Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова
Механико–Математический факультет

На правах рукописи

УДК 517.986, 517.55

АКБАРОВ СЕРГЕЙ САИДМУЗАФАРОВИЧ

СТЕРЕОТИПНЫЕ АЛГЕБРЫ И ДВОЙСТВЕННОСТЬ ДЛЯ ГРУПП ШТЕЙНА

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук

Москва 2010

Работа выполнена во Всероссийском институте научной и технической информации (ВИНИТИ).

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор Вайнерман Леонид Иосифович,

доктор физико-математических наук,
профессор Онищик Аркадий Львович,

доктор физико-математических наук,
профессор Шавгулидзе Евгений Тенгизович.

Ведущая организация: Математический институт имени В. А. Стеклова Российской академии наук

Защита диссертации состоится 24 декабря 2010 года в 16 часов 40 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.85 при Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, г. Москва, Ленинские горы, МГУ, Механико-математический факультет, аудитория 1624.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 19 ноября 2010 года.

Учёный секретарь диссертационного
совета Д 501.001.85 при МГУ,
доктор физико-математических
наук, профессор В. Н. Сорокин

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

Теория двойственности Л. С. Понтрягина для коммутативных локально компактных групп[1] с момента своего появления на свет в 1930-х годах много раз была объектом обобщения на некоммутативный случай. Исследования в этой области продолжаются и в настоящее время, и теперь их можно разделить на два главных направления:

1. Прежде всего, это подход, продолжающий линию Т. Таннаки[2] и М. Г. Крейна[3], согласно которому двойственность в гармоническом анализе следует понимать, как взаимную связь между группой и всевозможными ее представлениями. Эволюция этой идеи привела ныне к интерпретации двойственности, как связи между алгеброй Хопфа (современным аналогом группы) и тензорной категорией ее модулей (аналогом категории представлений группы)[4]. Это направление развивалось в работах Н. Тацуумы[5], А. Л. Розенберга[6], Н. Сааведры Ривано[7], П. Делиня[8], Дж. Милна[9], А. Джойала, Р. Стрита[10], Д. Н. Иеттера[11], К.-Х. Ульбриха[12], П. Шауэнбурга[13] и других.

[1]L. Pontrjagin. The theory of topological commutative groups, *Ann. Math.* 35(2): 361-388, 1934.

[2]T. Tannaka, Uber den Dualitatssatz der nichtkommutativen topologischen Gruppen, *Tohoku Math. J.* 45:1-12, 1939.

[3]М. Г. Крейн. Принцип двойственности для бикомпактной группы и квадратной блок-алгебры. *Докл. Акад. Наук СССР* 69:725-728, 1949.

[4]Первоначальное представление об этом подходе можно получить по главе “Representations and quasitensor categories” в монографии V. Chari, A. Pressley, *A guide to quantum groups.* Cambridge university press, 1995., или по главе “Fiber functors and Tanaka-Krein duality” в монографии P. Etingof, O. Schiffmann, *Lectures on quantum groups*, Hardcover, 1998.

[5]N. Tatsuuma. A duality theorem for locally compact groups. J. Math., Kyoto Univ. 6 (1967), 187-293.

[6] A. L. Rosenberg. Duality theorems for groups and Lie algebras. Russian Math. Surveys 26, 36 (1971), 253-254; A. L. Rosenberg. Reconstruction of groups, Sel. math., New ser. 9:101-118, 2003.

[7]N. Saavedra Rivano. Catègories Tannakiennes, *Lecture Notes in Mathematics*, no. 265, Springer, 1972.

[8]P. Deligne, Cateries Tannakiennes, in Grothendieck Festschrift, Vol.2, P. Cartier et al. (eds), pp.111-195, Birkhauser, 1991.

[9]P. Deligne, J. S. Milne, Tannakian categories, in Hodge Cycles, Mtives and Shimura Varieties, P. Deligne, J. S. Milne, A. Ogus & K. Shih (eds), Lecture notes in Mathematics 900, pp.101-228, Springer, 1982.

[10]A. Joyal, R. Street, Braided monoidal categories, Macquarie Mathematical Reports, no.860081, 1986; A. Joyal, R. Street, “An introduction to Tannaka duality and quantum groups”, Lecture Notes in Math. 1488 (Springer-Verlag Berlin, Heidelberg 1991) 411-492.

[11]D. N. Yetter, Quantum groups and representations of monoidal categories, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 108:261-290, 1990.

[12]K.-H. Ulbrich, On Hopf algebras and rigid monoidal categories, Israel J. Math. 72:252-256, 1990

[13]P. Schauenburg, Tannaka duality for arbitrary Hopf algebras, Algebra Berichte 66 (1992).

2. Второе направление родилось, наоборот, как альтернатива результатам Таннаки и Крейна. Его движущим мотивом явилась неудовлетворенность тем, что в теории Таннаки-Крейна нарушается понтрягинская симметрия между группой G и двойственным ей объектом $\widehat{G}$ (который перестает быть группой), а целью объявлялась нахождение *такого обобщения двойственности, при котором двойственный объект сохранял бы ту же природу, что и исходный* (более ясное представление о том, что понимается под этой симметрией, дает приводимая ниже диаграмма категорий (2), аналоги которой для более широких классов групп и представляют собой объект поиска при этом подходе). Пионерами в этой области следует считать двух советских математиков, Л. И. Вайнермана и Г. И. Каца[14,15,16], и двух математиков из Франции, М. Энока и Ж.-М. Шварца[17,18,19], которые в 1973 году, работая двумя независимыми группами, показали, что такая задача в принципе разрешима. Ими было построено исторически первое обобщение понтрягинской теории, сохраняющее симметрию между G и $\widehat{G}$, – теория *алгебр Каца*, – изложение которой можно найти в монографии М. Енока и Ж.-М. Шварца "Алгебры Каца и двойственность для локально компактных групп"[20]. Впоследствии работа в этом направлении продолжилась, поскольку, с одной стороны, в теорию вносились улучшения, а с другой, после открытия в 1980-х годах квантовых групп, сразу же приобретших широкую популярность, понтрягинскую двойственность стали обобщать и на этот класс, причем эта работа не окончена и поныне: возникшая на этой волне теория локально компактных квантовых групп в настоящее время активно разрабатывается усилиями С. Л. Вороновича, С. Вааса, А. Ван Даале, Л. Вайнермана, Й. Кустерманса, В. Пуша, П. Солтана и других [21].

[14] Л. И. Вайнерман. Характеризация объектов, двойственных к локально компактным группам. *Функц. анализ и его прил.* 8–1 (1974), 75–76.

[15] Л. И. Вайнерман, Г. И. Кац. Неунимодулярные кольцевые группы и алгебры Хопфа—фон Неймана. *Докл. Акад. Наук СССР* 211:1031-1034, 1973.

[16] Л. И. Вайнерман, Г. И. Кац. Неунимодулярные кольцевые группы и алгебры Хопфа—фон Неймана. *Матем. сб.* 94:194-225, 1974.

[17] M. Enock, J.-M. Schwartz. Une dualité dans les algèbres de von Neumann. *Note C. R. Acad. Sc. Paris* 277:683-685, 1973.

[18] M. Enock, J.-M. Schwartz. Une catégorie d'algèbres de Kac. *Note C. R. Acad. Sc. Paris* 279:643-645, 1974.

[19] M. Enock, J.-M. Schwartz. Une dualité dans les algèbres de von Neumann. *Supp. Bull. Soc. Math. France Mémoire* 44:1–144, 1975.

[20] M. Enock, J.-M. Schwartz. *Kac Algebras and Duality of Locally Compact Groups.* Springer-Verlag, 1992.

[21] J. Kustermans, W. Pusz, P. M. Soltan, S. Vaes, A. Van Daele, L. Vainerman, S. L. Woronowicz. Locally

Одновременно с этим делением на “симметричную” и “асимметричную” составляющие, в теории двойственности с самого начала обозначилась разница между “алгебраической” и “аналитической” системами технических приемов, и одна из существенных черт ее выражается в том, что по мере расширения класса рассматриваемых групп, которое можно изобразить движением по цепочке

$$\begin{array}{c} \boxed{\text{конечные группы}} \\ \cap \\ \boxed{\text{аффинные алгебраические группы}} \\ \cap \\ \boxed{\text{группы Ли}} \\ \cap \\ \boxed{\text{локально компактные группы}} \end{array} \tag{1}$$

исследователю приходится усложнять и/или искажать исходные алгебраические конструкции и идеи. Как это происходит, удобно проиллюстрировать на примере конструкции групповой алгебры.

1) Мы начнем с конечных групп. Как известно, групповая алгебра конечной группы G (пусть над полем $\mathbb{C}$) может быть определена, например, формулой

$$\mathbb{C}_G = (\mathbb{C}^G)'$$

(в которой $\mathbb{C}^G$ обозначает алгебру функций $u : G \to \mathbb{C}$, а X' – пространство линейных функционалов $f : X \to \mathbb{C}$ на конечномерном векторном пространстве X). Определенный таким образом объект $\mathbb{C}_G$ действительно будет групповой алгеброй в том смысле, что по нему легко восстанавливается сама группа G, а представлениям группы G будут взаимно однозначно соответствовать представления алгебры $\mathbb{C}_G$. В дополнение к этому (и это оказывается весьма важно) $\mathbb{C}_G$ будет обладать структурой алгебры Хопфа, и вместе это позволяет строить теорию двойственности для конечных групп в обоих упомянутых выше направлениях – как асимметричный

compact quantum groups, In: *“Quantum symmetry in noncommutative geometry”* (P. M. Hajac, Ed.), Locally compact quantum groups. Lecture Notes School / Conference on Noncommutative Geometry and Quantum groups, Warsaw, 2001, Banach Center Publications, to appear.

вариант (который в данном случае можно просто считать частью теории Таннаки-Крейна, поскольку конечная группа всегда компактна), так и симметричный ее вариант, который удобно изображается в виде следующей диаграммы категорий[22]:

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{\text{конечномерные алгебры Хопфа}} \arrow[r, "H\mapsto H'"] & \boxed{\text{конечномерные алгебры Хопфа}} \\
\boxed{\text{конечные группы}} \arrow[u, "G\mapsto \mathbb{C}_G"] & \boxed{\text{конечные группы}} \arrow[u, "G\mapsto \mathbb{C}_G"'] \\
\boxed{\text{абелевы конечные группы}} \arrow[u, "\mathfrak{e}"] \arrow[r, "G\mapsto \widehat{G}"] & \boxed{\text{абелевы конечные группы}} \arrow[u, "\mathfrak{e}"']
\end{tikzcd}
\tag{2}
$$

(здесь $\mathfrak{e}$ – функтор вложения, $\widehat{G}$ – двойственная по Понтрягину группа, а штрих $'$ – по-прежнему, переход к сопряженному пространству линейных функционалов).

2) При переходе от конечных групп к аффинным алгебраическим возникает первая трудность: групповую алгебру (то есть алгебру, по которой восстанавливается G, и представления которой взаимно однозначно соответствуют представлениям G) для алгебраических групп определять не принято (из-за ее существенной "неалгебраичности"), и этот объект заменяется на двойственный – алгебру регулярных функций (многочленов) на G, которую мы условимся обозначать $\mathcal{R}(G)$. Эта алгебра оказывается алгеброй Хопфа, причем по ней также восстанавливается группа G, а ее копредставлениям соответствуют представления G. Это позволяет строить теорию двойственности, но, в отличие от предыдущего случая, *только ее асимметричный вариант*: алгебра Хопфа $\mathcal{R}(G)$, как любая другая алгебра Хопфа над $\mathbb{C}$,

[22]Коммутативность диаграммы (2) означает просто изоморфизм функторов. По-видимому, теория двойственности для конечных групп, описываемая этой картиной, является продуктом коллективного математического сознания. В явном виде упоминание о ней содержится в монографии А. А. Кириллова (А.А.Кириллов. *Элементы теории представлений*, – М.: Наука, 1978). В неявном же виде формулируемое здесь утверждение присутствует в работах Г. И. Каца 1960-х годов (в частности: Г. И. Кац, В. Г. Палюткин. Конечные кольцевые группы, *Труды ММО*, 15:224-261, 1966).

порождает $\mathbb{C}$-линейную жесткую абелеву моноидальную категорию $\mathfrak{C}$ своих копредставлений, по которой затем с помощью теоремы К.-Х.Ульбриха[23] становится возможным восстановить саму алгебру Хопфа $\mathcal{R}(G)$.

3) Следующий переход к группам Ли и локально компактным группам мы объединим в одном пункте, поскольку качественной разницы между этими классами с точки зрения того, что обсуждается, нет. Общая теория двойственности здесь представлена в асимметричном варианте результатами Н. Тацуумы[24] (в которых теория Таннаки-Крейна обобщается на произвольные локально компактные группы), а в симметричном варианте уже упоминавшейся теорией Вайнермана-Каца-Энока-Шварца[25]. В обоих случаях объекты, выполняющие роль групповых алгебр, выбираются как подкласс среди образований, именуемых *алгебрами Хопфа-фон Неймана*[26], однако обычными алгебрами Хопфа они перестают быть, поскольку в их определении используются сразу два тензорных произведения – одно (проективное тензорное произведение банаховых пространств) для операции умножения, другое (тензорное произведение алгебр фон Неймана) для коумножения. В этом проявляется искажение исходных алгебраических определений, о котором мы говорили.

Вывод, который можно сделать из этих замечаний, заключается в следующем. Если под *гибкостью* теории (в противоположность ее *жесткости*) понимать возможность формулировать ее результаты в устоявшихся терминах, при необходимости, переходя к терминологии соседних областей математики, и без усложнений, оправданность которых остается неочевидной, то из приведенных теорий только первую – двойственность для конечных групп (из пункта 1) – следует признать гибкой (поскольку в ней с одной стороны нет необходимости искажать алгебраические определения, в частности, определение алгебры Хопфа, а с

[23]K.-H.Ulbrich. On Hopf algebras and rigid monoidal categories, Israel. J. Math., 72:252-256 (1990). Формулировку этого результата с наброском доказательства можно найти в учебнике V. Chari, A. Pressley, *A guide to quantum groups.* Cambridge university press, 1995 (Theorem 5.1.11).

[24]См. подстрочное примечание 5.

[25]См. подстрочное примечание 20.

[26]В теории Вайнермана-Каца-Энока-Шварца такие объекты называются *алгебрами Каца*, а в теореме Тацуумы они присутствуют неявно, однако их роль была выявлена позже Дж.Эрнестом, введшим в употребление сам термин "алгебра Хопфа-фон Неймана" в статье: J.Ernest, Hopf-von Neumann algebras, Functional analysis. Proc. Conf. Univ. California, 1966, pp.195-215 (1967).

другой, она содержит достаточно средств, чтобы при необходимости переходить от асимметричной картины к симметричной, а внутри каждой из них выбирать удобную точку зрения, переходя если нужно от групповой алгебры $\mathbb{C}_G$ функционалов к двойственной ей алгебре $\mathbb{C}^G$ функций, и наоборот). Важно, помимо прочего, что эта гибкость позволяет интерпретировать теорию двойственности для конечных групп, как частный случай остальных, то есть асимметричной теории двойственности для алгебраических групп (из пункта 2), и обеих теорий для локально компактных групп (из пункта 3). Однако, переходя от пункта 1 к пунктам 2 и 3, мы видим противоположную картину: жесткость теорий пункта 2 и 3 не дает возможности считать двойственность для алгебраических групп частным случаем двойственности для локально компактных групп (хотя цепочка (1) рождает именно эти интуитивные ожидания). Очевидная генетическая связь между этими теориями не обретает форму строгих логических формулировок, и это оправдывает поиски новых точек зрения, способных, во-первых, объединить алгебраический и аналитический подходы в теории двойственности, и, во-вторых, – устранить дисбаланс между симметричной и асимметричной ее составляющими.

Это намерение можно проиллюстрировать следующей таблицей, в которой плюсы означают, что для данного случая построена соответствующая теория, а минусы и вопросительный знак – что ее пока нет:

классы групп	асимметричные теории	симметричные теории
конечные	$+$	$+$
алгебраические	$+$	$-$
группы Ли:		
комплексные	$-$	?
вещественные	$-$	$-$
локально компактные	$+$	$+$

Конечной целью исследований в этой области (если это осуществимо) можно объявить заполнение всех ячеек таблицы плюсами таким образом, чтобы, в духе сказанного выше по поводу гибкости, при переходе к более широкому классу групп следующая теория обобщала предыдущую, а вся картина в целом выглядела узлом, связывающим четыре затрагиваемые здесь области математики – алгебраическую геометрию, комплексный анализ, дифференциальную геометрию и общую топологию. Целью же настоящей диссертации является заполнение ячейки с вопросительным знаком.

Цель работы.

В настоящей диссертации строится теория двойственности для достаточно широкого класса комплексных групп Ли, удовлетворяющая следующим двум условиям, смысл которых мы обсуждали выше:

1) симметричность (двойственный объект имеет ту же природу, что и исходный),

2) гибкость (употребляемые конструкции являются алгебраическими, в частности, в качестве групповых алгебр используются алгебры Хопфа в подходящих моноидальных категориях).

В качестве такого класса групп выбран класс компактно порожденных групп Штейна с алгебраической связной компонентой единицы, а базой для построений служит разработанная автором теория стереотипных пространств и алгебр, основные результаты которой также представлены в диссертации.

Научная новизна.

Все полученные результаты являются новыми и состоят в следующем.

- Найдена широкая категория $\mathfrak{Ste}$ локально выпуклых пространств, называемых стереотипными, позволяющая строить удобную теорию топологических алгебр, свободную от некоторых недостатков традиционной теории.

- Показано, что $\mathfrak{Ste}$ является полной и кополной предабелевой категорией.

- Показано, что $\mathfrak{Ste}$ обладает структурой замкнутой симметрической моноидальной категории, и что для всякой алгебры A в этой категории соответствующие категории ${}_A\mathfrak{Ste}$ и $\mathfrak{Ste}_A$ левых и правых A-модулей являются относительными категориями над категорией $\mathfrak{Ste}$.

- Показано, что свойство стереотипной аппроксимации в категории $\mathfrak{Ste}$ наследуется пространствами операторов и тензорными произведениями.

- Описана структура модулей над алгеброй $\mathcal{L}(X)$ операторов на стереотипном пространстве X со свойством стереотипной аппроксимации.

- Получено обобщение двойственности Понтрягина с категории коммутативных компактно порожденных групп Штейна на категорию (необязательно коммутативных) компактно порожденных групп Штейна с алгебраической связной компонентой единицы.

Методы исследования.

В диссертации используются различные методы функционального анализа, абстрактного гармонического анализа, комплексного анализа и общей топологии. Широко применяются также разработанные автором за последние годы методы теории стереотипных пространств и алгебр.

Теоретическая и практическая ценность.

Диссертация носит теоретический характер. Полученные в ней результаты могут найти применение в исследовании групп Штейна и групповых алгебр.

Апробация работы.

Результаты диссертации неоднократно докладывались

— на научно-исследовательских семинарах МГУ им. М. В. Ломоносова:

  - «Алгебры в анализе», кафедра Теории функций и функционального анализа, руководитель: проф. А. Я. Хелемский, 1996, 1997, 1998, 1999, 2000, 2003, 2004, 2005, 2006, 2008.

  - «Семинар по многомерному комплексному анализу», кафедра Теории функций и функционального анализа, руководители: проф. В. К. Белошапка, чл.-корр. РАН С. Ю. Немировский, проф. А. Г. Сергеев, чл.-корр. РАН Е. М. Чирка, 2009.

  - «Бесконечномерный анализ и его приложения», кафедра Теории функций и функционального анализа, руководители: проф. О. Г. Смолянов, проф. Е. Т. Шавгулидзе, 2009.

- «Группы Ли и теория инвариантов», кафедра Высшей алгебры, руководители: к.ф-м.н. И.В.Аржанцев, проф. Э. Б. Винберг, проф. А. Л. Онищик, доц. Д.А.Тимашев, 2009.
- «Некоммутативная геометрия и топология», кафедра Высшей геометрии и топологии, руководители: проф. И. К. Бабенко, доц. А. А. Ирматов, проф. А. С. Мищенко, проф. В. М. Мануйлов, проф. Е. В. Троицкий, 2009,

— на научно-исследовательских семинарах в зарубежных университетах:

- общекафедральный семинар факультета математики, университет Ньюкастла, Великобритания, руководитель: проф. Н. Янг, 1998.
- «Банаховы и локально выпуклые алгебры», Афинский университет, Греция, руководитель: проф. М. Фрагулопулу, 2006.
- «Алгебра», университет г. Сейнт-Джонс, Канада, руководитель: проф. Ю. А. Бахтурин, 2004.
- «Семинар по некоммутативному гармоническому анализу», университет г. Каэн, Франция, руководитель: проф. Л. И. Вайнерман, 2009.
- Математический семинар университета г. Люксембург, руководитель: проф. М. Шлихенмайер, 2010.

— на международных конференциях:

- “Топологические алгебры, их приложения и связанные вопросы”, Бендлево, Польша, 2003,
- “Школа по некоммутативной геометрии”, Варшава, Польша, 2005,
- “Представления групп Ли и алгебраических групп”, Эрланген, Германия, 2010.

Публикации.

Основные результаты диссертации опубликованы в 12 работах, список которых приведён в конце автореферата (из них 8 работ опубликованы в журналах из перечня ВАК).

Структура диссертации.

Диссертация состоит из введения, пяти глав (разбитых на разделы) и списка литературы, насчитывающего 86 наименований. Общий объём диссертации — 356 страниц.

Краткое содержание диссертации

Во **введении** приводится краткий исторический обзор по тематике работы, а также излагаются мотивировки, цели и методы исследования.

В **главе 1** приводятся предварительные сведения из теории локально выпуклых пространств (ЛВП) и доказываются вспомогательные технические результаты, лежащие в основаниях теории стереотипных пространств: описываются свойства вполне ограниченных и емких множеств в локально выпуклом пространстве, строятся функторы псевдопополнения и псевдонасыщения локально выпуклого пространства и доказывается двойственность между ними.

Вполне ограниченные множества и псевдополные пространства. Множество S в ЛВП X называется *вполне ограниченным*, или *предкомпактным*, если для всякой окрестности нуля U в X найдется конечное множество A такое, что $S \subseteq U + A$. Это равносильно тому, что S вполне ограничено в смысле индуцированной из X равномерной структуры (поэтому A *можно выбирать лежащим в* S).

ЛВП X называется *псевдополным*, если в нем всякая вполне ограниченная направленность Коши сходится. Это равносильно тому, что всякое замкнутое вполне ограниченное множество S в X является компактом.

Теорема 1. *Каждому ЛВП X можно поставить в соответствие морфизм*[27] $\nabla_X : X \to X^\triangledown$ *в некоторое псевдополное ЛВП $X^\triangledown$ так, чтобы выполнялись условия*

(i) X псевдополно, тогда и только тогда, когда $\nabla_X : X \to X^\triangledown$ – изоморфизм;

[27] Морфизмом локально выпуклых пространств мы называем линейное непрерывное отображение.

(ii) для любого морфизма ЛВП $\varphi : X \to Y$ найдется единственный морфизм ЛВП $\varphi^\nabla : X^\nabla \to Y^\nabla$, замыкающий диаграмму

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\nabla_X"] \arrow[d, "\varphi"'] & X^\nabla \arrow[d, dashed, "\varphi^\nabla"] \\ Y \arrow[r, "\nabla_Y"] & Y^\nabla \end{tikzcd}. \qquad (3)$$

Пространство X^∇ называется *псевдопополнением* пространства X.

Емкие множества и псевдонасыщенные пространства. Множество D в ЛВП X называется *емким*, если для любого вполне ограниченного множества $S \subseteq X$ существует конечное $A \subseteq X$ такое что $S \subseteq D + A$. Если D замкнуто, выпукло и уравновешенно, то это условие равносильно условию *массивности в нуле*, то есть тому, что для любого вполне ограниченного множества S в X найдется окрестность нуля U в X такая, что $S \cap U \subseteq D$.

ЛВП X называется *псевдонасыщенным*, если в нем всякое замкнутое выпуклое уравновешенное емкое множество D является окрестностью нуля.

Теорема 2. *Каждому ЛВП X можно поставить в соответствие морфизм $\vartriangle_X: X^\vartriangle \to X$ из некоторого псевдонасыщенного ЛВП $X^\vartriangle$ так, чтобы выполнялись условия*

(i) X псевдонасыщено, тогда и только тогда, когда $\vartriangle_X: X^\vartriangle \to X$ – изоморфизм;

(ii) для любого морфизма ЛВП $\varphi : Y \to X$ найдется единственный морфизм ЛВП $\varphi^\vartriangle : Y^\vartriangle \to X^\vartriangle$, замыкающий диаграмму

$$\begin{tikzcd} X & X^\vartriangle \arrow[l, "\vartriangle_X"'] \\ Y \arrow[u, "\varphi"] & Y^\vartriangle \arrow[l, "\vartriangle_Y"'] \arrow[u, dashed, "\varphi^\vartriangle"'] \end{tikzcd}. \qquad (4)$$

Пространство $X^\vartriangle$ называется *псевдонасыщением* пространства X.

Сопряженное пространство. *Сопряженным пространством* $X^\star$ к ЛВП X над $\mathbb{C}$ называется пространство линейных непрерывных функционалов $f : X \to \mathbb{C}$, наделенное *топологией равномерной сходимости на вполне ограниченных множествах в* X. Если $\varphi : X \to Y$ – морфизм ЛВП, то формула

$$\varphi^\star(g) = g \circ \varphi$$

определяет морфизм сопряженных пространств, $\varphi^\star : Y^\star \to X^\star$, который называется *сопряженным морфизмом.* Отображение $\varphi \mapsto \varphi^\star$ является контравариантным функтором в категории ЛВП, который называется *функтором сопряжения.* Следующие две теоремы показывают, что функтор сопряжения устанавливает в некотором смысле двойственность между функторами псевдопополнения и псевдонасыщения.

Теорема 3. *Пусть X – псевдополное ЛВП. Тогда*

(a) существует единственный изоморфизм

$$(X^\vartriangle)^\star = (X^\star)^\triangledown$$

такой, что коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} (X^\vartriangle)^\star \arrow[rr, equal] & & (X^\star)^\triangledown \\ & X^\star \arrow[ul, "(\vartriangle_X)^\star"] \arrow[ur, "\triangledown_{X^\star}"'] & \end{tikzcd} \quad ; \tag{5}$$

(b) для всякого морфизма псевдополных ЛВП $\varphi : X \to Y$ коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} (X^\vartriangle)^\star \arrow[r, equal] & (X^\star)^\triangledown \\ (Y^\vartriangle)^\star \arrow[r, equal] \arrow[u, "(\varphi^\vartriangle)^\star"] & (Y^\star)^\triangledown \arrow[u, "(\varphi^\star)^\triangledown"'] \end{tikzcd} \quad . \tag{6}$$

Теорема 4. *Пусть X – псевдонасыщенное ЛВП. Тогда*

(a) существует единственный изоморфизм

$$(X^\triangledown)^\star = (X^\star)^\vartriangle$$

такой, что коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
(X^\nabla)^\star \arrow[rr, equal] \arrow[dr, "(\nabla_X)^\star"'] & & (X^\star)^\vartriangle \arrow[dl, "\vartriangle_{X^\star}"] \\
& X^\star &
\end{tikzcd} ; \tag{7}$$

(b) для всякого морфизма псевдонасыщенных ЛВП $\varphi : X \to Y$ коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
(X^\nabla)^\star \arrow[r, equal] & (X^\star)^\vartriangle \\
(Y^\nabla)^\star \arrow[r, equal] \arrow[u, "(\varphi^\nabla)^\star"] & (Y^\star)^\vartriangle \arrow[u, "(\varphi^\star)^\vartriangle"']
\end{tikzcd} . \tag{8}$$

В **главе 2** вводится понятие стереотипного пространства, приводятся примеры и описываются важнейшие свойства категории стереотипных пространств.

Стереотипные пространства. ЛВП X мы называем *стереотипным*, если оно одновременно псевдополно и псевдонасыщено. Справедлива следующая

Теорема 5. *Для ЛВП X следующие условия эквивалентны:*

(i) пространство X стереотипно;

(ii) естественное отображение $i_X : X \to X^{\star\star}$ является изоморфизмом ЛВП.

Как оказывается, все *квазиполные бочечные пространства* являются стереотипными. В частности, все банаховы пространства и все пространства Фреше являются стереотипными. Наглядно это можно продемонстрировать картинкой:

Класс $\mathfrak{Ste}$ стереотипных пространств образует категорию, морфизмами в которой служат линейные непрерывные отображения $\varphi : X \to Y$. Категория $\mathfrak{Ste}$ предабелева:

Теорема 6. *Всякий морфизм стереотипных пространств $\varphi : X \to Y$ обладает*

– *ядром* $\mathsf{ker}\,\varphi : \mathsf{Ker}\,\varphi \to X$,

– *коядром* $\mathsf{coker}\,\varphi : Y \to \mathsf{Coker}\,\varphi$,

– *образом* $\mathsf{im}\,\varphi : \mathsf{Im}\,\varphi \to Y$

– *и кообразом* $\mathsf{coim}\,\varphi : X \to \mathsf{Coim}\,\varphi$

в категории $\mathfrak{Ste}$ стереотипных пространств. При этом, операция $\varphi \mapsto \varphi^\star$ перехода к сопряженному отображению устанавливает следующие связи между этими объектами:

$$(\mathsf{ker}\,\varphi)^\star = \mathsf{coker}\,\varphi^\star \quad (\mathsf{coker}\,\varphi)^\star = \mathsf{ker}\,\varphi^\star \quad (\mathsf{im}\,\varphi)^\star = \mathsf{coim}\,\varphi^\star \quad (\mathsf{coim}\,\varphi)^\star = \mathsf{im}\,\varphi^\star$$

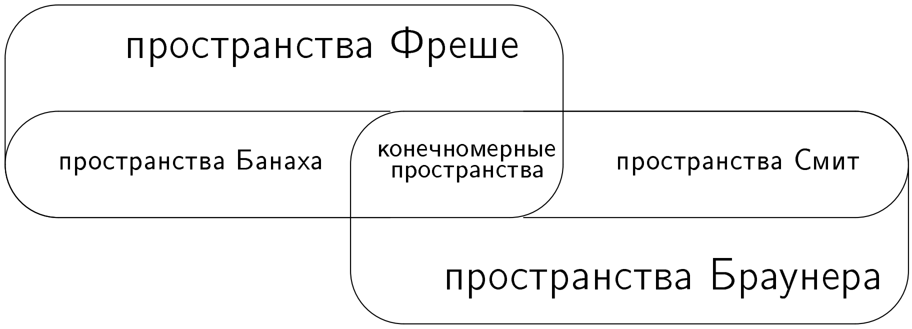
$$(\mathsf{Ker}\,\varphi)^{\perp\vartriangle} = \mathsf{Im}\,\varphi^\star \quad (\mathsf{Im}\,\varphi)^{\perp\vartriangle} = \mathsf{Ker}\,\varphi^\star \quad \mathsf{Ker}\,\varphi = (\mathsf{Im}\,\varphi^\star)^{\perp\vartriangle} \quad \mathsf{Im}\,\varphi = (\mathsf{Ker}\,\varphi^\star)^{\perp\vartriangle}$$

Стереотипное пространство X называется

— *пространством Смит*, если его сопряженное пространство $X^\star$ является банаховым пространством,

— *пространством Браунера*, если его сопряженное пространство $X^\star$ является пространством Фреше.

Связи между классами пространств Фреше, Браунера, Банаха и Смит иллюстрируются следующей диаграммой (в которой переход к сопряженному классу получается поворотом на 180°):



Пространства операторов, билинейных форм и тензорные произведения. Пусть X и Y – два ЛВП. Обозначим через $Y : X$ пространство всех морфизмов (то есть линейных непрерывных операторов) $\varphi : X \to Y$, наделенное *топологией равномерной сходимости на вполне ограниченных множествах в* X, а символом $Y \oslash X$ – псевдонасыщение пространства $Y : X$,

$$Y \oslash X = (Y : X)^{\vartriangle}$$

Если пространства X и Y стереотипны, то пространство $Y \oslash X$ тоже стереотипно.

Для любых трех ЛВП X, Y, Z билинейную форму $\beta : X \times Y \to Z$ мы называем *непрерывной*, если она удовлетворяет следующим двум условиям:

1) для всякой окрестности нуля $W \subset Z$ найдутся вполне ограниченное множество $S \subset X$ и окрестность нуля $V \subset Y$ такие, что $\beta(S, V) \subseteq W$;

2) для всякой окрестности нуля $W \subset Z$ найдутся вполне ограниченное множество $T \subset Y$ и окрестность нуля $U \subset X$ такие, что $\beta(U, T) \subseteq W$.

Символом $Z : (X, Y)$ обозначается пространство всех непрерывных билинейных форм $\beta : X \times Y \to Z$, наделенное топологией *равномерной сходимости на* *вполне ограниченных множествах* в $X \times Y$, а символом $Z \oslash (X,Y)$ – псевдонасыщение этого пространства:

$$Z \oslash (X,Y) = \Big\{ Z : (X,Y) \Big\}^{\vartriangle}$$

Если пространства X, Y и Z стереотипны, то пространство $Z \oslash (X,Y)$ тоже стереотипно.

Проективное (стереотипное) тензорное произведение стереотипных пространств X и Y определяется эквивалентными равенствами

$$X \circledast Y := (X^\star \oslash Y)^\star, \qquad X \circledast Y := (\mathbb{C} \oslash (X,Y))^\star$$

причем при $x \in X$ и $y \in Y$ элементарный тензор $x \circledast y \in X \circledast Y$ определяется эквивалентными равенствами

$$\underbrace{(x \circledast y)(\varphi) := \varphi(y)(x)}_{\substack{\varphi \in X^\star \oslash Y \\ x \circledast y \in (X^\star \oslash Y)^\star}}, \qquad \underbrace{(x \circledast y)(\beta) := \beta(x,y)}_{\substack{\beta \in \mathbb{C} \oslash (X,Y) \\ x \circledast y \in (\mathbb{C} \oslash (X,Y))^\star}}$$

Инъективное (стереотипное) тензорное произведение стереотипных пространств X и Y определяется эквивалентными равенствами

$$X \odot Y := Y \oslash X^\star, \qquad X \odot Y := \mathbb{C} \oslash (X^\star, Y^\star)$$

причем при $x \in X$ и $y \in Y$ элементарный тензор $x \odot y \in X \odot Y$ определяется эквивалентными равенствами

$$\underbrace{(x \odot y)(f) := f(x) \cdot y}_{\substack{f \in X^\star \\ x \odot y \in Y \oslash X^\star}}, \qquad \underbrace{(x \odot y)(f,g) := f(x) \cdot g(y)}_{\substack{f \in X^\star,\ g \in Y^\star \\ x \odot y \in \mathbb{C} \oslash (X^\star, Y^\star)}}$$

Справедливы следующие тождества, естественные по X, Y, Z:

$$(X \circledast Y)^\star \cong Y^\star \odot X^\star \qquad (X \odot Y)^\star \cong Y^\star \circledast X^\star$$

$$Z \oslash (X \circledast Y) \cong (Z \oslash X) \oslash Y \qquad (X \odot Y) \oslash Z \cong X \odot (Y \oslash Z)$$

$$\mathbb{C} \circledast X \cong X \cong X \circledast \mathbb{C} \qquad \mathbb{C} \odot X \cong X \cong X \odot \mathbb{C}$$

$$X \circledast Y \cong Y \circledast X \qquad X \odot Y \cong Y \odot X$$

$$(X \circledast Y) \circledast Z \cong X \circledast (Y \circledast Z) \qquad (X \odot Y) \odot Z \cong X \odot (Y \odot Z)$$

$$\left(\bigoplus_{i \in I} X_i \right) \circledast Y \cong \bigoplus_{i \in I} (X_i \circledast Y) \qquad \left(\prod_{i \in I} X_i \right) \odot Y \cong \prod_{i \in I} (X_i \odot Y)$$

Теорема 7. *Существует единственный морфизм стереотипных пространств $@_{X,Y} : X \circledast Y \to X \odot Y$, называемый преобразованием Гротендика, удовлетворяющий тождеству*

$$@_{X,Y}(x \circledast y) = x \odot y$$

Теорема 8. *Категория $\mathfrak{Ste}$ стереотипных пространств является моноидальной категорией относительно операций проективного $\circledast$ и инъективного $\odot$ тензорного произведения, причем проективное тензорное произведение $\circledast$ задает на $\mathfrak{Ste}$ структуру замкнутой моноидальной категории с внутренним $\mathfrak{hom}$-функтором в виде дроби $\oslash$:*

$$\mathsf{Hom}(X, Y) = Y \oslash X$$

Свойство стереотипной аппроксимации. Для всякого стереотипного пространства X символами $\mathcal{L}(X)$ и $\mathcal{L}^\star(X)$ мы обозначаем пространства

$$\mathcal{L}(X) := X \oslash X, \qquad \mathcal{L}^\star(X) := \{X \oslash X\}^\star$$

Пространство $\mathcal{L}(X)$ состоит из линейных непрерывных операторов $\alpha : X \to X$ и наделено топологией, являющейся псевдонасыщением топологии равномерной сходимости на вполне ограниченных множествах в X. Из определений $\circledast$ и $\odot$ имеем,

$$\mathcal{L}(X) = X^\star \odot X, \qquad \mathcal{L}^\star(X) = X^\star \circledast X,$$

поэтому между $\mathcal{L}(X)$ и $\mathcal{L}^\star(X)$ имеется естественное преобразование Гротендика:

$$@_X : \mathcal{L}^\star(X) = X^\star \circledast X \to X^\star \odot X = \mathcal{L}(X)$$

Будем говорить, что стереотипное пространство X обладает *стереотипной аппроксимацией*, если единичный оператор 1_X приближается конечномерными в пространстве $\mathcal{L}(X) = X \oslash X$.

Теорема 9. *Для стереотипного пространства X следующие условия эквивалентны:*

(i) X обладает стереотипной аппроксимацией;

(ii) преобразование Гротендика $@_X : \mathcal{L}^\star(X) = X^\star \circledast X \to X^\star \odot X = \mathcal{L}(X)$ является мономорфизмом (в категории $\mathfrak{Ste}$);

(iii) *преобразование Гротендика* $@_X : \mathcal{L}^\star(X) = X^\star \circledast X \to X^\star \odot X = \mathcal{L}(X)$ *является эпиморфизмом (в категории* $\mathfrak{Ste}$*);*

(iv) *для всякого стереотипного пространства* Y *преобразование Гротендика* $@ : Y \circledast X \to Y \odot X$ *является мономорфизмом (в категории* $\mathfrak{Ste}$*);*

(v) *для всякого стереотипного пространства* Y *преобразование Гротендика* $@ : Y \circledast X \to Y \odot X$ *является эпиморфизмом (в категории* $\mathfrak{Ste}$*).*

Следующая теорема иллюстрирует тезис, что стереотипная теория позволяет упрощать функциональный анализ, уменьшая количество контрпримеров в нем. Как известно, если банахово пространство X обладает свойством классической аппроксимации, то это необязательно будет верно для его пространства операторов $B(X)$: в 1981 году А. Шанковский показал[28], что пространство $B(H)$ ограниченных операторов на бесконечномерном гильбертовом пространстве H не обладает аппроксимацией. В стереотипной теории этот контрпример исчезает:

Теорема 10. *Пусть* X *и* Y *– стереотипные пространства со свойством стереотипной аппроксимации. Тогда пространства* $Y \oslash X, X \circledast Y, X \odot Y$ *также обладают свойством стереотипной аппроксимации.*

В **главе 3** определяются стереотипные алгебры и модули над ними, приводятся примеры, описываются важнейшие свойства категории стереотипных модулей над алгеброй и вводится понятие стереотипной алгебры Хопфа.

Проективные и инъективные стереотипные алгебры. Стереотипное пространство A над $\mathbb{C}$ мы называем *проективной стереотипной алгеброй* (или просто *проективной алгеброй*) если A является моноидом в категории $(\mathfrak{Ste}, \circledast)$, то есть если заданы морфизмы стереотипных пространств

$$\mu : A \circledast A \to A \qquad \varepsilon : \mathbb{C} \to A$$

[28]A. Szankowski, *B(H) does not have the approximation property*, Act. Math. 147:89-108 (1981).

для которых будут коммутативны диаграммы

$$\begin{tikzcd}
A \circledast (A \circledast A) \arrow[d, "1\circledast\mu"'] & \cong & (A \circledast A) \circledast A \arrow[d, "\mu\circledast 1"] \\
A \circledast A \arrow[r, "\mu"] & A & A \circledast A \arrow[l, "\mu"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C} \circledast A \arrow[dr, "\varepsilon\circledast 1"'] & \cong & A & \cong & A \circledast \mathbb{C} \arrow[dll, "1\circledast\varepsilon"] \\
& & A \circledast A \arrow[u, "\mu"'] & &
\end{tikzcd}.$$

Это эквивалентно тому, что на A задана структура ассоциативной алгебры над $\mathbb{C}$ с единицей, причем операция умножения является непрерывной билинейной формой в смысле определения на с.15. В этом случае умножение в A непрерывно пропускается через стереотипное проективное тензорное произведение: существует морфизм $\mu : A \circledast A \to A$ такой что коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
A \times A \arrow[rr, "(x,y)\mapsto x\circledast y"] \arrow[dr, "(x,y)\mapsto x\cdot y"'] & & A \circledast A \arrow[dl, dashed, "\mu"] \\
& A &
\end{tikzcd}.$$

Стереотипное пространство A над $\mathbb{C}$ мы называем *инъективной стереотипной алгеброй*, если A является моноидом в категории $(\mathfrak{Ste}, \odot)$ то есть если заданы морфизмы стереотипных пространств

$$\mu : A \odot A \to A \qquad \varepsilon : \mathbb{C} \to A$$

для которых будут коммутативны диаграммы

$$\begin{tikzcd}
A \odot (A \odot A) \arrow[d, "1\odot\mu"'] & \cong & (A \odot A) \odot A \arrow[d, "\mu\odot 1"] \\
A \odot A \arrow[r, "\mu"] & A & A \odot A \arrow[l, "\mu"']
\end{tikzcd} \tag{9}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C} \odot A \arrow[dr, "\varepsilon\odot 1"'] & \cong & A & \cong & A \odot \mathbb{C} \arrow[dll, "1\odot\varepsilon"] \\
& & A \odot A \arrow[u, "\mu"'] & &
\end{tikzcd}.$$

Теорема 11. *Всякая инъективная стереотипная алгебра A является проективной стереотипной алгеброй.*

Пример 12. Для пространства Фреше A свойство быть стереотипной алгеброй эквивалентно совместной непрерывности операции умножения. Поэтому *любая алгебра Фреше с единицей будет проективной стереотипной алгеброй.*

Пример 13. *Алгебра операторов $\mathcal{L}(X)$.* Для всякого стереотипного пространства X соответствующее пространство $\mathcal{L}(X)$ линейных непрерывных операторов $\varphi : X \to X$ является проективной стереотипной алгеброй относительно операции композиции $\varphi \circ \psi$.

Пример 14. *Алгебра непрерывных функций $\mathcal{C}(M)$ на паракомпактном локально компактном пространстве M* (с обычной топологией равномерной сходимости на компактах) является инъективной стереотипной алгеброй (с поточечным умножением).

Пример 15. *Алгебра гладких функций $\mathcal{E}(M)$ на гладком многообразии M* (с обычной топологией равномерной сходимости по каждой производной на компактах) является инъективной стереотипной алгеброй (с поточечным умножением).

Пример 16. *Алгебра голоморфных функций $\mathcal{O}(M)$ на многообразии Штейна M* (с топологией равномерной сходимости на компактах в M) является инъективной стереотипной алгеброй (с поточечным умножением).

Пример 17. *Алгебра регулярных функций $\mathcal{R}(M)$ на аффинном алгебраическом многообразии M* (с сильнейшей локально выпуклой топологией) является инъективной стереотипной алгеброй (с поточечным умножением).

Пример 18. *Алгебра $\mathcal{C}^\star(G)$ мер Радона с компактным носителем на локально компактной группе G* является проективной стереотипной алгеброй относительно операции свертки мер $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha * \beta$. Единицей в такой алгебре будет дельта-функционал в единице 1_G группы G:

$$\delta^{1_G}(u) = u(1_G)$$

Пример 19. *Алгебра $\mathcal{E}^\star(G)$ распределений с компактным носителем на группе Ли G* является проективной стереотипной алгеброй относительно операции свертки распределений $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha * \beta$.

Пример 20. *Алгебра $\mathcal{O}^\star(G)$ аналитических функционалов на группе Штейна G* является проективной стереотипной алгеброй относительно операции свертки $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha * \beta$.

Пример 21. *Алгебра регулярных потоков $\mathcal{R}^\star(G)$ на аффинной алгебраической группе G* является проективной стереотипной алгеброй относительно операции свертки $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha * \beta$.

Непрерывным представлением локально-компактной группы G в стереотипной алгебре A назовем всякое непрерывное отображение $\pi : G \to A$ со свойствами

$$\pi(s \cdot t) = \pi(s) \cdot \pi(t), \qquad \pi(1_G) = 1_A \tag{10}$$

Гладким представлением группы Ли G в стереотипной алгебре A назовем всякое отображение $\pi : G \to A$, удовлетворяющее тождествам (10), и такое, что для всякого функционала $f \in A^\star$ композиция $f \circ \pi$ будет гладкой функцией на G, причем отображение $f \in A^\star \mapsto f \circ \pi \in \mathcal{E}(G)$ будет непрерывно (заметим, что по этому определению, вложение $G \to \mathcal{C}^\star(G)$ не будет гладким представлением).

Голоморфным представлением группы Штейна G в стереотипной алгебре A назовем всякое отображение $\pi : G \to A$, удовлетворяющее тождествам (10), и такое, что для всякого функционала $f \in A^\star$ композиция $f \circ \pi$ будет голоморфной функцией на G, причем отображение $f \in A^\star \mapsto f \circ \pi \in \mathcal{O}(G)$ будет непрерывно (опять можно заметить, что по этому определению, вложения $G \to \mathcal{C}^\star(G)$ и $G \to \mathcal{E}^\star(G)$ не будут голоморфными представлениями).

Регулярным представлением аффинной алгебраической группы G в стереотипной алгебре A назовем всякое отображение $\pi : G \to A$, удовлетворяющее тождествам (10), и такое, что для всякого функционала $f \in A^\star$ композиция $f \circ \pi$ будет многочленом на G, причем отображение $f \in A^\star \mapsto f \circ \pi \in \mathcal{R}(G)$ будет непрерывно (снова получаем, что например вложение $G \to \mathcal{O}^\star(G)$ не будут регулярным представлениями).

Теорема 22. *Для всякой проективной стереотипной алгебры A диаграммы*

$$\begin{tikzcd} & A & \\ G \arrow[ur, "\pi"] \arrow[rr, "\delta"] & & \mathcal{C}^\star(G) \arrow[ul, "\varphi"'] \end{tikzcd}, \qquad \begin{tikzcd} & A & \\ G \arrow[ur, "\pi"] \arrow[rr, "\delta"] & & \mathcal{E}^\star(G) \arrow[ul, "\varphi"'] \end{tikzcd}, \tag{11}$$

$$\begin{tikzcd} & A & \\ G \arrow[ur, "\pi"] \arrow[rr, "\delta"] & & \mathcal{O}^\star(G) \arrow[ul, "\varphi"'] \end{tikzcd}, \qquad \begin{tikzcd} & A & \\ G \arrow[ur, "\pi"] \arrow[rr, "\delta"] & & \mathcal{R}^\star(G) \arrow[ul, "\varphi"'] \end{tikzcd} \tag{12}$$

(в которых δ – вложения в качестве дельта-функций) устанавливают биекции между

– *непрерывными представлениями произвольной локально-компактной группы G в алгебре A и морфизмами проективных стереотипных алгебр $\varphi : \mathcal{C}^\star(G) \to A$;*

– *гладкими представлениями произвольной вещественной группы Ли G в алгебре A и морфизмами проективных стереотипных алгебр $\varphi : \mathcal{E}^\star(G) \to A$;*

– *голоморфными представлениями произвольной группы Штейна G в алгебре A и морфизмами проективных стереотипных алгебр $\varphi : \mathcal{O}^\star(G) \to A$;*

– *регулярными представлениями произвольной аффинной алгебраической группы G над $\mathbb{C}$ в алгебре A и морфизмами проективных стереотипных алгебр $\varphi : \mathcal{R}^\star(G) \to A$.*

Стереотипные модули. Стереотипное пространство X над $\mathbb{C}$ с заданной на нем структурой левого (или правого) A-модуля называется *стереотипным A-модулем*, если операция умножения на элементы A является непрерывной билинейной формой в смысле определения с.15.

Теорема 23. *Категории ${}_A\mathfrak{Ste}$ и $\mathfrak{Ste}_A$ левых и правых стереотипных модулей над стереотипной алгеброй A являются относительными категориями над моноидальной категорией $(\mathfrak{Ste}, \circledast)$ стереотипных пространств.*

Если зафиксировать X, то для всякого другого стереотипного пространства E тензорные произведения $E \circledast X$ и $E \odot X$ будут стереотипными модулями над стереотипной алгеброй $\mathcal{L}(X)$.

Теорема 24. *Пусть X – стереотипное пространство со свойством стереотипной аппроксимации. Тогда для всякого левого стереотипного модуля M над $\mathcal{L}(X)$ найдется единственное (с точностью до изоморфизма) стереотипное пространство $\mathsf{E}(M)$ и два биморфизма левых стереотипных $\mathcal{L}(X)$-модулей (то есть два $\mathcal{L}(X)$-линейных непрерывных отображения с нулевым ядром и плотным образом) $\rho_M : \mathsf{E}(M) \circledast X \to M$ и $\sigma_M : M \to \mathsf{E}(M) \odot X$ такие что следующая диаграмма коммутативна:*

$$\begin{tikzcd}
& M \arrow[dr, "\sigma_M"] & \\
\mathsf{E}(M) \circledast X \arrow[ur, "\rho_M"] \arrow[rr, "@_{\mathsf{E}(M),X}"'] & & \mathsf{E}(M) \odot X
\end{tikzcd} \tag{13}$$

При этом,

(a) $\mathsf{E}(M)$ является замкнутым подпространством в M с топологией индуцированной из M в смысле категории $\mathfrak{Ste}$,

(b) если $\mu : M \to N$ – морфизм стереотипных модулей над $\mathcal{L}(X)$, то однозначно определен морфизм стереотипных пространств $\mathsf{E}(\mu) : \mathsf{E}(M) \to \mathsf{E}(N)$ такой, что коммутативна диаграмма:

$$\begin{tikzcd}
& M \arrow[dr, "\sigma_M"] \arrow[dd, "\mu"] & \\
\mathsf{E}(M) \circledast X \arrow[ur, "\rho_M"] \arrow[rr, "@_{\mathsf{E}(M),X}"'] \arrow[dd, "\mathsf{E}(\mu)\circledast \mathsf{id}_X"'] & & \mathsf{E}(M) \odot X \arrow[dd, "\mathsf{E}(\mu)\odot \mathsf{id}_X"] \\
& N \arrow[dr, "\sigma_N"] & \\
\mathsf{E}(N) \circledast X \arrow[ur, "\rho_N"] \arrow[rr, "@_{\mathsf{E}(N),X}"'] & & \mathsf{E}(N) \odot X
\end{tikzcd} \tag{14}$$

(c) отображение $\mathsf{E}(\cdot)$ является ковариантным функтором из категории ${}_{\mathcal{L}(X)}\mathfrak{Ste}$ левых стереотипных модулей над $\mathcal{L}(X)$ в категорию $\mathfrak{Ste}$ стереотипных пространств над $\mathbb{C}$, а семейства морфизмов $\{\rho_M;\ M \in {}_{\mathcal{L}(X)}\mathfrak{Ste}\}$ и $\{\sigma_M;\ M \in$

${}_{\mathcal{L}(X)}\mathfrak{Ste}\}$ – *естественными преобразованиями функтора* $\mathsf{E}(\cdot)\circledast X$ *в тождественный функтор на категории* ${}_{\mathcal{L}(X)}\mathfrak{Ste}$ *и тождественного функтора в функтор* $\mathsf{E}(\cdot)\odot X$ *соответственно.*

Следствие 25. *Пусть X – ядерное пространство Фреше с базисом. Тогда для всякого левого модуля Фреше M над стереотипной алгеброй операторов $\mathcal{L}(X)$ существует единственное (с точностью до изоморфизма) пространство Фреше E такое что M изоморфен проективному тензорному произведению пространств Фреше E и X: $M\cong E\widehat{\otimes}X$.*

Стереотипные алгебры Хопфа. *Алгеброй Хопфа* (другой термин – *моноид Хопфа*) в симметрической моноидальной категории $\mathfrak{K}$ называется пятерка $(H,\mu,\iota,\varkappa,\varepsilon,\sigma)$, в которой H – объект категории $\mathfrak{K}$, а морфизмы

$$\begin{aligned}
&\mu : H\otimes H\to H && \text{(умножение)},\\
&\iota : I\to H && \text{(единица)},\\
&\varkappa : H\to H\otimes H && \text{(коумножение)},\\
&\varepsilon : H\to I && \text{(коединица)},\\
&\sigma : H\to H && \text{(антипод)}
\end{aligned}$$

удовлетворяют следующим условиям:

1) тройка (H,μ,ι) образует моноид в $\mathfrak{K}$,

2) тройка $(H,\varkappa,\varepsilon)$ образует комоноид в $\mathfrak{K}$,

3) коммутативны следующие диаграммы,

$$\begin{tikzcd}
 & H \arrow[rr, "\varkappa"] & & H\otimes H \\
H\otimes H \arrow[ur, "\mu"] \arrow[r, "\varkappa\otimes\varkappa"'] & (H\otimes H)\otimes(H\otimes H) \arrow[r, "\theta_{H,H,H,H}"'] & (H\otimes H)\otimes(H\otimes H) \arrow[ur, "\mu\otimes\mu"'] &
\end{tikzcd} \qquad (15)$$

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "\mathsf{l}_I^{-1}"] \arrow[d, "\iota"'] & I\otimes I \arrow[d, "\iota\otimes\iota"] \\
H \arrow[r, "\varkappa"'] & H\otimes H
\end{tikzcd}\ ; \qquad
\begin{tikzcd}
H\otimes H \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\varepsilon\otimes\varepsilon"'] & H \arrow[d, "\varepsilon"] \\
I\otimes I \arrow[r, "\mathsf{l}_I"'] & I
\end{tikzcd}\ ; \qquad (16)$$

$$\begin{tikzcd} & H \arrow[dr, "\varepsilon"] & \\ I \arrow[ur, "\iota"] \arrow[rr, "1_I"'] & & I \end{tikzcd} \quad ; \tag{17}$$

означающие, что морфизмы $\varkappa : H \to H \otimes H$ и $\varepsilon : H \to I$ являются гомоморфизмами моноидов, а морфизмы $\mu : H \otimes H \to H$ и $\iota : I \to H$ – гомоморфизмами комоноидов в категории $\mathfrak{K}$ (здесь I – единица моноидальной категории $\mathfrak{K}$, $\mathsf{l}_I : I \to I \otimes I$ – соответствующий изоморфизм, а θ – преобразование, меняющее местами второй и третий множитель);

4) коммутативна диаграмма, называемая аксиомой антипода:

$$\begin{tikzcd} & H \otimes H \arrow[r, "\sigma\otimes 1_H"] & H \otimes H \arrow[dr, "\mu"] & \\ H \arrow[ur, "\varkappa"] \arrow[rr, "\varepsilon"] \arrow[dr, "\varkappa"'] & & I \arrow[r, "\iota"] & H \\ & H \otimes H \arrow[r, "1_H\otimes\sigma"] & H \otimes H \arrow[ur, "\mu"'] & \end{tikzcd} \tag{18}$$

Если выполнены только условия 1)-3), то четверка $(H, \mu, \iota, \varkappa, \varepsilon)$ называется *биалгеброй* в категории $\mathfrak{K}$.

Снова следуя общему определению, мы называем

– *проективной стереотипной алгеброй Хопфа* алгебру Хопфа в симметрической моноидальной категории стереотипных пространств $(\mathfrak{Ste}, \circledast)$;

– *инъективной стереотипной алгеброй Хопфа* алгебру Хопфа в симметрической моноидальной категории стереотипных пространств $(\mathfrak{Ste}, \odot)$;

– *ядерной алгеброй Хопфа-Фреше* алгебру Хопфа в симметрической моноидальной категории ядерных пространств Фреше $\mathfrak{NFre}$;

– *ядерной алгеброй Хопфа-Браунера* алгебру Хопфа в симметрической моноидальной категории ядерных пространств Браунера $\mathfrak{NBra}$.

Пусть кроме того, стереотипное пространство H обладает тем свойством, что преобразования Гротендика для пары $(H; H)$, тройки $(H; H; H)$ и четверки

$(H; H; H; H)$ являются изоморфизмами стереотипных пространств:

$$@_{H,H} : H \circledast H \cong H \odot H,$$
$$@_{H,H,H} : H \circledast H \circledast H \cong H \odot H \odot H$$
$$@_{H,H,H,H} : H \circledast H \circledast H \circledast H \cong H \odot H \odot H \odot H$$

(это всегда так, если H – ядерное пространство Фреше или ядерное пространство Браунера). Тогда, очевидно, задание структуры проективной стереотипной алгебры Хопфа на H эквивалентно заданию структуры инъективной стереотипной алгебры Хопфа на H: структурные элементы алгебр Хопфа в $(\mathfrak{Ste}, \circledast)$ и $(\mathfrak{Ste}, \odot)$ (мы отличаем их индексами $\circledast$ и $\odot$) будут или совпадать $\iota_\circledast = \iota_\odot$, $\varepsilon_\circledast = \varepsilon_\odot$, $\sigma_\circledast = \sigma_\odot$, или будут связаны диаграммами

$$\begin{tikzcd} H \circledast H \arrow[rr, "@_{H,H}"] \arrow[dr, "\mu_\circledast"'] & & H \odot H \arrow[dl, "\mu_\odot"] \\ & H & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} H \circledast H \arrow[rr, "@_{H,H}"] & & H \odot H \\ & H \arrow[ul, "\varkappa_\circledast"] \arrow[ur, "\varkappa_\odot"'] & \end{tikzcd}$$

Такие (одновременно проективные и инъективные) алгебры Хопфа мы будем называть *жесткими стереотипными алгебрами Хопфа.*

Пример 26. Любая ядерная алгебра Хопфа-Фреше и любая ядерная алгебра Хопфа-Браунера будут жесткими стереотипными алгебрами Хопфа.

Теорема 27 (о двойственности в классе стереотипных алгебр Хопфа). *Структура инъектиной (проективной, жесткой) алгебры Хопфа на стереотипном пространстве H автоматически задает структуру проективной (инъективной, жесткой) алгебры Хопфа на сопряженном стереотипном пространстве $H^\star$ – структурные элементы алгебры Хопфа на $H^\star$ определяются как сопряженные отображения структурных элементов алгебры Хопфа на H:*

$$\mu_{H^\star} = (\varkappa_H)^\star, \qquad \iota_{H^\star} = (\varepsilon_H)^\star,$$
$$\varkappa_{H^\star} = (\mu_H)^\star, \qquad \varepsilon_{H^\star} = (\iota_H)^\star,$$
$$\sigma_{H^\star} = (\sigma_H)^\star,$$

Стандартные групповые алгебры из примеров 18 – 21 являются проективными алгебрами Хопфа, а сопряженные к ним пространства – инъективными алгебрами Хопфа. Это можно изобразить следующей таблицей:

класс групп	алгебра функций (инъективная алгебра Хопфа)	алгебра функционалов (проективная алгебра Хопфа)
алгебраические группы	алгебра $\mathcal{R}(G)$ многочленов на G	алгебра $\mathcal{R}^\star(G)$ потоков степени 0 на G
группы Штейна	алгебра $\mathcal{O}(G)$ голоморфных функций на G	алгебра $\mathcal{O}^\star(G)$ аналитических функционалов на G
группы Ли	алгебра $\mathcal{E}(G)$ гладких функций на G	алгебра $\mathcal{E}^\star(G)$ распределений на G
локально компактные группы	алгебра $\mathcal{C}(G)$ непрерывных функций на G	алгебра $\mathcal{C}^\star(G)$ мер Радона на G

В **главе 4** строится теория двойственности для компактно порожденных групп Штейна с алгебраической связной компонентой единицы.

Голоморфные функции экспоненциального типа. Пусть G – группа Штейна. Локально ограниченная функция $f : G \to [1, +\infty)$ называется *полухарактером*, если она удовлетворяет неравенству субмультипликативности:

$$f(x \cdot y) \leqslant f(x) \cdot f(y), \qquad x, y \in G$$

Голоморфную функцию $u \in \mathcal{O}(G)$ на компактно порожденной группе Штейна G мы называем *функцией экспоненциального типа*, если она ограничивается некоторым полухарактером:

$$|u(x)| \leqslant f(x), \qquad x \in G \quad \Big(f(x \cdot y) \leqslant f(x) \cdot f(y)\Big)$$

Множество всех функций экспоненциального типа на G образует векторное пространство над $\mathbb{C}$, которое мы обозначаем $\mathcal{O}_{\exp}(G)$. Оно наделяется топологией следующим образом. Для всякого полухарактера $f : G \to [1, +\infty)$ множество голоморфных функций, подчиненных ему обозначается

$$f^{\blacksquare} := \{u \in \mathcal{O}(G) : \ \forall x \in G \ |u(x)| \leqslant f(x)\}$$

Оно образует компакт относительно индуцированной из $\mathcal{O}(G)$ топологии, и называется прямоугольником, порожденным функцией f. Очевидно, пространство $\mathcal{O}_{\exp}(G)$ представляет собой объединение прямоугольников $f^{\blacksquare}$, где f пробегает систему всевозможных полухарактеров на G:

$$\mathcal{O}_{\exp}(G) = \bigcup_{f \text{ – полухарактер на } G} f^{\blacksquare}$$

Множество M в $\mathcal{O}_{\exp}(G)$ считается замкнутым, если оно образует замкнутое пересечение со всяким таким прямоугольником $f^{\blacksquare}$. Наделенное такой топологией пространство $\mathcal{O}_{\exp}(G)$ оказывается пространством Браунера (если группа G компактно порождена). Сопряженное ему пространство $\mathcal{O}^{\star}_{\exp}(G)$, элементы которого называются экспоненциальными функционалами на G, будет пространством Фреше. Оба эти пространства вдобавок являются ядерными, и по аналогии с $\mathcal{O}(G)$ и $\mathcal{O}^{\star}(G)$ наделяются структурой алгебр Хопфа:

Теорема 28. *Для всякой компактно порожденной группы Штейна G*

– *пространство $\mathcal{O}_{\exp}(G)$ голоморфных функций экспоненциального типа на G является ядерной алгеброй Хопфа-Браунера;*

– *его сопряженное пространство $\mathcal{O}^{\star}_{\exp}(G)$ является ядерной алгеброй Хопфа-Фреше относительно сопряженных алгебраических операций.*

Оболочка Аренса-Майкла.

- Морфизм стереотипных алгебр $\sigma : A \to A'$ называется *расширением Аренса-Майкла*, если для любой банаховой алгебры B и любого морфизма $\varphi : A \to B$ найдется единственный морфизм $\varphi' : A' \to B$, замыкающий диаграмму:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[dr, "\forall\varphi"'] & & A' \arrow[dl, dashed, "\exists!\varphi'"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

- Морфизм стереотипных алгебр $\rho : A \to E$ называется *оболочкой Аренса-Майкла*, если для любого расширения Аренса-Майкла $\sigma : A \to A'$ найдется единственный морфизм $\upsilon : A' \to E$, замыкающий диаграмму:

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "\forall\sigma"'] \arrow[dr, "\rho"] & \\ A' \arrow[rr, dashed, "\exists!\upsilon"'] & & E \end{tikzcd}$$

Из этого определения ясно, что если $\rho : A \to E$ и $\sigma : A \to F$ – две оболочки Аренса-Майкла алгебры A, то возникающий гомоморфизм $\upsilon : F \to E$ (из-за своей единственности) будет изоморфизмом (топологических алгебр). Поэтому оболочка Аренса-Майкла алгебры A определяется однозначно с точностью до изоморфизма, и, как следствие, для нее можно ввести специальное обозначение:

$$\heartsuit_A : A \to A^\heartsuit$$

Его нужно понимать так: если нам дан какой-то гомоморфизм $\rho : A \to E$, то запись $\rho = \heartsuit_A$ означает, что $\rho : A \to E$ является оболочкой Аренса-Майкла алгебры A; если же нам дана алгебра E, то запись $E = A^\heartsuit$ означает, что существует гомоморфизм $\rho : A \to E$, являющийся оболочкой Аренса-Майкла алгебры A — в этом случае алгебру E также принято называть *оболочкой Аренса-Майкла алгебры* A.

Пример[29]. Оболочкой Аренса-Майкла алгебры $\mathcal{R}(M)$ многочленов на аффинном алгебраическом многообразии M является алгебра $\mathcal{O}(M)$ голоморфных функций на M:

$$\mathcal{R}(M)^\heartsuit = \mathcal{O}(M)$$

Голоморфно рефлексивные алгебры Хопфа. Жесткую стереотипную алгебру Хопфа H мы называем *голоморфно рефлексивной*, если ее оболочка Аренса-Майкла $H^\heartsuit$ обладает структурой жесткой стереотипной алгебры Хопфа такой, что:

(i) естественный гомоморфизм алгебр $\heartsuit_H : H \to H^\heartsuit$ является гомоморфизмом жестких алгебр Хопфа, и

[29] А. Ю. Пирковский. Оболочки Аренса-Майкла, гомологические эпиморфизмы и относительно квазисвободные алгебры, *Труды ММО*, 69: 34-123, 2008.

(ii) сопряженное отображение $(\heartsuit_H)^\star : (H^\heartsuit)^\star \to H^\star$ является оболочкой Аренса-Майкла алгебры $(H^\heartsuit)^\star$:

$$(\heartsuit_H)^\star = \heartsuit_{(H^\heartsuit)^\star}$$

Условия (i) и (ii) удобно изображать в виде диаграммы,

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, mapsto, "\heartsuit"] & H^\heartsuit \arrow[d, mapsto, "\star"] \\ H^\star \arrow[u, mapsto, "\star"] & (H^\heartsuit)^\star \arrow[l, mapsto, "\heartsuit"'] \end{tikzcd} \tag{19}$$

смысл которой состоит в том, что в углах квадрата стоят жесткие стереотипные алгебры Хопфа, причем горизонтальные стрелки (операции Аренса-Майкла $\heartsuit$) являются их гомоморфизмами, и, кроме того, чередование операций $\heartsuit$ и $\star$ (с какого места ни начинай) на четвертом шаге возвращает к исходной алгебре Хопфа (конечно, с точностью до изоморфизма).

Голоморфно рефлексивные алгебры Хопфа образуют категорию, в которой операция $H \mapsto H^{\heartsuit\star}$ является функтором двойственности:

$$(H^{\heartsuit\star})^{\heartsuit\star} \cong H$$

Поэтому диаграмму (19) разумно называть *диаграммой рефлексивности.*

Теорема 29. *Если G – компактно порожденная группа Штейна с алгебраической связной компонентой единицы, то алгебра $\mathcal{O}^\star(G)$ голоморфно рефлексивна, а диаграмма рефлексивности для нее принимает вид:*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}^\star(G) \arrow[r, mapsto, "\heartsuit"] & \mathcal{O}^\star_{\exp}(G) \arrow[d, mapsto, "\star"] \\ \mathcal{O}(G) \arrow[u, mapsto, "\star"] & \mathcal{O}_{\exp}(G) \arrow[l, mapsto, "\heartsuit"'] \end{tikzcd} \tag{20}$$

где $\mathcal{O}_{\exp}(G)$ – алгебра функций экспоненциального типа[30] *на G, а $\mathcal{O}^\star_{\exp}(G)$ – двойственная ей алгебра экспоненциальных функционалов.*

[30] Голоморфная функция $u : G \to \mathbb{C}$ называется *функцией экспоненциального типа* на G, если $|u(x)| \leqslant f(x)$ для некоторого *полухарактера* f (то есть непрерывного отображения $f : G \to \mathbb{R}_+$ со свойством $f(x \cdot y) \leqslant f(x) \cdot f(y)$).

Понтрягинская двойственность в комплексном анализе и ее обобщение. В теории комплексных групп Ли имеется свой аналог двойственности Понтрягина. В ней место окружности $\mathbb{T}$ занимает ее комплексификация, каковой будет мультипликативная группа ненулевых комплексных чисел:

$$\mathbb{C}^{\times} = \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

Эта группу можно назвать *комплексной окружностью.* Для любой абелевой компактно порожденной группы Штейна G двойственная группа $G^{\bullet}$ определяется как группа *голоморфных характеров* на G, то есть голоморфных гомоморфизмов группы G в комплексную окружность:

$$\chi \in G^{\bullet} \quad \Longleftrightarrow \quad \chi : G \to \mathbb{C}^{\times}$$

Понятно, что $G^{\bullet}$ будет топологической группой относительно поточечной операции умножения и топологии равномерной сходимости на компактах. Более того, на $G^{\bullet}$ имеется естественная комплексная структура, превращающая $G^{\bullet}$ в (абелеву компактно порожденную) группу Штейна. Отображение

$$i_G : G \to G^{\bullet\bullet}, \qquad i_G(x)(\chi) = \chi(x), \qquad x \in G,\ \chi \in G^{\bullet}$$

является изоморфизмом (комплексных групп Ли), и поэтому операция $G \mapsto G^{\bullet}$ является двойственностью в категории абелевых компактно порожденных групп Штейна.

Теорема 30. *Для всякой абелевой компактно порожденной группы Штейна G диаграмма рефлексивности* (20) *изоморфна диаграмме*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}^{\star}(G) \arrow[r, mapsto, "\mathcal{F}_G"] & \mathcal{O}(G^{\bullet}) \arrow[d, mapsto, "\star"] \\ \mathcal{O}(G) \arrow[u, mapsto, "\star"] & \mathcal{O}^{\star}(G^{\bullet}) \arrow[l, mapsto, "\mathcal{F}_G"'] \end{tikzcd} \tag{21}$$

в которой $\mathcal{F}_G$ – (обратное) преобразование Фурье на группе G:

$$\mathcal{F}_G : \mathcal{O}^{\star}(G) \to \mathcal{O}(G^{\bullet}), \qquad \mathcal{F}_G(\alpha)(\chi) = \underbrace{\alpha(\chi)}_{\substack{\uparrow \\ \text{действие функционала } \alpha \in \mathcal{O}^{\star}(G) \\ \text{на функцию } \chi \in G^{\bullet} \subseteq \mathcal{O}(G)}}, \qquad (\chi \in G^{\bullet}, \quad \alpha \in \mathcal{O}^{\star}(G))$$

Отображение $\mathcal{F}_G$ является гомоморфизмом жестких алгебр Хопфа и оболочкой Аренса-Майкла алгебры $\mathcal{O}^\star(G)$.

Из теоремы 30 следует, что справедливы изоморфизмы функторов

$$\Big(\mathcal{O}^\star(G)\Big)^\heartsuit \cong \mathcal{O}^\star_{\exp}(G) \cong \mathcal{O}(G^\bullet),$$

откуда получается изоморфизм функторов

$$\Big(\mathcal{O}^\star(G)\Big)^{\heartsuit\star} \cong \mathcal{O}^\star(G^\bullet),$$

доказывающий коммутативность следующей диаграммы категорий:

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\begin{array}{c}\text{голоморфно рефлексивные}\\ \text{алгебры Хопфа}\end{array}} \arrow[r, "H\mapsto (H^\heartsuit)^\star"] & \boxed{\begin{array}{c}\text{голоморфно рефлексивные}\\ \text{алгебры Хопфа}\end{array}} \\
\boxed{\begin{array}{c}\text{компактно порожденные группы Штейна}\\ \text{с алгебраической компонентой единицы}\end{array}} \arrow[u, "\begin{smallmatrix}\mathcal{O}^\star(G)\\ \uparrow\\ G\end{smallmatrix}"] & \boxed{\begin{array}{c}\text{компактно порожденные группы Штейна}\\ \text{с алгебраической компонентой единицы}\end{array}} \arrow[u, "\begin{smallmatrix}\mathcal{O}^\star(G)\\ \uparrow\\ G\end{smallmatrix}"'] \\
\boxed{\begin{array}{c}\text{абелевы}\\ \text{компактно порожденные группы Штейна}\end{array}} \arrow[u, "\mathfrak{e}"] \arrow[r, "G\mapsto G^\bullet"] & \boxed{\begin{array}{c}\text{абелевы}\\ \text{компактно порожденные группы Штейна}\end{array}} \arrow[u, "\mathfrak{e}"']
\end{tikzcd}$$

Эта диаграмма представляет обобщение двойственности Понтрягина с категории абелевых компактно порожденных групп Штейна на категорию компактно порожденных групп Штейна с алгебраической связной компонентой единицы, и является главным результатом диссертации.

В **главе 5** на примере квантовой группы '$az+b$'[31] показывается, что построенная теория двойственности не ограничивается классом компактно порожденных групп Штейна с алгебраической связной компонентой единицы, но продолжается в теорию квантовых групп.

[31] Описание группы '$az+b$' можно найти, например, в работе: S. L. Woronowicz, Quantum 'az + b' group on complex plane, *Int. J. Math.* 12(4): 461-503, 2001.

Голоморфная рефлексивность квантовой группы '$az+b$'$=\mathcal{R}_q(\mathbb{C}^\times\ltimes\mathbb{C})$.

Теорема 31. *При любом $q\in\mathbb{C}^\times$ жесткая алгебра Хопфа $\mathcal{R}_q(\mathbb{C}^\times\ltimes\mathbb{C})$ голоморфно рефлексивна, причем*

1) при $|q|=1$ ее диаграмма рефлексивности имеет вид

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{R}_q(\mathbb{C}^\times\ltimes\mathbb{C})\cong\mathcal{R}(\mathbb{C}^\times)\overset{z}{\underset{\delta^q}{\odot}}\mathcal{R}(\mathbb{C}) \arrow[r, mapsto, "\heartsuit"] & \mathcal{O}(\mathbb{C}^\times)\overset{z}{\underset{\delta^q}{\odot}}\mathcal{O}(\mathbb{C})\cong\mathcal{O}_q(\mathbb{C}^\times\ltimes\mathbb{C}) \arrow[d, mapsto, "\star"] \\
\mathcal{R}^\star_q(\mathbb{C}^\times\ltimes\mathbb{C})\cong\mathcal{R}^\star(\mathbb{C}^\times)\overset{\delta^q}{\underset{z}{\odot}}\mathcal{R}^\star(\mathbb{C}) \arrow[u, mapsto, "\star"] & \mathcal{O}^\star(\mathbb{C}^\times)\overset{\delta^q}{\underset{z}{\odot}}\mathcal{O}^\star(\mathbb{C})\cong\mathcal{O}^\star_q(\mathbb{C}^\times\ltimes\mathbb{C}) \arrow[l, mapsto, "\heartsuit"']
\end{tikzcd}$$

2) а при $|q|\neq1$ – вид:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{R}_q(\mathbb{C}^\times\ltimes\mathbb{C})\cong\mathcal{R}(\mathbb{C}^\times)\overset{z}{\underset{\delta^q}{\odot}}\mathcal{R}(\mathbb{C}) \arrow[r, mapsto, "\heartsuit"] & \mathcal{O}(\mathbb{C}^\times)\overset{z}{\underset{\delta^q}{\odot}}\mathcal{R}^\star(\mathbb{C}) \arrow[d, mapsto, "\star"] \\
\mathcal{R}^\star_q(\mathbb{C}^\times\ltimes\mathbb{C})\cong\mathcal{R}^\star(\mathbb{C}^\times)\overset{\delta^q}{\underset{z}{\odot}}\mathcal{R}^\star(\mathbb{C}) \arrow[u, mapsto, "\star"] & \mathcal{O}^\star(\mathbb{C}^\times)\overset{\delta^q}{\underset{z}{\odot}}\mathcal{R}(\mathbb{C}) \arrow[l, mapsto, "\heartsuit"']
\end{tikzcd}$$

Благодарности

Автор выражает искреннюю признательность О. Ю. Аристову, Д. Н. Ахиезеру, А. Ван Даале, Е. А. Горину, Ф. Гоше, Е. Б. Кацову, Ю. Н. Кузнецовой, А. Ю. Пирковскому, В. Л. Попову, А. Хаклберри, А. Я. Хелемскому за полезные обсуждения и помощь в работе.

Работы автора по теме диссертации

1. С. С. Акбаров. Стереотипные локально выпуклые пространства, *Известия РАН*, серия Математическая, 64(4):4-46, 2000.

2. С. С. Акбаров. Двойственность Понтрягина в теории топологических векторных пространств, *Математические заметки*, 57(3): 463-466, 1995.

3. С. С. Акбаров. Двойственность Понтрягина в теории топологических модулей, *Функциональный анализ и его приложения*, 29(4): 68-72, 1995.

4. С. С. Акбаров. Свойство стереотипной аппроксимации и проблема однозначности следа, *Функциональный анализ и его приложения*, 33(2): 68-73, 1999.

5. С. С. Акбаров. Стереотипные групповые алгебры, *Математические заметки*, 66(6): 941-944, 1999.

6. С. С. Акбаров. Стереотипные алгебры с отражением и теорема о бикоммутанте, *Математические заметки*, 66(5):789-792, 1999.

7. С. С. Акбаров. Абсолютная теория гомологий стереотипных алгебр, *Функциональный анализ и его приложения*, 34(1):76-79, 2000.

8. С. С. Акбаров. Строение модулей над стереотипной алгеброй операторов $\mathcal{L}(X)$, *Функциональный анализ и его приложения*, 40(2): 1-12, 2006.

9. S. S. Akbarov. Pontryagin duality in the theory of topological vector spaces and in Topological Algebra, *Journal of Mathematical Sciences*, 113(2):179-349, 2003.

10. С. С. Акбаров. Голоморфные функции экспоненциального типа и двойственность для групп Штейна с алгебраической связной компонентой единицы, *Фундаментальная и прикладная математика* 2008, 14(1): 3-178. (English version: S. S. Akbarov. Holomorphic functions of exponential type and duality for Stein groups with algebraic connected component of identity, *Journal of Mathematical Sciences*, 162(4): 459-586, 2009.)

11. S. S. Akbarov. Stereotype spaces, algebras, homologies: an outline, In: *“Topological homology”*, Editor: A.Ya.Helemskii, Nova Science Publishers, 1-29, 2000.

12. S. S. Akbarov. Pontryagin duality and topological algebras, in: “Topological Algebras, their Applications and Related Topics”, eds. K.Jarosz and A.Soltysiak, *Banach Center Publications*, 67: 55 - 71, 2005.