Общая характеристика работы

Актуальность темы. В связи с исследованием вопросов спектрального анализа в 1976 году Либом и Тиррингом [1] была доказана следующая

Теорема A. Для произвольной ортонормированной системы действительнозначных функций $\Phi = \{\varphi_j\}_{j=1}^N \subset L^2(R^2)$, $N = 1, 2, \dots$ имеет место неравенство

$$\int_{R^2} {\rho_\Phi}^2 dxdy \leqslant C \sum_{j=1}^N \|\nabla\varphi_j\|_2^2; \tag{1}$$

в (1) и ниже

$$\rho_\Phi \equiv \sum_{j=1}^N \varphi_j^2,$$

$C-$ абсолютная постоянная, и, как обычно, $\nabla\varphi \equiv (\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y})$.

Для функции $f \in L^2(R^2)$ определим преобразование Фурье:

$$\widehat{f}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{R^2} f(\xi, \eta) e^{-i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta.$$

Тогда неравенство (1) может быть преобразовано к виду

$$\int_{R^2} {\rho_\Phi}^2 dxdy \leqslant C \sum_{j=1}^N \int_{R^2} (x^2 + y^2) |\hat{\varphi}_j|^2 dxdy. \tag{2}$$

В дальнейшем серия неравенств типа Либа-Тирринга для ортонормированных систем была установлена многими авторами(см., в частности, Б. С. Кашин [2], А. А. Ильин [3], С.В. Асташкин [4], Р. Темам [5]).

Интерес к неравенствам типа Либа-Тирринга связан с их приложениями в теории дифференциальных уравнений с частными производными (см. подробнее работы[3,5]). Известные методы доказательства этих

[1]E. Lieb, W. Thirring, "Inequalities for the moments of the eigenvalues of the Schrödinger hamiltonian and their relation to Sobolev inequalities", Stud. Math. Phys., Essays in Honor of Valentine Bargmann, Princeton Univ. press, Princeton, 1976, 269-303.

[2]Б. С. Кашин, "Об одном классе неравенств для ортонормированных систем", Матем. Заметки, 80:2 (2006), 204-208.

[3]А.А. Ильин, "Интегральные неравенств Либа-Тирринга и их приложения к аттрактором уравнений Навье-Стокса", Матем. сб., 196:1 (2005), 33-66.

[4]С.В.Асташкин, "Неравенство Либа-Тирринга для L_p-норм", Матем.Заметки, 82:4 (2007), 163-169.

[5]R. Temam, Infinite-Dimensional Dinamical Systems in Mechanics and Physics, Springer-Verlag, New-York, 1997.

неравенств, основанные на нетривиальных результатах из спектральной теории, используют информацию о поведении отрицательных собственных значений операторов типа Шрёдингера (см., например, работу[5]). Неравенства типа Либа-Тирринга широко применяются в физике. С их помощью исследуются спектральные свойства некоторых линейных операторов типа Шредингера. Они играют значительную роль в оценках для спектра линейных операторов, возникающих в нелинейных эволюционных уравнениях.

Неравенства Либа-Тирринга применяются также для оценки сверху размерности глобальных аттракторов двумерных систем уравнений Навье-Стокса.

Утверждение Теоремы A фактически эквивалентно следующей оценке для отрицательного спектра $-\lambda_j = -\lambda_j(V)$ оператора $L\psi = -\triangle\psi - V\psi$ в $L^2(R^2)$ с неотрицательной функцией $V \in L^2(R^2)$

$$\sum_{\lambda_j \geq 0} \lambda_j \leq C \int_{R^2} V^2 \, dx \, dy,$$

где C-абсолютная постоянная.

Доказанные в настоящей работе неравенства типа Либа-Тирринга применяются для доказательств оценок снизу собственных значений операторов типа Шрёдингера.

Ильиным (см. работу[3]) была доказана

Теорема B. Пусть $\Phi = \{\varphi_j\}_{j=1}^N \subset L^2(S^1)$, $N = 1, 2, \ldots -$ ортонормированная система действительнозначных функций, заданных на единичной окружности S^1, с $\varphi_j \perp 1$, $j = 1, \ldots, N$, $N = 1, 2, \ldots$ Тогда имеет место неравенство

$$\int_{S^1} \rho_\Phi^2 \, d\mu \leq C \sum_{j=1}^N \|\varphi_j^{(\frac{1}{2})}\|^2_{L^2(S^1)},$$

где $f^{(1/2)} = \sum |k|^{\frac{1}{2}} \hat{f}_k z^k -$ производная от функции $f(z) = \sum \hat{f}_k z^k \in L^2(S^1)$ порядка $\frac{1}{2}$, C-абсолютная постоянная, а μ- нормированная мера Лебега на S^1.

В работе[2] Кашиным был предложен новый подход к неравенствам типа Либа-Тирринга, основанный на аппарате теории ортогональных рядов: неравенствах для случайных рядов и классической теореме Литтлвуда-Пэли.

Пусть

$$\Phi = \{\varphi_j\}_{j=1}^N \subset L^2(S^1), \quad \text{причём} \quad \varphi_j \perp 1, \, j = 1, \ldots, N.$$

Определим оператор

$$P_\Phi : l_N^2 \longrightarrow L^2(S^1),$$

действующий по правилу:

$$P_\Phi(\{c_j\}_{j=1}^N) = \sum_{j=1}^N c_j \varphi_j.$$

Пусть также при $\nu = 0, 1, \dots$

$$\pi_\nu : L^2(S^1) \longrightarrow T_{2^\nu}$$

-ортопроектор на пространство тригонометрических полиномов вида

$$T_{2^\nu} = \left\{ t(z) : t = \sum_{2^{\nu-1} \le |k| < 2^\nu} a_k z^k \right\},$$

и пусть

$$\lambda_\nu(\Phi) = \|\pi_\nu \cdot P_\Psi : l_2^N \longrightarrow T_{2^\nu}\|. \tag{3}$$

Очевидно, что $\lambda_\nu \le 1$, если Φ ортонормированная (или субортонормированная) система. Поэтому следующее утверждение (см. работу[2]) обобщает теорему B.

Теорема C. Для любой системы действительнозначных функций $\Phi = \{\varphi_j\}_{j=1}^N$, заданных на единичной окружности S^1, с $\varphi_j \perp 1$, $j = 1, \dots, N$, имеет место следующее неравенство

$$\int_{S^1} \rho_\Phi^2 \, d\mu \le C \sum_{\nu=0}^\infty \gamma_\nu(\Phi) \sum_{j=1}^N \sum_{2^{\nu-1} \le |k| < 2^\nu} |\hat{\varphi}_j(k)|^2,$$

где при $\nu = 0, 1, \dots$ $\gamma_\nu(\Phi) = \sum_{\beta=0}^\nu 2^\beta \lambda_\beta^2(\Phi)$, числа $\lambda_\beta(\Phi)$ определены в (3), а $C-$ абсолютная постоянная.

В работе Асташкина с использованием аппарата теории функций получено неравенство типа Либа-Тирринга, в котором в правой части норма пространства L^2 заменена на норму пространства L^p, $p \ge 2$. Точнее, в работе[4] установлена

Теорема D. Пусть k, $l \in N$, $k \ge 2$ и k делится на l. Тогда существует константа $C = C(k)$, такая, что для произвольной ортонормированной (или субортонормированной) системы действительнозначных функций $\Phi = \{\varphi_j\}_{j=1}^N \subset L^2(S^1)$, $N = 1, 2, \dots$ с $\varphi_j \perp 1$

$$\int_{S^1} \rho_\Phi^k \, d\mu \le C(k) \left(\sum_{j=1}^N \|\varphi_j^{\frac{l-1}{2}}\|_{\frac{2k}{l}}^2 \right)^{\frac{k}{l}}.$$

Цель работы. Целью настоящей работы является получение новых неравенств типа Либа-Тирринга и их использование в спектральной теории.

В диссертации исследован вопрос о возможности усиления неравенства (1), точнее вопрос о справедливости неравенства:

$$\int_{R^2} \rho_{\Phi}^2 \, dx \, dy \leq C \sum_{j=1}^{N} |xy||\hat{\varphi}_j|^2(x,y) \, dx \, dy \tag{4}$$

с некоторой абсолютной постоянной C.

Из классических теорем вложения вытекает справедливость неравенства (4) при $N = 1$.

Ясно, что выполнение для системы Φ оценки (4) гарантирует и выполнение неравенства (1).

Оказалось, что (4) имеет место не всегда, но справедлив немного ослабленный вариант этого неравенства, полезный в приложениях.

Методика исследования. В работе используются методы случайных и тригонометрических рядов и методы спектрального анализа неограниченных самосопряженных операторов.

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми. Основные из них следующие:

1. Построен пример последовательности ортонормированных систем функций $\Phi_N = \{\varphi_j\}_{j=1}^N$ в $L^2(R^2)$, $N \longrightarrow \infty$, для которых (4) не имеет места.

2. Установлено, что неравенство (4) становится справедливым для любой ортонормированной системы, если в нём абсолютную постоянную C заменить величиной $C(N) \leq C' \ln N$, C'-абсолютная постоянная. Также доказано, что неравенство (4) верно для ортонормированных систем функций специального типа.

3. Найдены новые приложения установленных в диссертации неравенств типа Либа-Тирринга в спектральной теории.

Теоретическая и практическая ценность. Настоящая работа носит теоретический характер. Полученные в ней результаты относятся к теории ортогональных рядов, к теории дифференциальных уравнений с частными производными и к спектральной теории.

Аппробация результатов. Основные результаты работы неоднократно докладывались на следующих семинарах:

• "Научно-исследовательский семинар"кафедры теории функций и функционального анализа механико-математического факультета МГУ под руководством член.-корр. РАН. проф. Б.С. Кашина, проф. Б.И. Голубова, проф. М.И. Дьяченко, проф. С.В. Конягина (2008-2010 г.);

• "Ортогональные ряды"кафедры теории функций и функционального анализа механико-математического факультета МГУ под руководством член.-корр.РАН. проф. Б.С. Кашина и проф. С.В. Конягина (2008 г.);

• "Функциональные пространства"кафедры теории функций и функционального анализа факультета математики и информатики Йенского университета под руководством проф. Харовски, проф. Шмайссера и проф. Трибеля (2010 г.).

Результаты диссертации докладывались также на следующих международных конференциях:

• "Спектральные задачи и смежные вопросы"(Москва, 18-21 ноября, 2009 г.);

• "Современные проблемы анализа и преподавания математики" (Москва, 17-19 мая, 2010 г.).

Публикации.Основные результаты диссертации опубликованы в 4 работах.

Структура и объем диссертации. Диссертация занимает 106 страницы текста и состоит из введения, трех глав, разбитых на 13 параграфов и списка литературы, включающего 14 наименований. Нумерация теорем двойная- номер главы и номер параграфа, нумерация лемм тройная- номер главы, номер параграфа и собственный номер.

Основное содержание работы.

Глава 1. Глава 1 посвящена изучению неравенств типа Либа-Тирринга для конечных ортонормированных систем.

В первом параграфе главы 1 построен пример последовательности конечных ортонормированных систем функций, для которых (4) не имеет место. Точнее, справедлива следующая

Теорема (1.1). Существует абсолютная постоянная $C > 0$, такая что для любого числа N, представимого в виде $N = 2^{3M}(2^{3M}-1)(M+1) + 2^{2M}(2^{M+1}-1)$, M- натуральное число, в $L^2(R^2)$ найдётся ортонормированная система действительнозначных функций $\Phi = \{\varphi_j\}_{j=1}^N$, для которой выполняется неравенство

$$\int_{R^2} \rho_\Phi^2 dxdy \geq C \cdot \ln N \sum_{j=1}^{N} \int_{R^2} |xy||\hat{\varphi}_j|^2(x,y)dxdy.$$

Параграфы 2-6 главы 1 посвящены изучению неравенств типа Либа-Тирринга для конечных ортонормированных систем.

Построенный в Теореме (1.1) пример показывает точность следующего результата:

Следствие (1.2). Для произвольной ортонормированной системы действительнозначных функций $\Phi = \{\varphi_j(x,y)\}_{j=1}^N \subset L^2(R^2)$, $N = 1, 2, \ldots$ выполняется неравенство

$$\int_{R^2} \rho_\Phi^2 \, dx \, dy \leq C'(\ln N + 1) \sum_{j=1}^N \int_{R^2} |xy||\hat{\varphi}_j|^2(x,y) \, dx \, dy,$$

где C' – абсолютная постоянная.

Следствие (1.2)- частный случай следующего результата:

Теорема (1.2). Для произвольной ортонормированной системы действительнозначных функций $\Phi = \{\varphi_j\}_{j=1}^N$ в $L^2(\mathbb{R}^2)$ и любого рационального числа $p \geq 1$ имеет место неравенство

$$\int_{\mathbb{R}^2} \rho_\Phi^{p+1} \, dx \, dy \leq C_p(\ln^p N + 1) \sum_{j=1}^N \int_{\mathbb{R}^2} |xy|^p |\hat{\varphi}_j|^2(x,y) \, dx \, dy,$$

где постоянная C_p зависит только от указанного индекса p.

В главе 1 установлены также

Теорема (1.3). Для произвольной ортонормированной системы действительнозначных функций $\Phi = \{\varphi_j\}_{j=1}^N$ в $L^2(\mathbb{R}^2)$ и любого $p \geq 1$, $p \in R \backslash \mathbb{Z}$ имеет место неравенство

$$\int_{\mathbb{R}^2} \rho_\Phi^{p+1} \, dx \, dy \leq C_p N^{\{p\}} (\ln^{[p]} N + 1) \sum_{j=1}^N \int_{\mathbb{R}^2} |xy|^p |\hat{\varphi}_j|^2(x,y) \, dx \, dy,$$

где постоянная C_p зависит только от указанного индекса p, $\{p\}$ и $[p]$-дробная часть и целая часть p соответственно.

Теорема (1.4). Для произвольных натуральных чисел p и q существует абсолютная постоянная $C_{p,q}$, такая, что для произвольной ортонормированной системы действительнозначных функций $\Phi = \{\varphi_j\}_{j=1}^N \subset L^2(R^2)$, $N = 1, 2, \ldots$ имеет место неравенство

$$\int_{\mathbb{R}^2} \rho_\Phi^{p+\frac{q}{2}+1} \, dx \, dy \leq C_{p,q}(\ln^p N + 1) \sum_{j=1}^N \int_{\mathbb{R}^2} |xy|^p (|x|^q + |y|^q) |\hat{\varphi}_j|^2(x,y) \, dx \, dy.$$

Теорема (1.5). Для любого натурального числа $d \geq 2$ существует постоянная C_d, такая, что для произвольной ортонормированной системы действительнозначных функций $\Phi = \{\varphi_j\}_{j=1}^N$ в $L^2(\mathbb{R}^d)$ имеет место неравенство

$$\int_{\mathbb{R}^d} \rho_\Phi^2\, dx_1 \dots dx_d \leq C_d(\ln^{d-1} N{+}1) \sum_{j=1}^N \int_{\mathbb{R}^d} |x_1 \dots x_d||\hat{\varphi}_j|^2(x_1, \dots, x_d)\, dx_1 \dots dx_d.$$

Глава 2 В главе 2 рассматриваются операторы типа Шредингера с неотрицательными потенциалами: $L_1 = -\triangle\psi + |xy|^p\psi$, где $p \geq 1$, и $L_2\psi = -\triangle\psi + |xy|^p(|x|^q + |y|^q)\psi$, $p, q \in N$.

Дискретность спектров приведённых операторов проверяется с помощью следующего критерия Молчанова [6]:

Для того чтобы спектр оператора $L = -\Delta\psi + Q\psi$ в $L^2(R^d)$, $d \geq 2$ с неотрицательным потенциалом Q не был дискретен, необходимо и достаточно, чтобы существовала последовательность $\{D_n\}_{n=1}^\infty$ непересекающихся квадратов одинакового размера со сторонами, параллельными осям координат, для которых

$$\lambda(D_n) < C,$$

где для любого квадрата D

$$\lambda(D) := inf_\Psi \int_D \left((grad\psi)^2 + Q\psi^2 \right) dx_1 \dots dx_d,$$

$$\Psi := \left\{ \psi : \int_D \psi^2\, dx_1 \dots dx_d = 1,\, \psi|_D = 0,\, D \quad \text{-граница квадрата} \quad D \right\},$$

а C постоянная.

С использованием результатов главы 1 в главе 2 установлены

Теорема (2.2). Для любого рационального числа p оператор $L\psi = -\triangle\psi + |xy|^p\psi$ в $L^2(\mathbb{R}^2)$ имеет дискретный спектр $\{\lambda_j\}_{j=1}^\infty$ с $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \dots, \lambda_j \to \infty$ при $j \to \infty$, и существует такая абсолютная положительная постоянная C'_p, что выполняется оценка

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j \geq C'_p \frac{N^{\frac{2p+1}{p+1}}}{(1 + \ln^p N)^{\frac{1}{p+1}}}, \quad N = 1, 2, \dots$$

[6] А. М. Молчанов, "Об условиях дискретности спектра самосопряженных дифференциальных уравнений второго порядка", Труды московского математического общества, т. 2 (1953), 169-199.

Теорема (2.3). Оператор $L\psi = -\triangle\psi + |xy|^p\psi$ с числом $p \geq 1$, $p \in R\backslash\mathbb{Z}$ в $L^2(\mathbb{R}^2)$ имеет дискретный спектр $\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$ с $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$, $\lambda_j \to \infty$ при $j \to \infty$, и существует такая абсолютная положительная постоянная C'_p, что выполняется оценка

$$\sum_{j=1}^{N} \lambda_j \geq C'_p \frac{N^{\frac{2p+1-\{p\}}{p+1}}}{(\ln^{[p]} N + 1)^{\frac{1}{p+1}}}, \quad N = 1, 2, \ldots$$

Теорема (2.4) Оператор $L\psi = -\triangle\psi + |xy|^p(|x|^q + |y|^q)\psi$ с натуральными числами p и q в $L^2(\mathbb{R}^2)$ имеет дискретный спектр $\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$ с $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$, $\lambda_j \to \infty$ при $j \to \infty$, и существует такая абсолютная положительная постоянная $C'_{p,q}$, что выполняется оценка

$$\sum_{j=1}^{N} \lambda_j \geq C'_{p,q} \frac{N^{\frac{4p+2q+2}{2p+q+2}}}{(1 + \ln^p N)^{\frac{2}{2p+q+2}}}, \quad N = 1, 2, \ldots$$

Теорема (2.5) Оператор $L\psi = -\triangle\psi + |x_1 \ldots x_d|\psi$ в $L^2(\mathbb{R}^d)$, $d \geq 2$ имеет дискретный спектр $\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$ с $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$, $\lambda_j \to \infty$ при $j \to \infty$, и существует такая абсолютная положительная постоянная C'_d, что выполняется оценка

$$\sum_{j=1}^{N} \lambda_j \geq C'_d \frac{N^{\frac{4+d}{2+d}}}{(1 + \ln N)^{\frac{2d-2}{2+d}}}, \quad N = 1, 2, \ldots.$$

Вывод теорем (2.1)-(2.5) из неравенств типа Либа-Тирринга использует метод, сообщенный автору проф. Ари Лаптевым.

Глава 3. Первый параграф главы 3 посвящен обобщению на многомерный случай теоремы C с использованием метода работы [2] .

Второй параграф главы 3 посвящен доказательству неравенства (4) для ортонормированных систем функций специального вида. Установлено, что для ортонормированных систем Φ, состоящих из функций вида $\varphi_j(x, y) = u_j(x)v_j(y)$, неравенство (4) имеет место. Более того, справедлива

Теорема (3.2). Существует такая абсолютная постоянная C, что для произвольной системы действительнозначных функций $\Phi = \{\varphi_j(\xi)u_j(\eta)\}_{j=1}^{N}$, где $\{\varphi_j\}_{j=1}^{N} \subset L^2(R)$ - ортонормированная система, а $\{u_j\}_{j=1}^{N} \subset L^2(R)$-нормированная система, имеет место неравенство

$$\int_{R^2} \rho_\Phi^2 d\xi\, d\eta \leqslant C \sum_{j=1}^{N} \int_{R^2} |\xi\eta||\hat{\varphi}_j \hat{u}_j|^2 d\xi d\eta.$$

В третьем параграфе с использованием метода доказательства теоремы (3.2) доказано следующее утверждение:

Существует абсолютная постоянная C, такая, что для самосопряженного интегрального оператора $Kf := \int_R K(x,y)f(y)\,dy$ в $L(R)$ с симметричным ядром $K \subset L^2(R^2)$ выполняется неравенство

$$\int_{R^2} K^4(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta \le C\|K\|^2_{L^2(R^2)}\cdot$$

$$\cdot \sum_{\nu,\beta\in Z\setminus\{0\}} \Bigg(\Bigg(\sum_{j=1}^{\infty}|\lambda_j|\sqrt{\int_{\triangle_\nu\cdot\triangle_\beta}|\xi\eta||\hat\varphi_j(\xi)\hat\varphi_j(\eta)|^2\,d\xi\,d\eta}\Bigg)^2+$$

$$\Bigg(\sum_{j=1}^{\infty}|\lambda_j|\sqrt{\int_{\triangle_\nu\cdot\triangle_\beta^{(1)}}|\xi\eta||\hat\varphi_j(\xi)\hat\varphi_j(\eta)|^2\,d\xi\,d\eta}\Bigg)^2+$$

$$\Bigg(\sum_{j=1}^{\infty}|\lambda_j|\sqrt{\int_{\triangle_\nu^{(1)}\cdot\triangle_\beta}|\xi\eta||\hat\varphi_j(\xi)\hat\varphi_j(\eta)|^2\,d\xi\,d\eta}\Bigg)^2+$$

$$\Bigg(\sum_{j=1}^{\infty}|\lambda_j|\sqrt{\int_{\triangle_\nu^{(1)}\cdot\triangle_\beta^{(1)}}|\xi\eta||\hat\varphi_j(\xi)\hat\varphi_j(\eta)|^2\,d\xi\,d\eta}\Bigg)^2\Bigg),$$

где $\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$ -собственные значения оператора K и $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$-ортонормированная система собственных функций, соответствующих собственным значениям $\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$; для $\nu \ne 0$:

$$\triangle_\nu = \{\xi : 2^{|\nu|-1} \le \xi sgn\nu < 2^{|\nu|}\}$$

и

$$\triangle_\nu^{(1)} = \{\xi : 2^{-|\nu|-1} \le \xi sgn\nu < 2^{-|\nu|}\},$$

а

$$\triangle_\nu\cdot\triangle_\beta - \quad \text{декартово произведение прямоугольников} \quad \triangle_\nu \quad \text{и} \quad \triangle_\beta. \qquad (17)$$

Благодарность. Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю член-корреспонденту РАН, профессору Кашину Борису Сергеевичу за постановку задач, их обсуждение и внимание к работе.

Список работ автора по теме диссертации:

1. Д. С. Барсегян. О неравенствах типа Либа-Тирринга. //Матем. Заметки, 2007. Т.82, №4. С. 504-514.

2. Д. С. Барсегян. О возможности усиления неравенства Либа-Тирринга. //Матем. Заметки, 2009. Т.86, №6. С. 803-818.

3. Д. С. Барсегян. О некоторых приложениях неравенств типа Либа-Тирринга в спектральной теории. //Матем. Заметки. 2010. Т.88, №2. С. 173-177.

4. Д. С. Барсегян. О некоторых приложениях неравенств типа Либа-Тирринга в спектральной теории. //Тезисы докладов секции "Теория функций и теория приближений"Международной научной конференции "Современные проблемы анализа и преподавания математики".-М.:Механико-математический факультет МГУ имени М. В. Ломоносова, 2010. С. 10-11.