 и A_2 могут не совпадать, и степень сужения отображения f на A_1 в этом случае может быть не определена. Если $dimA_1 > dimA_2$, то из соответствующей коммутативной диаграммы следует, что степень отображения $f : X \to X$ равна нулю $(modk)$. Если же наоборот, $dimA_1 < dimA_2$, то вопрос о вычислении степени оставался открытым.

Следующим шагом было введение понятия *индекса эквивариантности* отображения[9] [11] и изучение некоторых его свойств. Для эквивариантного отображения $F : X \to Y$ между двумя когомологическими сферами X, Y, возможно различных размерностей, он определяется при $dimX \leq dimY$ как спектральный индекс вложения пространства X в цилиндр C_f отображения f. При $dimX > dimY$ индекс эквивариантности также определен с помощью единственного возможно нетривиального дифференциала соответствующей спектральной последовательности расслоения Бореля со слоем-парой (C_f, X). Таким образом, понятие спектрального индекса было обобщено на класс любых эквивариантных отображений когомологических сфер.

В диссертации исследованы дополнительные алгебраические свойства индексов эквивариантности, найдены недопустимые соотношения

[9]Щелокова Т.Н., "К задаче вычисления степени эквивариантного отображения". Сибирский Мат.Журн., том XIX, №2, 1978, с.426-435.

[10]Щелокова Т.Н., "К теории периодических отображений". Труды НИИМ ВГУ, Воронеж, 1974, вып.XV, с.75-80.

[11]Щелокова Т.Н., "К теории эквивариантных отображений когомологических сфер". Методы решения операторных уравнений. Сб.науч.трудов, Воронеж, 1978, с.155-158.

размерностей $\mathbb{Z}$-когомологических сфер с действиями группы $\mathbb{Z}_k$, связанных эквивариантным отображением, и формальных размерностей соответствующих подмножеств стационарных и неподвижных точек заданных действий. На основе этих результатов получены общие формулы для вычисления степени эквивариантного отображения $\mathbb{Z}$-когомологических сфер с действиями конечных и некоторых компактных групп. Полученные результаты содержат существенные обобщения результатов[12] [13] [14] [15] по вычислению степени эквивариантных отображений евклидовых сфер.

В диссертации исследуется также проблема минимизации множества $Fixf = \{x \in X \mid f(x) = x\}$ неподвижных точек эквивариантного отображения $f : X \to X$ компактного полиэдра X с действием конечной группы G. Постановка этой задачи связана с известной теорией Нильсена[16] [17]. Эквивалентность (по Нильсену) двух изолированных неподвижных точек означает, что существует соединяющий их путь α, гомотопный (при постоянных концах) своему образу $f \cdot \alpha$. Если гомологический индекс класса эквивалентности неподвижных точек Нильсена (ниже *кнт*) нетривиален, то этот кнт называется существенным. Число $N(f)$ существенных кнт (когда оно конечно) называется числом Нильсена отображения f. Число Нильсена является гомотопическим инвариантом и дает нижнюю оценку на число неподвижных точек отображения f в его гомотопическом классе. Классический результат теории Нильсена следующий[18]: для всякого непрерывного отображения f в себя компактного связного полиэдра X, не являющегося двумерным многообразием и не имеющего локально разделяющих точек, существует отображение в себя

---

[12] Красносельский М.А., "О вычислении вращения векторного поля на n-мерной сфере". ДАН СССР. 1955. т.101, №3.

[13] Забрейко П.П., "К теории периодически векторных полей". Вестн. Яросл. Ун-та, Ярославль, 1973, вып.2.

[14] Забрейко П.П., "К гомотопической теории периодических векторных полей". Геометрические методы в задачах алгебры и анализа. Сб.науч.трудов., Ярославль, 1980.

[15] Баланов З.И., Бродский С.Д., "Принцип сравнения Красносельского и продолжение эквивариантных отображений". Функц.анализ. Теория операторов: Сб.науч.трудов. Ульяновск, 1984.

[16] Jiang B., "Lectures on Nielsen fixed point theory". Providence (R.L.): Amer.Math.Soc.,1983. (Contemp.Math.: V.14,Amer.Math.Soc., 1982.).

[17] Brown R., "The Lefschetz fixed point theorem". Glenview (Ill.); London: Scott,Foresman Co., 1971.

[18] Jiang B., "On the least number of fixed points". American Journal of Mathematics, vol.102(1980), No.4, pp.749-763.

$\tilde{f}$, гомотопное f и такое, что $N(f) = \sharp(Fix(\tilde{f}))$.

Теория Нильсена развивалась многими авторами, были разработаны ее относительные версии[16 19 20 21 22 23]. Ряд существенных результатов имеется в направлении создания *эквивариантной версии теории Нильсена*[24 25 26 27 28 29 30]. В частности, П.Вонг доказал[29] теорему минимизации числа неподвижных точек эквивариантного отображения $f : X \to X$ G-пространства X, где G - конечная группа, при следующих *Стандартных Предположениях*:

1) X - компактное гладкое G-многообразие;

2) для каждого изотропического типа (H) (то есть класса сопряженности некоторой изотропической подгруппы H) данного действия группы G множество $X^H = \{y \in X | h(y) = y, h \in H\}$ - связно, и $dimX^H \geq 3$;

3) $dimX^H - dim(X^H - X_H) \geq 2$, где $X_H := \{x \in X | G_x = H\}$,
$G_x := \{h \in G | h(x) = x\}$.

При тех же Стандартных Предположениях результаты П.Вонга были обобщены на случай минимизации совпадений двух эквивариантных

---

[19] Shi Gen Hua (Shih Ken-Hua), "On the least number of fixed points and Nielsen Numbers". Acta Math.Sinica, vol.16(1966), No.2, pp.223-232.

[20] Schirmer H., "A relative Nielsen number". Pacific Journal of Mathtmatics, vol.122, No.2, 1986, pp.459-473.

[21] Schirmer Helga, "Fixed point sets of deformations of pairs of spaces". Topology and its Appl., 23(1986), pp.193-205.

[22] Schirmer H., "On the location of fixed points on pairs of spaces". Topology and its Applications, 30(1988), pp.253-266.

[23] Zhao X., "A relative Nielsen number for the complement". Lect. Notes in Math., vol.1411, 1989, Springer Verlag, pp.189-199.

[24] Wilczyński Dariusz, "Fixed point free equivariant homotopy classes". Fundamenta Mathematicae, CXXIII(1984), pp.47-59.

[25] Fadell Edward, Wong Peter, "On deforming G-maps to be fixed point free". Pac.J.Math, vol.132, No.2, 1988.

[26] Wong Peter, "On the location of fixed points of G-deformations". Topology Appl.,39(1991), 159-165.

[27] Wong Peter, "Equivariant Nielsen Fixed point theory for G-maps". Pacific.J.Math., 150(1991), pp.179-200.

[28] Wong Peter, "Equivariant Nielsen fixed point theory and periodic points". Contemporary Mathematics, 152(1993), pp.341-350.

[29] Wong Peter, "Equivariant Nielsen Numbers". Pacific.J.Math., vol.159, No.1, 1993, pp.153-175.

[30] Фоменко Т.Н., Zhu Jun, "Инвариант типа Нильсена для эквивариантных отображений, сохраняющих орбитную структуру". В сб.: Топологические методы нелинейного анализа (посвящ.70-летию Ю.Г.Борисовича), Воронеж, ВГУ, 2000, с.125-131.

отображений гладких многообразий[31].

В диссертации построен конструктивный алгоритм минимизации и, при некоторых дополнительных условиях, получена точная нижняя оценка числа неподвижных точек отображения, эквивариантного относительно действия конечной группы на компактном полиэдре *при более слабых размерностных условиях*, чем условия Стандартных Предположений. Для решения этой задачи в диссертации построены эквивариантные аналоги некоторых конструкций, предложенных в работах[18 23 19 20]. Используются также некоторые эквивариантные построения работ [24 27].

В диссертации рассматривается, кроме того, задача о минимизации множества $Coin(f,g) = \{x \in X | f(x) = g(x)\}$ совпадений двух отображений $f, g : X \to Y$ гладких многообразий в положительной коразмерности, то есть в случае, когда размерность многообразия-прообраза больше, чем размерность многообразия-образа. Эта задача, как и предыдущая, восходит к теории Нильсена. В процессе развития теория Нильсена была обобщена на случай минимизации совпадений двух отображений, прообразов подпространства, а также корней отображения (как прообразов заданной точки) в работах[32 33 34 35 36 37 38].

Минимизация совпадений двух отображений $f, g : X \to Y$ в этих работах рассматривалась при условии $dimX = dimY$. Две изолированные точки совпадения $x_1, x_2 \in Coin(f,g) \subset X$ отображений f, g называются Нильсен-эквивалентными, если существует такой соединяющий их путь α, что пути $f \cdot \alpha$ и $g \cdot \alpha$ гомотопны друг другу (с постоянными концами).

---

[31] Guo J., Heath Ph.R., "Equivariant coincidence Nielsen numbers". Topology Appl., 128(2003), No.2-3, pp.277-308.

[32] Dobreńko R., Kucharski Z., "On the generalization of the Nielsen number". Fund.Math., 1990, 134, p.1-14.

[33] Brown R.F., Schirmer H., "Nielsen theory of roots of maps of pairs". Topology and its Applications, 92(1999), pp.247-274.

[34] Brooks R., Wong P., "On Changing Fixed Points and Coincidences to Roots". Proc. AMS 115(1992), pp.527-533.

[35] Фролкина О.Д., "Относительная задача прообраза". Математические заметки, т.80, вып.2, 2006, с.282-295.

[36] Фролкина О.Д., "Оценка числа точек прообраза на дополнении". Вестник Московского Университета, Серия.I, 2006, No.1, с.17-25.

[37] Frolkina O., "Minimizing the number of Nielsen preimage classes". Geometry and Topology Monographs, 14(2008), pp.193-217.

[38] Фролкина О.Д., "Обобщенная задача прообраза". Диссертация на соискание степени канд.ф.-м.наук. Москва, МГУ, мех.-мат. ф-т, 2006.

В случае, когда пространства X, Y являются замкнутыми ориентированными многообразиями *одинаковых размерностей*, вводится гомологический индекс класса эквивалентности точек совпадения, являющийся обобщением гомологического индекса класса Нильсена неподвижных точек. Классы Нильсена совпадений с ненулевыми индексами называются существенными, а их число (если оно конечно) $N(f, g)$ - числом Нильсена совпадений данной пары отображений (f, g). Хороший обзор, комментарии и ссылки по теории совпадений можно найти в статье[39].

Наличие двух различных пространств в теории совпадений порождает разнообразие рассматриваемых задач, в частности, в случаях равных и различных размерностей пространств. Что касается случая *одинаковых размерностей*, то теория совпадений Нильсена и ее относительные и эквивариантные версии содержатся в работах[39] [40] [41] [42] [43] [31] [44] [45] и др.

В случае *различных размерностей* пространств проблема построения аналога теории Нильсена совпадений пары отображений не укладывается в предыдущую схему и представляет собой отдельную, более сложную задачу. В этом случае множество совпадений может иметь положительную размерность. Как удалить или минимизировать совпадения в этой ситуации? Имеются различные подходы к этой проблеме. Один из них представляет собой отыскание когомологических препятствий к продолжению данной пары отображений (f, g) с k-мерного остова X на его $k+1$-мерный остов без совпадений[46] [47].

---

[39] Богатый С.А., Гонсалвес Д.Л., Цишанг Х., "Теория совпадения: Проблема минимизации". Труды МИАН им. В.А.Стеклова, 1999,т.225, с.52-86.

[40] Wong P., "Homotopy theory in Nielsen coincidence theory". Proc.of Int.Conf.on homotopy theory and Nielsen fixed point theory. April 10, 2000, pp.69-77.

[41] Gonçalves D.L., Wong P.N.-S., "Nilmanifolds are Jiang-type spaces for coincidence". Forum Math., 13(2001), pp.133-141.

[42] Dobreńko R., Jezierski J., "The coincidence Nielsen number in non-orientable manifolds". Rocky Mountain Journal of Mathematics, Vol.23, Number 1, Winter 1993.

[43] Guo J., Heath Ph.R., "Coincidence theory on the complement". Topology and its Appl., 95(1999), pp.229-250.

[44] Jezierski J., "The Relative coincidence Nielsen number". Fund.Math., 149(1996), pp.1-18.

[45] Chan Gyu Jang, Sik Lee, "A relative Nielsen Number in coincidence theory". J.Korean Math.Soc, 32(1995), No.2, pp.171-181.

[46] Gonçalves D., Wong P., "Obstruction theory and coincidences of maps between nilmanifolds". Arch.Math., 84(2005), pp.568-576.

[47] Gonçalves D., Jezierski J., Wong P., "Obstruction theory and coincidences in positive codimension". *Preprint*, 2002, Bates College.

Другой подход представляет попытку ввести инварианты типа числа Нильсена, используя теории бордизмов. В работе П.Савельева[48] проблема минимизации рассматривается по отношению к группе сингулярных бордизмов множества совпадений $Coin(f,g)$. В работах У.Кошорке[49] [50] [51] [52] [53] вводятся аналоги чисел Нильсена как элементы сингулярных (стабильных или нестабильных) оснащенных групп бордизмов пространств X или $E(f,g)$, где $E(f,g)$ есть расслоение типа Гуревича над X со слоем над точкой $x \in X$, состоящим из путей, соединяющих точки $f(x), g(x)$. Множество совпадений $Coin(f,g)$ отображений f и g и его связные компоненты рассматриваются как сингулярные подмногообразия в X или в $E(f,g)$. В работах У.Кошорке получены *теоремы существования* гомотопий, приводящих к минимизации множества совпадений пары отображений $f, g : M^{n+m} \to N^n$, в основном в ситуациях, когда либо $0 < m < n-2$, либо $N = S^1$, либо M и N - сферы (при некоторых дополнительных условиях). Число $m > 0$ называется *положительной коразмерностью* задачи.

В диссертации задача минимизации совпадений рассматривается в следующей постановке. Пусть заданы два непрерывных отображения $f, g : M^{n+m} \to N^n$ между гладкими многообразиями указанных размерностей, и $m > 0, n > 2$. Пусть образ $(f \times g)(M)$ пересекается с диагональю $\Delta_N \in N^2$ в конечном числе точек, и все множество совпадений $Coin(f,g)$, состоящее из общих прообразов точек диагонали (а значит, и каждый из этих прообразов) является замкнутым гладким m-подмногообразием в M. В такой ситуации вполне естественно рассмотреть вопрос о минимизации множества совпадений по отношению к этим прообразам и/или их связным компонентам.

По аналогии с эквивалентностью Нильсена точек совпадения отображений пространств одинаковых размерностей, в диссертации введено

---

[48] Saveliev P., "Higher order Nielsen Numbers". Fixed Point Theory and its Applications, 2005:1(2005), pp.47-66.

[49] Koschorke U., "Nielsen coincidence theory in arbitrary codimensions". J. reine angew. Math., 598(2006)pp.211-236.

[50] Koschorke U. Nonstabilized Nielsen coincidence invariants and Hopf-Ganea homomorphisms. *Preprint*, Siegen, 2005.

[51] Koschorke U., "Geometric and homotopy theoretic methods in Nielsen coincidence theory". Fixed Point Theory and App.(2006), article ID 84093, pp.1-15.

[52] Koschorke U., "Coincidence theory in arbitrary codimensions: the minimizing problem". OberWolfach Report (2004), Vol.1, Heft 4, pp.2342-2344.

[53] Koschorke U., "Coincidence free pairs of maps". *Preprint*, Siegen, 2006.

специальное понятие "(f,g)-связанности" общих прообразов двух различных точек (или связных компонент таких прообразов) при действии отображения $f \times g$, не являющееся, вообще говоря, эквивалентностью. Два таких гладких m-подмногообразия A и B называются (f,g)-*связанными*, если они бордантны в M, связывающий их бордизм переводится отображением $f \times g$ в некоторый путь в $N \times N$, гомотопный пути, лежащему на диагонали, и сужение отображения $f \times g$ на малую окрестность этого бордизма обладает дополнительными свойствами (точное определение см. на стр.22 ниже)

В диссертации построен конструктивный алгоритм частичной минимизации множества описанных m-подмногообразий совпадений. А именно, найдены достаточные условия для "склейки" таких (f,g)-связанных m-подмногообразий совпадений, а также для перемещения одного из них посредством специальных локальных гомотопий отображений f, g. Кроме того, найдены достаточные условия для удаления m-подмногообразия совпадений, бордантного нулю, которое переводится отображением $f \times g$ в точку. Получены новые результаты, не являющиеся следствиями из результатов У.Кошорке, и позволяющие частично минимизировать число общих прообразов диагональных точек (или их компонент) при действии отображения $(f \times g)$.

С целью изучения вопросов существования и аппроксимации неподвижных точек и совпадений в диссертации предложен открытый автором на основе ряда геометрических наблюдений общий итерационный принцип - принцип каскадного поиска. В нем используется введенное автором понятие поискового функционала. Этот принцип позволяет построить на метрическом пространстве процесс поиска нулей такого функционала, то есть процесс последовательного приближения к его нуль-подпространству, руководствуясь на каждом шаге лишь значением функционала в данной точке, с оценкой расстояния до нуль-подпространства на каждом шаге аппроксимации.

В качестве приложений этого общего принципа получены новые методы решения таких задач, как поиск и аппроксимация прообраза замкнутого подпространства при заданном отображении метрических пространств, а также поиск и аппроксимация множества общих неподвижных точек, множества совпадений, множества общих прообразов подпространства, множества общих корней - для любого конечного набора отображений метрических пространств. При этом рассматриваются как однозначные, так и многозначные неотрицательные функционалы и соответственно, однозначные и многозначные отображения.

Поставленная задача и полученные результаты удобно формулируются в терминах дискретных динамических систем. Под дискретной динамической системой с фазовым пространством X и полугруппой сдвигов $(\mathbb{Z}_{\geq 0}, +)$ понимают произвольное действие этой полугруппы на X, то есть задание на X отображения $G = G^1 : X \to X$, представляющего $1 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ и называемого *генератором.* Его итерации $\{G^n\}_{n=0,1,\dots}$, где $G^0 := id_X$, и задают очевидным образом представление указанной полугруппы. Такая динамическая система называется *каскадом*[54] на X. Для каскадов, у которых генератор G вообще говоря многозначен, в диссертации используется термин *мультикаскад.* Предельным множеством мультикаскада называется совокупность пределов его траекторий, то есть последовательностей вида $\{x_n\}_{n=1,2,\dots}$, где $x_{k+1} \in G(x_k), k = 1, 2, \dots$.

Таким образом, рассматривается задача построения по заданному (однозначному или многозначному) неотрицательному функционалу на метрическом пространстве X мультикаскада, предельное множество которого непусто и совпадает с нуль-подпространством этого функционала. Для ее решения автором введено понятие так называемых *поисковых* функционалов.

Пусть заданы числа $\alpha, \beta, 0 < \beta < \alpha$. Однозначный неотрицательный функционал $\varphi : X \to \mathbb{R}_+$ называется (α, β)-*поисковым* на X (по отношению к своему нуль-подпространству $Nil(\varphi) := \{x \in X \mid \varphi(x) = 0\}$), если для каждого $x \in X$ существует точка $x' \in X, \rho(x, x') \leq \frac{\varphi(x)}{\alpha}$, такая, что $\varphi(x') \leq \frac{\beta}{\alpha} \cdot \varphi(x)$. Многозначный неотрицательный функционал $\Phi : X \to P(\mathbb{R}_+)$, действующий в совокупность $P(\mathbb{R}_+)$ непустых подмножеств множества неотрицательных вещественных чисел, называется (α, β)-*поисковым*, если таковым является однозначный функционал $\Phi_*, \Phi_*(x) := \inf\limits_{\gamma \in \Phi(x)} \{\gamma\}$. Для многозначного функционала Φ имеется два понятия нуль-подпространства: обычное $Nil(\Phi) := \{x \in X | 0 \in \Phi(x)\}$ и расширенное $Nil_+(\Phi) := \{x \in X | \Phi_*(x) = 0\}$

В диссертации предложены две версии общего *принципа каскадного поиска* на метрическом пространстве, соответствующие использованию однозначных или многозначных поисковых функционалов.

Принцип каскадного поиска дает решение сформулированной выше

[54] Удачный термин *каскад* предложен Д.В.Аносовым.

задачи и имеет целый ряд приложений, которые содержат в качестве частных случаев несколько известных теорем о неподвижных точках и совпадениях отображений. Например, из принципа каскадного поиска вытекают известный принцип сжимающих отображений[55], а также несколько теорем А.В.Арутюнова[56] о существовании и аппроксимации совпадений двух отображений, одно из которых накрывающее, а другое липшицево.

Следует отметить, что идея принципа каскадного поиска появилась у автора благодаря знакомству на семинаре факультета ВМК МГУ под руководством академиков РАН В.А.Ильина и Е.И.Моисеева с замечательной работой А.В.Арутюнова[56].

В качестве новых приложений принципа каскадного поиска получены теоремы о приближении к прообразу замкнутого подпространства при действии отображения метрических пространств, с оценкой на каждом шаге расстояния до этого прообраза. В более общей формулировке - теоремы о приближении к общему прообразу замкнутого подпространства при действии конечного набора отображений, а также к подмножеству общих корней конечного набора отображений, соответствующих их общему значению. Получены также теоремы о приближении к множеству точек совпадения произвольного конечного набора отображений метрических пространств, а также теоремы о приближении к подмножеству общих неподвижных точек конечного набора отображений метрического пространства в себя.

Кроме этого, в диссертации предложен вариант *каскадного поиска по графику отображения*, дающий более тонкие результаты по решению перечисленных выше задач для любых конечных наборов отображений метрических пространств.

Определения и терминологию теории многозначных отображений можно найти в книге [57].

В диссертации решены также вопросы устойчивости предложенных

---

[55]Колмогоров А.Н., Фомин С.В., "Элементы теории функций и функционального анализа Наука, Москва, 1972, стр.70.

[56]Арутюнов А.В., "Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки". ДАН, 2007, том 416, є2, с.151-155.

[57]Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В., "Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений". КомКнига, Москва, 2005.

версий принципа каскадного поиска. Рассмотрены *две постановки задачи об устойчивости*: слабая и сильная устойчивость.

Под *слабой устойчивостью* каскадного поиска мы понимаем устойчивость подмножества $\gamma_\varphi(x)$ предельных точек поискового мультикаскада, где $\gamma_\varphi(x) = \{\xi \mid \rho(x,\xi) \leq \frac{\varphi_*(x)}{\alpha-\beta}\}$, φ - соответствующий (α,β)-поисковый функционал.

Найдены достаточные условия для слабой устойчивости по отношению к малому изменению начальной точки x, а также по отношению к малому изменению самого мультикаскада (точнее, определяющего его поискового функционала φ).

Отметим, что постановка задачи о слабой устойчивости и идеи доказательства устойчивости в такой постановке представляют собой аналог и одновременно существенное обобщение задачи об устойчивости совпадений накрывающего и липшицева отображений, решенной в работе А.В.Арутюнова [58], и в значительной мере обязаны своим происхождением именно этой работе.

Под *сильной устойчивостью* каскадного поиска мы понимаем устойчивость множества $\tilde{\gamma}_\varphi(x)$ всех предельных точек поискового мультикаскада, *достижимых из данной начальной точки* x по траекториям соответствующего мультикаскада. Подмножество $\tilde{\gamma}_\varphi(x)$ содержится в множестве $\gamma_\varphi(x)$, но они могут отличаться (см. Пример 1 главы 5 диссертации).

Как и в случае слабой устойчивости, найдены достаточные условия для сильной устойчивости каскадного поиска по отношению к малому изменению начальной точки, а также достаточные условия для сильной устойчивости по отношению к малому изменению самого поискового мультикаскада (то есть определяющего его поискового функционала).

Цель работы:

- Получить общие формулы для вычисления степени эквивариантного отображения целочисленных когомологических сфер (относительно действий конечных или некоторых компактных групп) в терминах индексов эквивариантности.

- Построить алгоритм минимизации (обобщающий ранее известные алгоритмы), в эквивариантном гомотопическом классе, множества

[58] Арутюнов А.В., "Устойчивость точек совпадения и свойства накрывающих отображений". Математические Заметки, т.86, вып.2, август 2009, стр.163-169.

неподвижных точек эквивариантного отображения компактного полиэдра размерности не менее двух с действием конечной группы.

- Изучить возможности конструктивной минимизации множества совпадений двух непрерывных отображений гладких многообразий, действующих с понижением размерности.

- Найти и исследовать на устойчивость общий итерационный принцип, аналогичный методу градиентного спуска, для негладких функционалов в метрических пространствах, пригодный для поиска и аппроксимации совпадений, общих прообразов, общих корней, общих неподвижных точек конечных наборов однозначных и многозначных отображений метрических пространств.

Методы исследования. В работе используются методы и понятия алгебраической топологии (теория гомотопий, теория когомологий, когомологическая спектральная последовательность расслоения), комбинаторной топологии (симплициальный комплекс, полиэдр с действием конечной группы), гладкой топологии (гладкие многообразия, бордизмы, функции Морса), а также теории групп (конечная, компактная группа, силовская подгруппа) и методы топологии многозначных отображений метрических пространств (поисковые функционалы, секвенциально полунепрерывные сверху многозначные отображения, дискретные динамические системы - каскады и мультикаскады - и их устойчивость).

Научная новизна. Основные результаты диссертации, выносимые на защиту, являются новыми и состоят в следующем.

1. Развита теория введенного ранее автором индекса эквивариантности отображения когомологических сфер с действиями конечной циклической группы. На основании этого получены общие формулы для вычисления степени эквивариантных отображений целочисленных когомологических сфер с действиями конечных и некоторых компактных групп.

2. Получена теорема минимизации (обобщающая известные ранее результаты) в эквивариантном гомотопическом классе множества неподвижных точек эквивариантного отображения компактного полиэдра размерности не менее двух с действием конечной группы.

3. Построен конструктивный алгоритм частичной минимизации множества совпадений двух непрерывных отображений гладких многообразий в положительной коразмерности (то есть когда размерность многооб-

разия-образа меньше размерности многообразия-прообраза), в ситуации, когда число общих значений заданных отображений конечно, и их общие прообразы есть гладкие подмногообразия.

4. Открыт общий итерационный принцип поиска нулей введенных автором поисковых функционалов (принцип каскадного поиска) на метрическом пространстве. Предложен итерационный принцип каскадного поиска по графику отображения метрических пространств. С помощью этих принципов получен ряд существенных результатов о существовании и аппроксимации совпадений, общих прообразов замкнутого подпространства, общих корней, общих неподвижных точек для конечных наборов однозначных и многозначных отображений метрических пространств.

5. Доказана устойчивость методов каскадного поиска в двух предложенных автором формулировках - слабая и сильная устойчивость - относительно малых изменений начальной точки, а также малых возмущений исходного поискового функционала или соответствующих отображений.

Практическая и теоретическая ценность. Работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть полезны для дальнейшего развития теории неподвижных точек и совпадений, теории аппроксимаций, теории многозначных отображений.

Апробация полученных результатов. Результаты диссертации докладывались и обсуждались на следующих научных семинарах и конференциях.

Семинары, спецкурс и локальные конференции:
1)Семинар под руководством проф. М.М.Постникова и проф. А.В.Чернавского, Мех-мат ф-т, МГУ, 1986; 2)Спецкурс автора в Университете Британской Колумбии, г.Ванкувер, Канада, 1991; 3)Семинар под руководством проф. Дж.Френсиса (George K.Francis), университет штата Иллинойс, г. Шампань-Урбана, США, 1991; 4)Семинар под руководством проф. Питера Гилки (Peter Gilky), университет штата Орегон, г.Юджин, США, 1991; 5)Семинар под руководством проф. Х.Цишанга (H. Zieshang), Рурский университет, г.Бохум, Германия, 1993; 6) Семинар им. М.М.Постникова под руководством чл.-корр.РАН В.М.Бухштабера, проф. А.В.Чернавского и др., Мех-мат ф-т, МГУ, 2006, 2008(апрель), 2008(ноябрь); 7)Семинар под руководством акад.РАН Д.В.Аносова и проф. А.М.Степина, Мех-мат ф-т, МГУ, 2008; 8)Семинар под руководством проф. В.В.Федорчука, Мех-мат ф-т, МГУ, 2008; 9)Семинар под руководством проф. В.М.Тихомирова, Мех-мат ф-т, МГУ, 2008; 10)Се-

минар под руководством проф. А.С.Мищенко, Мех-мат ф-т, МГУ, 2008; 11)Международный семинар "Оптимизация и аппроксимация" под руководством проф. В.М.Тихомирова, Мех-мат ф-т, МГУ, 2009; 12)Конференция "Ломоносовские Чтения", ф-т ВМК МГУ, 2008; 13)Конференция "Тихоновские Чтения", ф-т ВМК МГУ- 2009; 14)Конференция "Ломоносовские Чтения", ф-т ВМК МГУ, 2010.

Международные конференции:
1)Международная Конференция по топологии и ее приложениям. Баку, 1987; 2)IX Международная конференции по топологии и ее приложениям, Киев, 1992; 3)X Международная Конференция по Топологии и ее Приложениям, Киев, 1995; 4)XX Воронежская Зимняя Математическая Школа (ВЗМШ), Воронеж, ВГУ, 1999; 5)Международная конференция "Александровские чтения-2006", посвященная 110-летию со дня рождения Павла Сергеевича Александрова, 30 мая-02 июня 2006г., Москва, МГУ, Мех.-мат. ф-т; 6)Международная Конференция "Дифференциальные уравнения и топология", посвященная 100-летию со дня рождения Л.С.Понтрягина. Москва, 17-22 июня 2008; 7)Пятая Международная Конференция по Дифференциальным и Функционально-Дифференциальным Уравнениям, Москва, Россия, август 17-24, 2008; 8) Международная Конференция "Современные проблемы математики, механики и их приложений", посвященная 70-летию В.А.Садовничего. 30 марта-02 апреля 2009г., МГУ, г.Москва; 9)Международная Конференция по Топологии и ее Приложениям - 2010, июнь 26-30, г.Нафпактос, Греция.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 14 работах автора, список которых приведен в конце автореферата [1-14]. Работ, написанных в соавторстве, нет.

Структура и объем диссертации. Диссертация объемом 213 страниц состоит из введения, пяти глав, разбитых на параграфы, и списка цитированной литературы из 107 наименований.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ.

В первой главе диссертации изучаются свойства индексов эквивариантности отображений когомологических сфер. Все рассматриваемые пространства предполагаются паракомпактными хаусдорфовыми с конечно-порожденными целочисленными когомологиями Чеха.

Пусть X, Y - $\mathbb{Z}_k$-когомологические сферы размерностей m и n соответственно. Рассмотрим когомологическую спектральную последовательность относительного расслоения Бореля со слоем-парой (C_f, X) (см.

определение расслоения Бореля выше, на стр.2). Поскольку цилиндр C_f отображения $f : X \to Y$ ретрагируется на Y, будем обозначать когомологии пространства C_f и пары (C_f, X) соответственно через $H^*(Y)$ и $H^*(Y, X)$, опуская для краткости указание на отображение f и группу коэффициентов $\mathbb{Z}_k$.

Индекс эквивариантности $J(f) \in \mathbb{Z}_k$ *отображения* f определяется из равенств:

а) $\Phi^f_{(Y,X)}(u^n) = J(f) \cdot u^m$, если $m \leq n$,

б) $\Phi^f_{(Y,X)}(u^m) = J(f) \cdot u^n$, если $m > n$,

где u^n, u^m - ориентации когомологических сфер Y, X соответственно. Отображение $\Phi^f_{(Y,X)}$ когомологий (с коэффициентами в $\mathbb{Z}_k$) задается так:

1)при $m < n$, $\quad \Phi^f_{(Y,X)} : H^n(Y) \xleftarrow{j} H^n(Y,X) \xleftarrow{\gamma} E_2^{0,n} \xleftarrow{\tau} E_{n-m}^{0,n} \xrightarrow{d_{n-m}}$

$$\xleftarrow{d_{n-m}} E_{n-m}^{n-m,m+1} \xrightarrow{\tau} E_2^{n-m,m+1} \xrightarrow{\gamma} H^{m+1}(Y,X) \xleftarrow{\alpha} H^m(X);$$

2) при $m > n$, $\quad \Phi^f_{(Y,X)} : H^m(X) \xrightarrow{\alpha} H^{m+1}(Y,X) \xleftarrow{\gamma} E_2^{0,m+1} \xleftarrow{\tau}$

$$\xleftarrow{\tau} E_{m-n+2}^{0,m+1} \xrightarrow{d_{m-n+2}} E_{m-n+2}^{m-n+2,n} \xrightarrow{\tau} E_2^{m-n+2,n} \xrightarrow{\gamma} H^n(Y,X) \xleftarrow{j} H^n(Y);$$

3) при $m = n$, $\quad \Phi^f_{(Y,X)} := f^* : H^n(Y) \to H^n(X)$,

где α, j - гомоморфизмы точной последовательности пары (C_f, X), $\gamma : E_2^{p,q} = H^p(B_k; H^q(Y,X) \cong H^q(Y,X)$ - канонический изоморфизм на группу коэффициентов, τ - выбор представителя подфактор-группы $E_q^{**}, q > 2$, в группе E_2^{**}, d_* - дифференциал спектральной последовательности расслоения Бореля со слоем-парой (C_f, X).

Пусть три $\mathbb{Z}_k$-когомологических сферы A, X, Y с действиями группы $\mathbb{Z}_k$, имеющие размерности r, m, n соответственно, связаны эквивариантными (относительно заданных действий группы $\mathbb{Z}_k$) отображениями $A \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} Y$. Доказано (Теорема 1 первой главы), что ядра и коядра гомоморфизмов $\Phi(f)$, $\Phi(g)$, $\Phi(g{\cdot}f)$, определяющих индексы эквивариантности отображений $f, g, g \cdot f$, и их гомоморфизмы, индуцированные отображениями точных последовательностей пар (C_f, A), (C_g, X), (C_{gf}, A) и соответствующими дифференциалами когомологических спектральных последовательностей расслоений Бореля, образуют шестичленные точные последовательности. Кроме того, при соотношениях размерностей $r < n < m$, $m < r < n$, и $n < m < r$ все гомоморфизмы $\Phi(f)$, $\Phi(g)$, $\Phi(g \cdot f)$ (и соответствующие индексы эквивариантности) тривиальны.

Пусть теперь группа $\mathbb{Z}_k$ действует на $\mathbb{Z}$-когомологических сферах X_1, X_2, и S_{1j}, S_{2j} - соответствующие множества стационарных точек (то есть точек с нетривиальными группами изотропии) действий на X_1, X_2 подгруппы $\mathbb{Z}_{k_j}$ группы $\mathbb{Z}_k$, где $k_j = p_j^{\alpha_j}$ - степень простого числа - из примарного разложения $k = k_1 \cdot ... \cdot k_l$. Тогда, как было ранее доказано[8], S_{1j}, S_{2j} - $\mathbb{Z}_{k_j}$-когомологические сферы ($j = 1, ..., l$). Пусть формальные размерности $\mathbb{Z}_{k_j}$-когомологических сфер X_1, X_2, S_1, S_2 равны соответственно m, n, r, q (при этом всегда $-1 < r < m, -1 < q < n$), и $f : X_1 \to X_2$ - эквивариантное отображение. В первой главе доказано следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 4. *В описанной ситуации из всех возможных соотношений размерностей r, q, m, n (с учетом неравенств: $r \le m, q \le n$ - их всего 6) индексы $J(f)$ и $J(f|_{S_{1j}})$ одновременно равны нулю (в группе $\mathbb{Z}_{k_j}$), если размерности r, q, m, n находятся в одном из следующих трех соотношений:* 1)$r < q < n < m$, 2)$q < r < m < n$, 3)$q < r < n < m$. *Таким образом, индекс эквивариантности $J(f)$ (относительно действий подгруппы $\mathbb{Z}_{k_j}$) может быть отличен от нуля (в $\mathbb{Z}_{k_j}$) лишь при соотношениях размерностей $r < q < m < n, r < m < q < n, q < n < r < m$, и его нетривиальность полностью определяется нетривиальностью индекса $J(f|_{S_{1j}})$.* $\square$

Далее рассматриваются эквивариантные отображения относительно *действий двух различных конечных циклических групп.* Пусть X, Y- когомологические L-сферы размерностей m и n соответственно для L, равного $\mathbb{Z}_k$ и $\mathbb{Z}_l$, где $k = lq, l > 1, q > 1$. Пусть на X действует группа $\mathbb{Z}_k$, на Y - группа $\mathbb{Z}_l$. Пусть $\varphi : \mathbb{Z}_k \to \mathbb{Z}_l$ - фиксированный гомоморфизм, переводящий единицу $\mathbb{Z}_k$ в единицу $\mathbb{Z}_l$, и отображение $F : X \to Y - \varphi$-эквивариантно, то есть $f \cdot T = \varphi(T) \cdot f$. В этой ситуации определен индекс эквивариантности $J_k^k(f)$ относительно действий в обоих пространствах группы $\mathbb{Z}_k$, а также, при некоторых условиях, и индекс эквивариантности $J_l^l(\bar{f})$ отображения $\bar{f} : \bar{X} \to Y$, относительно соответствующих действий группы $\mathbb{Z}_l$, где $\bar{X}$ - пространство орбит по действию подгруппы $Ker\varphi = \mathbb{Z}_q$, $\bar{f}$ - соответствующее сужение отображения f. Получена формула взаимосвязи этих индексов (Лемма 4 первой главы), обобщающая соответствующий результат работы[4], и некоторые полезные следствия из нее (Следствие 1 и Теорема 5 первой главы).

Исследования М.А.Красносельского[12] и П.П.Забрейко[13] [14] по вычислению степени эквивариантного отображения евклидовых сфер были продолжены З.И.Балановым и С.Д.Бродским[15]. Ими получено утверждение (сформулированное как Теорема 8 в первой главе диссертации) о равенстве (соответственно о сравнимости по модулю k) степеней G-эквивариантных отображений евклидовой сферы, гомотопных на множестве всех стационарных точек заданного действия группы G, если G - компактная не вполне несвязная группа (соответственно, если G - конечная группа порядка $|G| = k$).

В первой главе диссертации решается аналогичная задача для эквивариантных отображений *$\mathbb{Z}$-когомологических сфер*. Следующая теорема представляет собой основное утверждение о степени отображения, эквивариантного относительно действий конечной группы.

ТЕОРЕМА 9. *Пусть X_1, X_2 - $\mathbb{Z}$-когомологические n-сферы $(n > 0)$ с действиями конечной группы G, при которых каждый элемент $g \in G$ действует гомеоморфизмом степени 1. Пусть $|G| = k, k = k_1 \cdot k_2 \cdot \ldots \cdot k_l$ - каноническое примарное разложение числа k. Выберем для каждого сомножителя $k_j = p_j^{\alpha_j}$ - степени простого числа - из канонического примарного разложения порядка k - по одной силовской подгруппе G_j, а в ней - циклическую подгруппу $\mathbb{Z}_{\bar{k}_j}$ максимального порядка $\bar{k}_j$. Пусть $F_{1j} \subseteq X_1, F_{2j} \subseteq X_2$ - множества стационарных точек действий выбранных подгрупп $\mathbb{Z}_{\bar{k}_j}$, и $\gamma_{j1} : F_{1j} \to X_1, \gamma_{j2} : F_{2j} \to X_2$ - соответствующие вложения. Тогда имеет место следующая формула для вычета по модулю k целочисленной степени $degf$ эквивариантного отображения $f : X_1 \to X_2 : [degf]_{\bar{k}} = \sum\limits_{1 \le j \le l} \left[\frac{\bar{k}}{\bar{k}_j}\right]_{\bar{k}_j}^{-1} \cdot \frac{\bar{k}}{\bar{k}_j}[J(\gamma_{j1})]_{\bar{k}_j}^{-1} \cdot J(\gamma_{j2})_{\bar{k}_j} \cdot J(f|_{F_{j1}})_{\bar{k}_j}$, где $\bar{k} = \bar{k}_1 \cdot \bar{k}_2 \cdot \dots \cdot \bar{k}_l$ - произведение всех порядков максимальных циклических подгрупп в силовских p_j-подгруппах группы G; Если силовские p_j-подгруппы G_j - циклические порядков $|G_j| = k_j$, то $\bar{k} = k$; $[\quad]_q^{-1}$ означает обращение элемента в кольце $\mathbb{Z}_q$.*$\square$

Отметим, что в случае цикличности всех силовских подгрупп конечной группы G, Теорема 9 дает существенное усиление второй части упомянутого результата[15] (для конечной группы) даже в случае евклидовых сфер X_1, X_2.

Следующий результат первой главы диссертации дает существенное усиление (даже для случая евклидовых сфер) утверждения первой части того же результата[15], то есть для случая действий компактной не вполне несвязной группы.

ТЕОРЕМА 10. *Пусть на $\mathbb{Z}$-когомологических n-сферах X, Y действует (гомеоморфизмами степени 1) компактная не вполне несвязная топологическая группа G (то есть не являющаяся дискретной), и $\{G_k \cong$*

$\mathbb{Z}_k\}_{k\geq 2}$ - выделенная совокупность конечных циклических подгрупп группы G. Пусть $F = \bigcup\limits_{k\geq 2} F_k$, где F_k - объединение множеств стационарных точек действий всех силовских подгрупп группы $G_k, k \geq 2$. Пусть эквивариантные отображения $f, g : X \to Y$ эквивариантно гомотопны на множестве F. Тогда их степени $degf, degg$ совпадают в $\mathbb{Z}$.

Во второй главе диссертации решается задача минимизации множества неподвижных точек эквивариантного отображения компактного полиэдра с действием конечной группы G при более слабых размерностных условиях, чем условия Стандартных Предположений, сформулированные выше на стр.5, и при некоторых дополнительных условиях на заданное действие группы G.

Основной результат второй главы (Теорема 5 ниже) представляет собой, с одной стороны, обобщение упомянутого выше классического результата теории Нильсена[18] на эквивариантный случай относительно действия конечной группы G, а с другой стороны, является обобщением результата работы П.Вонга[29] при более слабых размерностных предположениях. Во второй главе вычислены наименьшее число неподвижных точек и наименьшее число неподвижных орбит в G-эквивариантном гомотопическом классе заданного эквивариантного отображения компактного полиэдра при некоторых дополнительных условиях.

Прежде чем сформулировать эту теорему, приведем кратко все нужные определения и обозначения.

Локально разделяющая точка полиэдра X - это точка $x \in X$, у которой существует такая окрестность $U = U(x)$, что $U \setminus x$ - несвязное множество. *Группа Вейля* подгруппы H группы G - это факторгруппа $WH = NH/H$, где $NH = \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}$ - нормализатор подгруппы H в G. *Группа изотропии* или *стационарная подгруппа* точки $x \in X$ (при действии группы G) - это группа $G_x = \{g \in G \mid gx = x\}$. *Изотропический тип* пространства X - это класс сопряженности (H) подгруппы H группы G, для которой существует точка $x \in X$ такая, что $H = G_x$. Будем говорить, что $(H) \leq (K)$ для двух изотропических типов (H) и (K), если группа H сопряжена некоторой подгруппе группы K. Под *допустимым упорядочением* изотропических типов мы будем понимать такое их упорядочение, при котором из $(H_i) \leq (H_j)$ следует: $j \leq i$, то есть в допустимом упорядочении изотропический тип большей подгруппы появляется раньше.

Для изотропической подгруппы H, путь s в X^H, концы которого принадлежат X_H , назовем *правильно H-возвращаемым*, если он гомотопен некоторому пути $s' : I \to X$ (гомотопия относительно концов) такому, что $s'(t) \in X_H$ для всех $t, t \in I$, причем $hs'(I) \cap h's'(I) = \emptyset$ для всех $h, h' \in WH$, $h \neq h'$, если концы пути s не принадлежат одной и той же WH-орбите, или $s'(I) \cap hs'(I) = s(1)$, если $s(1) = hs(0)$.

Будем говорить, что G-пространство X обладает *Контролируемыми Орбитными Типами Путей* (ниже: *КОТП-условие*), если для любого изотропического типа (H) все пути в X^H с концами в X_H являются правильно H-возвращаемыми.

Будем говорить, что G-пространство X удовлетворяет *G-эквивариантным условиям Джианга (($G - J$)-условия* ниже), если для всякого его изотропического типа (H) выполнены следующие 4 условия:

1)в X_H существует 1-мерный симплекс σ^1, являющийся гранью не менее чем трех двумерных симплексов, также принадлежащих X_H; 2)замыкания звезд симплексов WH-орбиты симплекса σ^1 не пересекаются друг с другом; 3)каждую точку $x \in X_H$ можно соединить путем с некоторым симплексом $g\sigma^1, g \in WH$; 4) в X^H нет локально разделяющих точек.

Пусть (H) - изотропический тип данного действия группы G на X. Выберем допустимое упорядочение $(H) = (H_m) < (H_{m-1}) < ... < (H_1)$ на множестве изотропических типов $\mathcal{S}_H = \{(H_k) \mid (H) \leq (H_k)\}$. Предполагается, что действие группы G таково, что для всех $i, 1 \leq i \leq m$, множества $X^{(H_i)}$ непусты, и при $i < j$ всегда $X^{(H_i)} \subset X^{(H_j)}$. Возникает возрастающая фильтрация G-инвариантных подпространств: $X_1 \subset ... \subset X_m = X^{(H)}$, где $X^{(H)} = GX^H, X_i = \{x \in X^{(H)} \mid (G_x) = (H_j), j \leq i\}$; $i = 1, 2, ..., m$.. Обозначим $X_j^{H_i} := X_j \cap X^{H_i}$ для каждого $j, 1 \leq j < i$.

Будем говорить, что неподвижная точка $y_0 \in X_{H_k}$ *слабо связана с изотропическим типом* (H_{k-1}), $H_k \subset H_{k-1}$, если имеется путь $p : I \to X$, соединяющий y_0 с точкой y_1, $y_1 \in Bd_{X_k^{H_k}}(X_{k-1}^{H_k})$ - (граница $X_{k-1}^{H_k}$ в $X_k^{H_k}$), и p гомотопен fp. Причем гомотопия $\mathcal{L}$ между путями p и fp может быть выбрана сохраняющей начало пути $y_0 = p(0) = fp(0)$ и либо сохраняющей его конец $y_1 = p(1)$, если $y_1 \in Fix(f)$, либо удовлетворяющей условию: $\mathcal{L}_t(y_1) = \mathcal{L}(y_1, t) \in Bd_{X_k^{H_k}}(X_{k-1}^{H_k})$, $t \in I$, если $y_1 \notin Fix(f)$.

При $i < j$, и $H_j \subset H_i$, будем называть кнт γ отображения $f \mid_{H_j}: X^{H_j} \to X^{H_j}$ *слабо общим (или слабо связанным) с X_{H_i}*, если он содержит неподвижную точку $x \in X_{H_j}$, слабо связанную с X_{H_i}.

Обозначим через $|G|$ порядок (конечной) группы G, через $[G : H]$ -

число классов смежности в группе G по подгруппе H. Символом $\sharp\{x\}$ будем обозначать количество элементов в множестве $\{x\}$. Для любой подгруппы изотропии H (при действии группы G) обозначим:

$N_G(f_H) := |WH| \cdot \sharp\{WH$-орбиты существенных кнт в X_H, не содержащие существенных кнт из X_K ни для какой подгруппы изотропии $K, H \subset K$, и не являющиеся слабо связанными ни с какими $X_K, H \subset K\} = \sharp\{$ существенные кнт в X_H, не содержащие никаких кнт из X_K и не являющиеся слабо связанными с $X_K, H \subset K\}$;

$\mathcal{N}_f(H) := \{\alpha \mid \alpha$ - существенный кнт отображения f_H в X_H, не содержащий существенных кнт отображения f_K из X_K ни для какого $K, H \subset K\}$;

$\mathcal{P}_f(H) := \{K \mid K \supset H, \exists \alpha \in \mathcal{N}_f(H), \alpha$ слабо связан с $X_K\}$.

Для $K, W \in \mathcal{P}_f(H)$, будем говорить, что $K \leq_{f^H} W$, если выполнены два условия: $i) K \subseteq W; ii) \exists \alpha \in \mathcal{N}_f(H)$, - такой кнт в X_H, что α слабо связан с X_W через X_K, то есть путь, соединяющий α с X_W, проходит через X_K. Обозначим $\mathcal{M}_f(H)$ - множество максимальных элементов $\mathcal{P}_f(H)$ относительно частичного порядка $\leq_{f^H}$. Для $K, W \in \mathcal{M}_f(H)$ будем говорить, что $K \preceq W$, если $|K| \leq |W|$.

Для $K \in \mathcal{M}_f(H)$ обозначим $\theta_H(K) := \sharp\{\alpha \mid \alpha \in \mathcal{N}_f(H), \alpha$ слабо связан с X_K но не является слабо связанным ни с каким другим $X_W, W \in \mathcal{M}_f(H), W \succeq K\}$. И наконец, обозначим $m_G(f^{(H)}) := min\{\sharp(Fixh^{(H)}) \mid h \simeq_G f\}$.

Теперь приведем основной результат второй главы.

ТЕОРЕМА 5. *Пусть G-пространство X есть компактный связный полиэдр без локально разделяющих точек, допускающий конечную триангуляцию с симплициальным действием конечной группы G, для которого выполнены КОТП-условие и $(G-J)$-условие. Пусть (H) - изотропический тип данного G-действия на X, и $f : X \to X$ - некоторое G-эквивариантное отображение. Тогда существует такое G-эквивариантное отображение g, которое G-гомотопно отображению f и имеет следующие свойства:*

$$1) \quad \sharp(Fix(g^{(H)})) = m_G(f^{(H)}) =$$
$$= \sum_{K, H \subseteq K} \left(N_G(f_K) \cdot [G : NK] + \sum_{L, L \in \mathcal{M}_f(K)} \frac{\theta_K(L)}{|WK|} \cdot |WL| \cdot [G : NL] \right);$$

$$2) \quad \sharp\{\ G\text{-орбиты кнт отображения } g \text{ in } X^{(H)}\} =$$
$$= \sum_{K, H \subseteq K} \left((N_G(f_K)/|WK|) + \sum_{L, L \in \mathcal{M}_f(K)} \theta_K(L)/|WK| \right).$$

где $f^{(H)} = f\mid_{X^{(H)}}: X^{(H)} \to X^{(H)}$ - сужение отображения f на $X^{(H)}$. $\square$

В третьей главе рассматривается проблема минимизации множества совпадений пары непрерывных отображений гладких многообразий в положительной коразмерности, то есть в случае, когда пространство-образ имеет меньшую размерность, чем пространство-прообраз.

Пусть $f, g : M^{n+m} \to N^n$ - непрерывные отображения, M, N- гладкие компактные замкнутые многообразия указанных размерностей, и $m > 0, n > 2$. Пусть непустое пересечение $(f \times g)(M) \cap \Delta_N$ образа M при действии отображения $f \times g$ с диагональю $\Delta_n := \{(y, y) | y \in N\} \subset N^2$ состоит из конечного числа точек, и множество совпадений $Coin(f, g) = \{x \in M | f(x) = g(x)\}$, состоящее из прообразов точек диагонали (а значит, и каждый из этих прообразов) является замкнутым гладким m-подмногообразием в M.

Рассматривается проблема минимизации совпадений отображений f, g по отношению к таким прообразам (или их компонентам). Вводится понятие (f, g)-связанности m-мерных подмногообразий в M, каждое из которых переводится отображением $f \times g : X \to Y^2$ в точку, и хотя бы одно из которых содержится в множестве совпадений $Coin(f, g)$. Приведем необходимые определения.

Будем говорить, что отображение многообразий *пропускается через функцию Морса*, если это отображение представляется в виде композиции функции Морса и некоторого непрерывного отображения.

Пусть теперь A и B - гладкие замкнутые m-подмногообразия в M, где $A \subseteq C = Coin(f, g)$. Будем говорить, что подмногообразие A (f, g)-*связано* с подмногообразием B, если выполнены следующие 3 условия:

1)A бордантно B в M, и существует окрестность $U = U(W)$ связывающего их бордизма W такая, что $U \cap C = A$.

2)Сужения $f\mid_W, g\mid_W$ гомотопны (относительно A), и гомотопия $\Phi(x, s)$ пропускается через некоторую функцию Морса φ на W (причем $A = \varphi^{-1}(0), B = \varphi^{-1}(1)$), и $Coin(\Phi(\cdot, s_1), \Phi(\cdot, s_2)) = A$ для каждого $s_1 \neq s_2, 0 \leq s_i \leq 1$, i=1,2.

3)Нормальное расслоение $\nu(W)$ в M тривиально, на некоторой трубчатой окрестности $t(W) \subset U$ задана структура прямого произведения, и сужения $f\mid_{t(W)}, g\mid_{t(W)}$ согласованы с данной структурой прямого произведения над семейством сепаратрис функции Морса φ (то есть слои над прообразами одной точки отображаются одинаково).

Доказано следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть $f, g : M^{n+m} \to N^n$ - непрерывные отображения между гладкими компактными замкнутыми многообразиями указанных размерностей, где $m > 0, n > 2$. Пусть $A \subseteq C = Coin(f, g)$ и B - гладкие замкнутые m-подмногообразия в M, и A является (f, g)-связанным с B. Тогда существуют гомотопии, постоянные вне малой окрестности U бордизма между A и B , которые соединяют пару отображений (f, g) с парой $\tilde{f}, \tilde{g} : M \to N$, причем $Coin(\tilde{f}, \tilde{g}) = (C \setminus A) \cup B$.*$\square$

В частности, утверждение Теоремы 1 верно и в том случае, если $B \subset C$, и гомотопии в условии (f, g)-связанности подмногообразий A и B являются постоянными на $A \cup B$ (это следствие сформулировано в третьей главе как Теорема 2).

Таким образом, Теоремы 1,2 позволяют, при описанных условиях, перемещать прообраз A точки диагонали $\Delta \subset N \times N$ при отображении $F \times g$ в подмногообразие B, с которым оно (f, g)-связано. При этом B изначально не обязан быть прообразом диагональной точки при действии отображения $f \times g$.

Далее рассматривается случай, когда замкнутое m-подмногообразие $A, A \subseteq C = Coin(f, g)$, бордантно нулю.

Предположим, что $W \subset M$ - соответствующий нуль-бордизм, $B = \{b\} \in W \setminus A$, и $U = U(W)$ - окрестность W, причем $U \cap C = A$. В этих условиях мы будем говорить, что подмногообразие A (f, g)-*связано с точкой* $B = \{b\}$, если выполнены следующие два условия, аналогичные условиям (f, g)-связанности двух m-подмногообразий:

1.Сужения $f\ |_W, g\ |_W$ гомотопны (относительно A), и эта гомотопия $\Phi(x, s)$ пропускается через некоторую функцию Морса φ на W (причем $A = \varphi^{-1}(0), B = \varphi^{-1}(1)$), и $Coin(\Phi(\cdot, s_1), \Phi(\cdot, s_2)) = A$ для каждого $s_1 \neq s_2, 0 \leq s_i \leq 1$, i=1,2.

2.Нормальное расслоение $\nu(W)$ в M тривиально, на некоторой трубчатой окрестности $t(W) \subset U$ задана структура прямого произведения, и сужения $f\ |_{t(W)}, g\ |_{t(W)}$ согласованы с данной структурой прямого произведения над семейством сепаратрис функции Морса φ (то есть слои над прообразами одной точки отображаются одинаково).

Итак, пусть нуль-бордантное m-подмногообразие A (f, g)-связано с некоторой точкой $b \in W \setminus A$. В такой ситуации, с использованием результатов работы П.Савельева[59] в диссертации доказано, что при условии

[59]Saveliev P., "Removing Coincidences of Maps Between Manifolds of Different Dimensions". Topological Methods in Nonlinear Analysis, 22(2003), 1, pp.105-114.

$\pi_{m+n-1}(S^{n-1}) = 0$ существуют гомотопии (постоянные вне $U(W)$), соединяющие пару исходных отображений (f,g) с некоторой парой $(\tilde{f},\tilde{g})$, для которой $Coin(\tilde{f},\tilde{g}) = Coin(f,g) \setminus A$, то есть совпадения на A можно в этой ситуации убрать (Теорема 4 третьей главы).

Известно[60], условие $\pi_{m+n-1}(S^{n-1}) = 0$, наложенное в Теореме 4 третьей главы, выполняется лишь для избранных пар размерностей $(n+m, n)$, таких как: $(n+4,n)$ при $n \geq 7$, $(n+5,n)$ при $n \geq 8$, $(n+12,n)$ при $n \geq 15$. Везде в этих случаях выполнено неравенство $0 < m < n-2$, поэтому утверждение Теоремы 4 третьей главы представляет собой фактически частный случай теоремы У.Кошорке[61], которая дает аналогичный результат при более слабых условиях для компоненты линейной связности A множества $C = Coin(f,g)$, при $0 < m < n-2$. Следует отметить при этом, что доказательство, представленное Кошорке[61], отлично от приведенного выше и не является конструктивным.

Теоремы 1,2 третьей главы диссертации не являются частными случаями результатов У.Кошорке, так как не содержат условия $m < n-2$.

Более того, оказывается, что в рассматриваемых нами условиях можно освободиться от указанных выше размерностных ограничений для удаления бордантного нулю m-подмногообразия совпадений, образ которого при действии отображения $f \times g$ есть диагональная точка в $N \times N$. А именно, в третьей главе диссертации доказано следующее утверждение:

ТЕОРЕМА 5. *Пусть* $A \subset Coin(f,g)$ *- замкнутое гладкое* m*-многообразие, бордантное нулю, с соответствующим нуль-бордизмом* W*;* $B = \{b\} \in W \setminus A$ *- фиксированная точка. Пусть* A (f,g)*-связано с* B*. Тогда существуют гомотопные* f,g *отображения* $\tilde{f},\tilde{g}$*, для которых* $Coin(\tilde{f},\tilde{g}) = Coin(f,g) \setminus A.\Box$

Отметим, что отношение (f,g)-связанности между двумя m-подмногообразиями $A, B \subset Coin(f,g)$, описанное в Определении 4, не является, вообще говоря, эквивалентностью, так как не транзитивно. Поэтому приведенные в третьей главе результаты представляют алгоритм частичной минимизации множества совпадений. Тем не менее, в ряде случаев такой алгоритм полезен (см. замечания 1,2 и Рис.1(a,b) в конце третьей главы).

Таким образом, в описанной ситуации множество совпадений пары отображений гладких многообразий в положительной коразмерности мо-

[60]см., например, книгу: Фоменко А.Т., Фукс Д.Б., "Курс гомотопической топологии". Наука, Физматлит, Москва, 1989, стр.311.

[61]Koschorke U., "Nielsen coincidence theory in arbitrary codimensions". J. reine angew. Math., 598(2006)pp.211-236, Theorem 1.10.

жет быть (частично) минимизировано, в указанном смысле, при помощи специальных локальных гомотопий данных отображений f, g, без дополнительных размерностных ограничений.

Четвертая глава диссертации посвящена проблемам существования и аппроксимации неподвижных точек и совпадений отображений метрических пространств.

Пусть $(X, \rho), (Y, d)$ - метрические пространства. Рассматривается задача построения на X алгоритма, позволяющего из любой точки $x \in X$ с помощью итерационного процесса (вообще говоря, неоднозначного) последовательно приблизиться к некоторой точке $\xi = \xi(x) \in A$, где $A \subset X$ - заданное замкнутое подпространство в X, причем единственность предельной точки $\xi(x)$ не предполагается. Рассматриваются различные варианты подмножества A: нуль-подпространство функционала; прообраз замкнутого подпространства $H \subset Y$ при отображении из X в Y; множество совпадений конечного набора из $n (n > 1)$ отображений из X в Y; множество общих неподвижных точек $n (n \geq 1)$ непрерывных отображений пространства X в себя. При этом рассматриваются как однозначные, так и многозначне функционалы и отображения.

В §1 четвертой главы изучаются геометрические соображения, приводящие к решению поставленных задач для случая непрерывных отображений. На их основе разработаны однозначная и многозначная версии общего принципа каскадного поиска, предлагаемые соответственно в §2 и в §3 четвертой главы.

В отличие от ряда работ, связанных с задачей об общих неподвижных точках[62] [63] [64] [65], в четвертой главе на рассматриваемые отображения не накладываются условия коммутируемости или условия, близкие к ним.

Приведем необходимые определения и основные результаты.

Пусть $f : X \to Y$ - отображение (однозначное или многозначное)

---

[62] Abdelkrim Aliouche and Ahcene Djoudi, "Common fixed point theorems for mappings satisfying an implicit relation without decreasing assumption". Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, vol.36(1) (2007), 11-18.

[63] Granas Andrjej, Dugundji James, "Fixed point theory". Springer-Verlag, New York, 2003.

[64] Hussain N., Rhoades B.E., Jungck G., "Common Fixed Point and Invariant approximation Results for Gregus Type/-Contractions". Numerical Functional Analysis and Optimization, Vol.28, Issue 9-10, September 2007, pp.1139-1151.

[65] Kiyoshi Ise'ki, "On Common Fixed Points Theorems of Mappings". Proc. Japan Acad., 50 (1974), pp.468-469.

между метрическими пространствами, и $Graph(f) \subseteq X \times Y$ - его график. Для всякого непустого подмножества $A \subset Y$, будем говорить, что график $Graph(f)$ *A-замкнут*, если он содержит все свои предельные точки $(x, y) \in X \times Y$, у которых $y \in A$. Будем говорить, что $Graph(\varphi)$ является *A-полным*, если всякая фундаментальная последовательность $\{x_n, y_n\}_{n=0,1,...} \subseteq Graph(f)$ такая, что $d(y_n, A) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, сходится к некоторой паре $(\xi, \eta) \in Graph(f)$, где $\eta \in A$. То есть, $\eta \in f(\xi) \cap A$.

Неотрицательный функционал $\varphi : X \to \mathbb{R}$ на метрическом пространстве (X, ρ), называется *(α, β)-поисковым* $(0 < \beta < \alpha)$, если для каждого $x \in X$ существует точка $x' \in X, \rho(x, x') \leq \frac{\varphi(x)}{\alpha}$ такая, что $\varphi(x') \leq \frac{\beta}{\alpha} \cdot \varphi(x)$. Для любого функционала $\varphi : X \to \mathbb{R}$ его нуль-подпространство определяется как подмножество $Nil(\varphi) := \{x \in X | \varphi(x) = 0\}$.

ТЕОРЕМА 9. (Принцип каскадного поиска: однозначная версия) *Пусть (X, ρ) - метрическое пространство, и неотрицательный функционал $\varphi : X \to \mathbb{R}$ является (α, β)-поисковым на X, $0 < \beta < \alpha$. Предположим, что либо $Graph(\varphi)$ является 0-полным, либо X - полно, и $Graph(\varphi)$ 0-замкнут. Тогда мультикаскад на X с генератором G, где*

$$G(x) := \{x' \in X | \rho(x, x') \leq \frac{\varphi(x)}{\alpha}, \varphi(x') \leq \frac{\beta}{\alpha} \cdot \varphi(x)\},$$

имеет предельное множество $A = Nil(\varphi) \neq \emptyset$, и для любого $x_0 \in X$ существует предельная точка $\xi \in A$, для которой $\rho(x_0, \xi) \leq \frac{\varphi(x_0)}{\alpha - \beta}$.$\square$

В качестве приложений однозначной версии принципа каскадного поиска получены теоремы существования и аппроксимации общих прообразов замкнутого подпространства, совпадений, общих неподвижных точек, общих корней для любого конечного набора отображений метрических пространств, более широкого класса, чем непрерывные (теоремы 10-14 четвертой главы). В частности, получено обобщение хорошо известного *принципа Банаха неподвижной точки*[55], не гарантирующее единственности неподвижной точки, но применимое к более широкому классу отображений, чем сжимающие (Теорема 15 четвертой главы).

Приведем также следующее обобщающее утверждение.

ТЕОРЕМА 17. *Пусть заданы отображения $f_1, ..., f_n : X \to Y$, $f = f_1 \times ... \times f_n : X \to Y^n$ и выполнены следующие условия:*
(j) хотя бы одно из отображений $f_1, ..., f_n$ переводит фундаментальные последовательности в фундаментальные;
(jj)$Graph(f)$ является $\Delta_n(H)$-полным, $\Delta_n(H) := \{(x, ..., x) \in Y^n | x \in H\}$;

(jjj) функционал $D(f(x), \Delta_n(H))$ является (α, β)-поисковым на X с коэффициентами $\alpha, \beta, 0 < \beta < \alpha$. Тогда мультикаскад с генератором G,

$$G(x) = \{x' \in X | \rho(x, x') \leq \frac{D(f(x), \Delta_n(H))}{\alpha},$$
$$D(f(x'), \Delta_n(H)) \leq \frac{\beta}{\alpha} \cdot D(f(x), \Delta_n(H))\},$$

имеет предельное множество $A = P(f_1, ..., f_n, H) := f^{-1}(\Delta_n(H)) \neq \emptyset$, и для любой точки $x_0 \in X$ существует такая соответствующая ей предельная точка $\xi \in A$, что $\rho(x_0, \xi) \leq \frac{D(f(x_0), \Delta_n(H))}{\alpha - \beta}$.$\Box$

Теорема 17 остается верной при замене условий (j) и (jj) на условия:
$(\tilde{j})$ хотя бы одно из отображений $f_1, ..., f_n$ переводит фундаментальные последовательности в фундаментальные и его график H-полон;
$(\tilde{jj})$ график $Graph(f)$ является $\Delta_n(H)$-замкнутым.

Кроме того, применение Теоремы 17 к случаю, когда $H = \{c\}$, $c \in Y$, дает решение проблемы поиска общих корней отображений $f_1, ..., f_n$ со значением c (Следствие 1 главы 4).

Многозначная версия принципа каскадного поиска решает аналогичные задачи для многозначных функционалов и отображений. Приведем еще несколько необходимых определений.

Пусть $\varphi : X \to P(\mathbb{R})$ - неотрицательный многозначный функционал, $P(\mathbb{R})$ - совокупность непустых подмножеств в множестве вещественных чисел $\mathbb{R}$. Определим *нуль-подпространство* функционала φ как $Nil(\varphi) = \{x \in X \mid 0 \in \varphi(x)\}$, и *расширенное нуль-подпространство* как $Nil_+(\varphi) = \{x \in X \mid \varphi_*(x) = 0\}$. Здесь и везде ниже $\varphi_*(x)$ обозначает $\underset{\gamma \in \varphi(x)}{inf} \{\gamma\}$.

Будем говорить, что неотрицательный многозначный функционал $\varphi : X \to P(R)$ является (α, β)-*поисковым* на X, если таковым является однозначный функционал $\varphi_*(x)$ $(0 < \beta < \alpha)$. График $Graph(\varphi)$ многозначного функционала φ называется 0-*замкнутым (слабо* 0-*замкнутым)*, если для каждого его предельного элемента вида $(\xi, 0)$, $\xi \in Nil(\varphi)$ $(\xi \in Nil_+(\varphi))$. График $Graph(\varphi)$ называется 0-*полным* (слабо 0-*полным*), если всякая фундаментальная последовательность $\{(x_m, \varphi_m)\}_{m=9,1,...} \subset Graph(\varphi)$, где $\varphi_m \underset{m \to \infty}{\longrightarrow} 0$, сходится к паре $(\xi, 0)$, где $\xi \in Nil(\varphi)$ $(\xi \in Nil_+(\varphi))$.

ТЕОРЕМА 18.(Принцип каскадного поиска: многозначная версия). *Пусть (X, ρ) - метрическое пространство, $\varphi : X \to P(\mathbb{R})$ - неотрицательный (α, β)-поисковый функционал на X, $0 < \beta < \alpha$, и выполнено одно из следующих условий:*

(I)график $Graph(\varphi)$ является 0-полным, или X полно и $Graph(\varphi)$ является 0-замкнутым;
(II) $Graph(\varphi)$ слабо 0-полон, или X полно и $Graph(\varphi)$ слабо 0-замкнут. Тогда мультикаскад на X с генератором G, где $G(x) := \{x' \in X | \rho(x,x') \leq \frac{\varphi(x)}{\alpha}, \varphi(x') \leq \frac{\beta}{\alpha} \cdot \varphi(x)\}$, имеет предельное множество $A \neq \emptyset$, где либо $A = Nil(\varphi)$ в случае (I), либо $A = Nil_+(\varphi)$ в случае (II), и для любой точки $x \in X$ существует такая соответствующая ей предельная точка $\xi \in A$, что $\rho(x_0, \xi) \leq \frac{\varphi_*(x_0)}{\alpha - \beta}$. $\square$

Пусть теперь $F : X \to C(Y)$ - многозначное отображение, $C(Y)$ - совокупность непустых замкнутых подмножеств пространства Y. Пространство Y^n рассматривается с метрикой D, где $D(y,z) := \sum\limits_{i=1}^{n} d(y_i, z_i), y = (y_1, ..., y_n), z = (z_1, ..., z_n) \in Y^n$. Напомним, что график $Graph(F)$ отображения F называется *полным*, если всякая фундаментальная последовательность его элементов сходится к некоторому элементу из $Graph(F)$. График $Graph(F)$ называется *замкнутым*, если пределы всех сходящихся последовательностей его элементов содержатся в нем.

Будем говорить, что многозначное отображение $F : X \to Y$ *секвенциально полунепрерывно сверху* в точке ξ, если для всякой сходящейся последовательности $\{x_k\}_{k=0,1,...}$, $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = \xi$, любая последовательность $\{y_k\}_{k=0,1,...}$, где $y_k \in F(x_k)$, обладает свойством, что $\lim\limits_{k\to\infty} d(y_k, F(\xi)) = 0$. Многозначное отображение F секвенциально полунепрерывно сверху на X, если оно имеет это свойство в любой точке X.

Многозначная версия принципа каскадного поиска дает целый ряд следствий, решающих задачи, сформулированные выше, для случая многозначных отображений (Теоремы 19-22, а также Теоремы 25 и 26 в §3 четвертой главы).

В частности, Теорема 20 при $n = 2$ дает (см. Утверждение 3 в четвертой главе) существенное обобщение Теоремы 3 работы А.В.Арутюнова[56].

Пусть $F_1, ..., F_n : X \to C(Y)$ - многозначные отображения, $F = F_1 \times ... \times F_n : X \to C(Y^n)$, H - замкнутое подпространство в Y. *Полным (расширенным) общим прообразом* подпространства H при действии набора отображений $F_1, ..., F_n$ будем называть множество $P(F_1, ..., F_n, H) := \{x \in X | (\bigcap\limits_{i=1}^{n} F_i(x)) \cap H \neq \emptyset\}$ (соответственно множество $P_+(F_1, ..., F_n, H) := \{x \in X | D(F(x), \Delta_n(H)) = \inf\limits_{y_i \in F_i(x), h \in H} \{\sum\limits_{i=1}^{n} d(y_i, h)\} = 0\}$).

Следующая Теорема обобщает и комбинирует утверждения Теорем

19-22 четвертой главы.

ТЕОРЕМА 24. *Пусть* $F_1, ..., F_n : X \to C(Y)$ *- многозначные секвенциально полунепрерывные сверху отображения,* $F = F_1 \times ... \times F_n : X \to C(Y^n)$, $H \subset Y$ *- замкнутое подпространство в* Y. *Пусть существуют числа* $0 < \beta < \alpha$, *такие, что многозначный функционал* $\Psi(x) := \{\psi = D(y, \Delta_n(H)) \mid y \in F(x)\}$ *является* (α, β)*-поисковым на* X. *Пусть также выполнено одно из следующих условий:*
J)X *полно;*
JJ)X *полно, и по крайней мере одно из отображений* $F_i, 1 \leq i \leq n$, *переводит сходящиеся последовательности в компактные множества;*
JJJ) H *компактно, и по крайней мере один из графиков* $Graph(F_1), ..., Graph(F_n)$ *является* H*-полным.*
Тогда мультикаскад на X *с генератором* G, *где* $G(x) := \{x' \in X | \rho(x, x') \leq \Psi(x), \Psi(x') \leq \frac{\beta}{\alpha} \cdot \Psi(x)\}$, *имеет предельное множество* $A \neq \emptyset$, *где* $A = P_+(F_1, ..., F_n, H)$ *в случае J), и* $A = P(F_1, ..., F_n, H)$ *в случаях JJ) и JJJ). Кроме того, для всякой точки* $x \in X$ *существует такая соответствующая ей предельная точка* $\xi \in A$, *что* $\rho(x_0, \xi) \leq \frac{D(F(x_0), \Delta_n(H))}{\alpha - \beta}$. $\square$

Отметим, что в случае $H = \{c\}, c \in Y$, из Теоремы 24 вытекает важное утверждение (Следствие 2 главы 4), которое решает проблему поиска общих корней набора из n многозначных отображений $F_1, ..., F_n$.

В §4 главы 4 предлагается более тонкий вариант каскадного поиска прообраза подпространства, а именно, *каскадный поиск по графику отображения* (Теорема 27 ниже), где и в условии теоремы, и в оценочном неравенстве участвует, вместе с точкой $x \in X$, также некоторая точка y из образа $F(x)$, и рассматриваются отображения, не являющиеся, вообще говоря, секвенциально полунепрерывными сверху.

ТЕОРЕМА 27. *Пусть* $F : X \to C(Y)$ *- многозначное отображение, и* $Graph(F)$ H*-полон, где* $H \subset Y$ *- замкнутое подпространство в* Y. *Пусть* $\gamma > 0, 0 < \beta < \alpha$, *и для каждого* $x \in X$, *и каждого* $y \in F(x)$ *существуют точки* $x' \in X$ *и* $y' \in F(x')$, *для которых* $\rho(x, x') \leq \frac{d(y,H)}{\alpha}$, $d(y, y') \leq \gamma \cdot d(y, H)$, *и* $d(y', H) \leq \frac{\beta}{\alpha} \cdot d(y, H)$. *Тогда определен мультикаскад на* $Graph(F)$ *с генератором* $\mathcal{G}$, *где* $\mathcal{G}(x, y) := \{(x', y') \in Graph(F) | \rho(x, x') \leq \frac{d(y,H)}{\alpha}, d(y, y') \leq \gamma \cdot d(y, H), d(y', H) \leq \frac{\beta}{\alpha} \cdot d(y, H)\}$, $(x, y) \in Graph(F)$. *Этот мультикаскад имеет непустое предельное множество* $\mathcal{A} \subseteq Graph(F)$, *проекция которого на* X *совпадает с полным прообразом* $F^{-1}(H)$ *подпространства* H *при действии отображения* F. *Причем для любой точки* $(x_0, y_0) \in Graph(F)$ *существует такая* *соответствующая ей предельная точка* $(\xi,\eta) = (\xi(x_0,y_0),\eta(x_0,y_0)) \in \mathcal{A}$, *что* $\rho(x_0,\xi) \le \frac{d(y_0,H)}{\alpha-\beta}$, $d(y_0,\eta) \le \frac{\gamma\cdot d(y_0,H)}{\alpha-\beta}$. $\square$

Теорема 27 дает ряд следствий для поиска общих прообразов, совпадений, общих неподвижных точек и общих корней конечных наборов многозначных отображений.

Приведем следующее обобщающее утверждение.

ТЕОРЕМА 30. *Пусть* $F_1,...,F_n : X \to C(Y)$, $F = F_1 \times ... \times F_n : X \to C(Y^n)$, $H \subseteq Y$ *- замкнутое подпространство в* Y. *Пусть* $Graph(F)$ $\Delta_n(H)$*-замкнут, и хотя бы один из графиков* $Graph(F_i), i = 1,...,n$, H*-полон. Пусть существуют такие числа* $\gamma > 0, 0 < \beta < \alpha$, *что для каждого* $x \in X$, *и каждого* $y \in F(x)$ *существуют точки* $x' \in X$ *и* $y' \in F(x')$, *для которых* $\rho(x,x') \le \frac{d(y,\Delta_n(H))}{\alpha}, d(y,y') \le \gamma\cdot d(y,\Delta_n(H))$, *и* $d(y',\Delta_n(H)) \le \frac{\beta}{\alpha}\cdot d(y,\Delta_n(H))$. *Тогда определен мультикаскад на* $Graph(F)$ *с генератором* $\mathcal{G}$, *где* $\mathcal{G}(x,y) := \{(x',y') \in Graph(F) | \rho(x,x') \le \frac{d(y,H)}{\alpha}$, $d(y,y') \le \gamma\cdot d(y,H), d(y',H) \le \frac{\beta}{\alpha}\cdot d(y,H)\}$, $(x,y) \in Graph(F)$. *Этот мультикаскад имеет непустое предельное множество* $\mathcal{A} \subseteq Graph(F)$, *проекция которого на* X *равна* $P(F_1,...,F_n;H)$. *Причем для любой точки* $(x_0,y_0) \in Graph(F)$ *существует такая соответствующая ей предельная точка* $(\xi,\eta) = (\xi(x_0,y_0),\eta(x_0,y_0)) \in \mathcal{A}$, *что* $\rho(x_0,\xi) \le \frac{d(y_0,H)}{\alpha-\beta}, d(y_0,\eta) \le \frac{\gamma\cdot d(y_0,H)}{\alpha-\beta}$.$\square$

Теорема 30 при $H = Y$ дает решение задачи о поиске совпадений n отображений (Теорема 28 четвертой главы). Кроме того, при $H = \{c\}, c \in Y$ из нее получается утверждение о каскадном поиске общих корней конечного набора отображений, соответствующих значению c (Следствие 3 четвертой главы).

Доказано (Утверждение 4 главы 4), что Теорема 28 в частном случае, когда $n = 2$, содержит существенное усиление теоремы 2 из работы А.В.Арутюнова [56]. Приводится пример (Пример 5 главы 4) двух многозначных отображений, не удовлетворяющих условиям этой теоремы А.В.Арутюнова, но удовлетворяющих условиям Теоремы 28.

В пятой главе решены вопросы устойчивости метода каскадного поиска по отношению к малому изменению начальной точки, а также к малым возмущениям исходных многозначных функционалов или отображений, при помощи которых построен поисковый мультикаскад. Рассматриваются *две постановки задачи об устойчивости* каскадного поиска.

Первая из них (назовем ее *слабой устойчивостью*)является развитием, с точки зрения метода каскадного поиска, постановки задачи об устойчивости точек совпадения накрывающего и липшицева отображений, рассмотренной А.В.Арутюновым[58] (Лемма 1 и Теорема 2 в указанной работе). А именно, исследуется вопрос о секвенциальной полунепрерывности сверху (многозначного) отображения γ, ставящего в соответствие каждой точке $x \in X$ подмножество $\gamma(x)$ предельных точек (α, β)-поискового мультикаскада, удовлетворяющих оценочному неравенству $\rho(x, \xi) \leq \frac{\varphi_*(x)}{\alpha - \beta}$.

Доказано следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1.*Пусть выполнены условия принципа каскадного поиска (Теорема 18 главы 4) для многозначного поискового функционала φ. Предположим, кроме того, что однозначный функционал φ_* непрерывен на X, и выполнено по крайней мере одно из условий:*

A)предельное множество A_φ соответствующего поискового мультикаскада компактно;

B)всякий замкнутый шар в X компактен.
Тогда отображение $\gamma_\varphi : X \to C(A)$ является секвенциально полунепрерывным сверху.$\square$

Применение этого результата к каскадному поиску множества совпадений, общих корней, общих неподвижных точек, а также общего прообраза замкнутого подпространства H при действии конечного набора отображений дает соответствующие утверждения о слабой устойчивости (Теоремы 2-4 главы 5).

Кроме того, показано (Утверждение 1 и Замечание 2 главы 5), что теорема 4 при $n = 2$ и $X = Y$ дает обобщение Леммы 1 из работы А.В.Арутюнова[58].

Напомним, что отображение $F : X \to C(Y)$ называется *полунепрерывным снизу* в точке $x_0 \in X$, если для любого открытого множества $V \subset Y, V \cap F(x_0) \neq \emptyset$, существует окрестность $U = U(x_0) \subseteq X$ такая, что для любого $x' \in U$, $V \cap F(x') \neq \emptyset$. В случае метрических пространств для полунепрерывности снизу необходимо и достаточно, чтобы для любой последовательности $\{x_n\}_{n=1,2,\ldots}, x_n \in X, x_n \to x$, и любого $y \in F(x)$ нашлась бы последовательность $\{y_n\}_{n=1,2,\ldots}, y_n \in F(x_n)$ такая, что $y_n \to y$. (См. по этому поводу Определение 1.2.17 и Теорему 1.2.20, на стр.28-29 в книге[57]).

Далее рассматривается вопрос о том, при каких условиях малое возмущение многозначного поискового функционала, участвующего в Теореме 18 главы 4, или малые возмущения многозначных отображений, участвующих в Теоремах 24 и 30 и других главы 4, влекут малое (в некотором разумном смысле) изменение предельного множества соответствующего мультикаскада.

Постановка этого вопроса, положительный ответ на который дается в Теоремах 5-7 главы 5, является естественным развитием задачи, поставленной и решенной А.В.Арутюновым[58] для совпадений накрывающего и липшицева отображений.

В пятой главе диссертации получен следующий результат.

ТЕОРЕМА 5. *Пусть задан многозначный функционал* $\varphi_0 : X \to P(R)$, *и последовательность многозначных функционалов* $\{\varphi_m\}_{m=1,2,\dots}$, $\varphi_m : X \to P(R)$, *такая, что одновременно для всех функционалов* φ_m, $m \geq 1$, *выполнены либо условия Теоремы 18(I), либо условия Теоремы 18(II) главы 4, с коэффициентами* $\alpha_m, \beta_m, 0 < \beta_m < \beta < \alpha < \alpha_m$. *Обозначим* $A_m := A_{\varphi_m} = Nil(\varphi_m)$ *в случае условий Теоремы 18(I) главы 4, и* $A_m := A_{\varphi_m} = Nil_+(\varphi_m)$ *в случае условий Теоремы 18(II) главы 4 для всех* $m = 0, 1, \dots$ *и предположим, что* $A_0 \neq \emptyset$. *Пусть также* $(\varphi_m)_*(x) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} (\varphi_0)_*(x), x \in X$. *Тогда для каждого* $\xi_0 \in A_0$ *существует последовательность* $\{\xi_m\}_{m=1,2,\dots}, \xi_m \in A_m$, *такая, что* $\xi_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \xi_0$, *и* $\rho(\xi_0, \xi_m) \leq \frac{(\varphi_m)_*(\xi_0)}{\alpha_m - \beta_m} \leq \frac{(\varphi_m)_*(\xi_0)}{\alpha - \beta}$.$\square$

Фактически в Теореме 5 доказана полунепрерывность снизу отображения $\tau, \tau(\varphi) = A_\varphi$, на пространстве функционалов, удовлетворяющих условиям Теоремы 18 главы 4, с заданной в нем топологией поточечной сходимости однозначных функционалов, равных их инфимумам. В Теореме 5 доказано даже несколько больше, так как для функционала φ_0 условия Теоремы 18 главы 4 не предполагаются выполненными.

Применение Теоремы 5 к задачам каскадного поиска множества совпадений, общего прообраза замкнутого подпространства, множества общих корней или множества общих неподвижных точек конечного набора многозначных отображений дает соответствующие результаты об их устойчивости (Теоремы 6,7 главы 5).

Доказано (см. Утверждение 2 главы 5 и замечания после него), что при $n = 2$ и $H = Y$, Теорема 7 главы 5 дает обобщение Теоремы 2 из работы А.В.Арутюнова[58].

Вторая постановка задачи об устойчивости (назовем ее *сильной устойчивостью*) и ее решение изложены в §2 главы 5. Эта постановка является более стандартной. А именно, рассматривается вопрос об устойчивости подмножества $\tilde{\gamma}(x)$ предельных точек поискового мультикаскада, *достижимых* из данной начальной точки x по его траекториям. Исследуется устойчивость этого множества как по отношению к малому изменению начальной точки, так и по отношению к малому возмущению соответствующего поискового функционала или порождающих его отображений.

Сильная устойчивость принципа каскадного поиска относительно малого изменения начальной точки характеризуется свойством секвенциальной полунепрерывности сверху отображения $\tilde{\gamma}$, сопоставляющего каждому $x \in X$ подмножество $\tilde{\gamma}(x)$. Приведем необходимые определения.

Пусть на метрическом пространстве (X, ρ) задан (α, β)-поисковый мультикаскад K_φ (то есть определенный многозначным (α, β)-поисковым функционалом φ согласно Теореме 18 четвертой главы). *Траекторией* мультикаскада K_φ с генератором $G : X \to P(X)$, выходящей из точки x_0, будем называть всякую последовательность $\{x_k\}_{k=0,1,2,...}$, где $x_{k+1} \in G(x_k)$, то есть $\rho(x_k, x_{k+1}) \leq \frac{\varphi_*(x_k)}{\alpha}$, $\varphi_*(x_{k+1}) \leq \frac{\beta}{\alpha}\varphi_*(x_k)$. Введем обозначение: $\rho_\varphi(x_0, x_1) := \rho(x_0, x_1) + \frac{\varphi_*(x_0)+\varphi_*(x_1)}{\alpha-\beta}$. Пусть $\lambda > 0$ и $x_0 \in X$. Назовем точку $x_1 \in X$ *λ-связанной с точкой* x_0 (относительно мультикаскада K_φ), если для любой его траектории $T_1 = \{x_1^m\}_{m=0,1,...}$ с начальной точкой $x_1^0 = x_1$, найдется такая траектория $T_0 = \{x_0^m\}_{m=0,1,...}$, выходящая из точки $x_0^0 = x_0$, и такой номер $m_0 = m_0(T_0, T_1)$, что для любого $m, m \geq m_0$, $\rho_\varphi(x_0^m, x_1^m) \leq \lambda \cdot \rho(x_0, x_1)$. Будем называть точку $x_0 \in X$ *правильной* (относительно мультикаскада K_φ), если для некоторого $\lambda > 0$ любая точка $x \in X$ λ-связана с x_0. Назовем мультикаскад K_φ *правильным*, если все точки $x \in X$ являются правильными (относительно K_φ).

Следующий результат пятой главы дает достаточные условия для сильной устойчивости поискового мультикаскада K_φ относительно малых изменений начальной точки.

ТЕОРЕМА 9. *Если точка $x_0 \in X$ - правильная относительно заданного на X поискового мультикаскада K_φ, то отображение $\tilde{\gamma}_\varphi$ - секвенциально полунепрерывно сверху в точке x_0. Если мультикаскад K_φ правильный, то отображение $\tilde{\gamma}_\varphi$ - секвенциально полунепрерывно сверху на всем X.*$\square$

Будем говорить, что последовательность траекторий $T_i = \{x_i^m\}_{m=1,2,...}$, $i = 1, 2, ...$, мультикаскада K *слабо ρ_φ-сходится* к его траектории $T_0 = \{x_0^m\}_{m=1,2,...}$, если существуют такие возрастающие последовательности номеров $\{i_k\}_{k=1,2,...}$, $\{m_k\}_{k=1,2,...}$, что $\rho_\varphi(x_{i_k}^{m_k}, x_0^{m_k}) < \frac{1}{k}$.

Доказано следующее свойство поискового мультикаскада.

ТЕОРЕМА 10. *Пусть задан поисковый мультикаскад K_φ. Пусть последовательность точек $\{x_i\}_{i=1,2,...} \subseteq X$ сходится к точке $x_0 \in X$, а некоторая последовательность предельных точек $\{x_i^\infty\}_{i=1,2,...}$, $x_i^\infty \in \tilde{\gamma}(x_i)$, сходится к точке $x_0^\infty \in A_\varphi$. Пусть существует последовательность траекторий $T_i = \{x_i^m\}_{m=1,2,...}, i = 1,2,...$, данного мультикаскада, выходящих из x_i и приводящих в x_i^∞, которая слабо ρ_φ-сходится к какой-нибудь траектории T_0, начинающейся из x_0. Тогда $x_0^\infty \in \tilde{\gamma}(x_0)$.*$\square$

Далее рассматривается устойчивость поисковых мультикаскадов по отношению к малым возмущениям соответствующих поисковых функционалов. Является ли предел поисковых функционалов также поисковым функционалом? Как связаны отображения $\tilde{\gamma}$ для близких поисковых функционалов? Ответы на эти вопросы даны в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 11. *Пусть в метрическом пространстве X всякий замкнутый шар компактен, и пусть заданы многозначный функционал φ_0 и последовательность (α_n, β_n)-поисковых (многозначных) функционалов $\{\varphi_n\}_{n=1,2,...}$, $0 < \beta_n \leq \beta < \alpha \leq \alpha_n$, причем последовательность однозначных функционалов $\{\varphi_{n*}\}_{n=1,2,...}$ равномерно сходится на X к однозначному непрерывному функционалу φ_{0*}, где $\varphi_{k*}(x) = \inf\limits_{\delta \in \varphi_k(x)} \{\delta\}, x \in X, k = 0,1,....$ Пусть для всех $n \geq 1$ и любого $x \in X$ выполнено неравенство: $\varphi_{n*}(x) \leq \varphi_{0*}(x)$. Тогда верны следующие утверждения:*

1)функционал φ_0 является (α, β)-поисковым на X;

2)если графики всех функционалов $\varphi_n, n \geq 1$, 0-полны, и $\varphi_{0*}(x) \in \varphi_0(x), x \in X$, то и график функционала φ_0 0-полон;

3)если графики всех функционалов φ_n слабо 0-замкнуты, то и график функционала φ_0 слабо 0-замкнут.

4)Если выполнены условия утверждения 2), или X - полно и выполнены условия утверждения 3), то на X определены соответствующие мультикаскады K_{φ_n} с предельными множествами $A_{\varphi_n}, n = 0,1,2,....$ Тогда для любого $x_0 \in X$, из любой последовательности предельных точек $\{x_n^\infty\}_{n=0,1,2,...}$, $x_n^\infty \in \tilde{\gamma}_{\varphi_n}(x_0)$, можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к некоторой предельной точке $x_0^\infty \in \tilde{\gamma}_{\varphi_0}(x_0)$. Здесь $\tilde{\gamma}_{\varphi_i}(x)$ - множество предельных точек, достижимых из x по траекториям мультикаскада $K_{\varphi_i}, i = 0,1,2,...$. $\square$

На основе Теоремы 11 получен ряд утверждений о сильной устойчивости принципа каскадного поиска по отношению к малым возмущениям (многозначных) отображений, определяющих поисковые функционалы, в условиях теорем четвертой главы о поиске прообразов, совпадений, общих неподвижных точек, а также общих корней конечных наборов отображений.

Автор выражает глубокую благодарность заведующему кафедрой общей математики факультета ВМК МГУ академику РАН Владимиру Александровичу Ильину и всем сотрудникам кафедры за доброжелательную творческую атмосферу и всестороннюю поддержку. Автор благодарит всех руководителей и участников семинаров, на которых докладывались и обсуждались результаты данной работы.

СПИСОК РАБОТ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ.
Работы, опубликованные в ведущих рецензируемых научных журналах и изданиях (в соответствии с Перечнем ВАК).

[1] Фоменко Т.Н., "Алгебраические свойства некоторых когомологических инвариантов эквивариантных отображений". Математические Заметки, том 50, вып.1, 1991, с.108-117.

[2] Fomenko T.N., "On the least number of fixed points of equivariant mappings". Маломерная топология и комбинаторная теория групп. Труды международной конференции в Челябинске в 1999г., Институт Математики НАН Украины, Киев, 2000, с.131-146.

[3] Фоменко Т.Н., "О наименьшем числе неподвижных точек эквивариантного отображения". Математические Заметки, том.69, No.1, 2001, с.100-112.

[4] Фоменко Т.Н., "К задаче минимизации совпадений пары отображений в положительной коразмерности". Математические Заметки, том 84, вып.3, 2008, с.440-451.

[5] Fomenko T.N., "Nielsen type invariants and the location of coincidence sets in positive codimentions". Topology and its Appl., 155(2008), pp.2001-2008.

[6] Фоменко Т.Н., "О приближении к точкам совпадения и общим неподвижным точкам набора отображений метрических пространств". Математические Заметки, том 86, №.1, Июль 2009, с.110-125.

[7] Фоменко Т.Н., "К задаче каскадного поиска множества совпадений набора многозначных отображений". Математические Заметки, т.86, вып.2, 2009, с.304-309.

[8] Fomenko T.N., "Cascade search principle and its applications to the coincidence problem of n one-valued or multi-valued mappings". Topology and its Applications, 157(2010), pp.760-773.

[9] Фоменко Т.Н., "Устойчивость каскадного поиска". Известия РАН, 2010, №5, с.171-190.

[10] Фоменко Т.Н., "Каскадный поиск: устойчивость достижимых предельных точек". Вестник МГУ, №. 5, 2010, с.3-9.

Работы, опубликованные в других изданиях.

[11] Фоменко Т.Н., "Алгебраические характеристики эквивариантных отображений". В сб.: Алгебраические вопросы анализа и топологии. Серия: "Новое в глобальном анализе Воронеж, 1990, с.152-158.

[12] Фоменко Т.Н., "О приближении к точкам совпадения конечного набора отображений метрических пространств". In: "Abstracts of the Fifth International Conference of Differential and Functional Differential Equations (DFDE-2008)."Moscow, Russia, August 17-24, 2008, p.119.

[13] Фоменко Т.Н., "Принцип каскадного поиска и совпадения N отображений". Материалы Международной Конференции "Современные проблемы математики, механики и их приложений", посвященной 70-летию В.А.Садовничего, 30 марта-02 апреля 2009 года, МГУ, Москва, с.99.

[14] Fomenko T.N., "The stability of Cascade Search Principle". 2010 International Conference on Topology and its Applications, June 26-30, Nafpaktos, Greece. Abstracts. Nafpaktos, 2010, p.99.