Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Механико-математический факультет

На правах рукописи

УДК 517.51+514.74

Словеснов Александр Викторович

ПРИБЛИЖЕНИЯ В ГЕОМЕТРИИ И АНАЛИЗЕ: ОРТОРЕКУРСИВНЫЕ И СИНТЕТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2010

Работа выполнена на кафедре математического анализа механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научные руководители:	доктор физико-математических наук, профессор Сабитов Иджад Хакович, доктор физико-математических наук, профессор Лукашенко Тарас Павлович.
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, Штогрин Михаил Иванович, кандидат физико-математических наук, Куликова Татьяна Юрьевна.
Ведущая организация:	Самарский государственный университет.

Защита диссертации состоится 22 октября 2010 г. в 16 часов 40 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.85 при Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, МГУ, механико-математический факультет, ауд. 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 22 сентября 2010 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д 501.001.85 при МГУ,
доктор физико-математических наук,
профессор В. Н. Сорокин

Общая характеристика работы

Актуальность темы. В настоящей диссертации рассматриваются три задачи, возникшие в метрической геометрии и функциональном анализе, две из которых непосредственно относятся к теории приближений, а третья тесно с ней связана. А именно, в работе решается вопрос об интерполяции плоских кривых с помощью гладко сопряженных круговых дуг; обсуждаются орторекурсивные методы разложения интегрируемых по Лебегу функций по неортогональным системам; изучаются ленты Мебиуса с плоской метрикой и свойства их средних линий, связанные, в частности, с интегральным кручением этих линий. Все эти вопросы появились в математических исследованиях последних десятилетий, а их истоки обнаруживаются еще в классической литературе.

Открытая более 150 лет назад, лента Мебиуса и сегодня является самым популярным примером неориентируемой поверхности. Наиболее известна ее конструкция в виде склейки прямоугольного листа бумаги с отождествлением одной пары противоположных сторон, при котором диагонали становятся замкнутыми кривыми. С точки зрения топологии строение полученной таким образом поверхности представляется несложным, в то время как задача ее аналитического описания оказалась весьма нетривиальной.

При отсутствии каких-либо метрических ограничений на поверхность, первый явный пример ленты Мебиуса был найден Г. Машке[1] еще в 1900 г. Гауссова кривизна этой поверхности всюду отрицательна, и, следовательно, ее нельзя рассматривать как изометрический образ плоского прямоугольника. Описание примера *стандартной ленты Мебиуса* как аналитической поверхности с локально-евклидовой метрикой, которая в целом изометрична прямоугольному листу Мебиуса, было дано Г. Шварцем[2] лишь в 1990 г. При этом доказательство существования таких поверхностей было получено гораздо раньше и, по-видимому, впервые опубликовано В. Вундерлихом[3]. В современной литературе этот вопрос также получил освещение, и здесь стоит отметить работу К. Чиконе и Н. Калтона[4].

Изучение плоских лент Мебиуса во многом основано на использовании

[1]Mashke H. Note on the unilateral surface of Moebius // Trans. Amer. Math. Soc., 1900, 1:1, p. 39.

[2]Schwarz G. A pretender to the title „Canonical Moebius strip“// Pacific J. Math. Soc., 1990, 143:1, p. 195-200.

[3]Wunderlich W. Über ein abwickelbares Möbiusband // Monatsh. Math., 1962, 66:3, p. 276-289.

[4]Chicone C., Kalton N.J. Flat Embeddings of the Möbius Strip in $\mathbb{R}^3$ // Comm. Appl. Nonlinear Anal., 2002, 9:2, p. 31-50.

асимптотической параметризации развертывающейся поверхности. Если в качестве направляющей выбирается образ средней линии прямоугольного листа Мебиуса, который мы называем средней линией ленты Мебиуса, то свойства этой кривой полностью определяют поверхность, и поэтому они заслуживают специального исследования. Интересные результаты в этой области были получены Т. Рандрупом и П. Родженом[5], а основательное изучение данной тематики проведено И.Х. Сабитовым[6].

Несмотря на множество работ, посвященных лентам Мебиуса, до сих пор неисследованными оставались вопросы о сохранении регулярности асимптотической параметризации при вариации направляющей и об изгибаемости плоских лент Мебиуса. Эти вопросы рассмотрены в первой главе, где в ходе исследования мы также получили новые и довольно неожиданные результаты о поведении интегрального кручения кривых при сжатии их к плоскости.

Побудительным мотивом к постановке задачи, исследуемой во второй главе, было желание найти какие-нибудь подходы к построению конформного отображения круга на область, граница которой задана ее кривизной $k(s)$ как функцией длины дуги s при известной общей длине кривой. Известно, что при таких условиях кривая определяется однозначно с точностью до движения своими так называемыми натуральными уравнениями, а ее замкнутость получается лишь при некоторых специальных условиях на функцию $k(s)$. И.Х. Сабитовым[7] было получено интегральное уравнение, впрочем, очень сложное и сильно нелинейное, решение которого дало бы условие жордановости кривой с данной кривизной и способ нахождения конформного отображения круга на область, ограниченную этой кривой. В этом уравнении искомая кривая участвует через ее кривизну, а при постоянстве кривизны решение уравнения приводит, как и положено, к окружности. Идея была в том, чтобы приблизить $k(s)$ кусочно-постоянными функциями и попытаться решить это уравнение при таких аппроксимациях, а затем, бесконечно измельчая размер ступенек приближающей функции, в общем случае получить решение как предел последовательности кривых, состоящих из гладко сопряженных круговых дуг. Реализовать эту программу пока не удалось, но появился естественный вопрос об аппроксимации данной кривой C^1-гладкими круговыми сплайнами с сохранением длины.

[5] Randrup T., Rogen P. Sides of the Möbius strip // Arch. Math. (Basel), 1996, 66:6, p. 511-521.

[6] Сабитов И.Х. Изометрические погружения и вложения плоского листа Мебиуса в евклидовы пространства // Изв. РАН, сер. мат., 2007, т. 71, №5, с. 197-224.

[7] Сабитов И.Х. Локально-евклидовые метрики с данной геодезической кривизной края // Труды Математического института им. Стеклова, 2009, т. 266, с. 218-226.

В известной автору литературе есть несколько работ, посвященных использованию круговых дуг при интерполяции кривых. Среди них прежде всего стоит упомянуть статью В.А. Леуса[8], где рассматриваются C^1-гладкие приближения плоских кривых, представляющие собой весовую сумму двух окружностей. Как результат, предлагается алгоритм построения аппроксимирующих кривых такого рода со стандартными оценками порядка сходимости к исходной кривой, но при этом вопрос о соотношении длин исходной и аппроксимирующих кривых остается вне рассмотрения. В работе А.И. Курносенко[9] обсуждаются плоские кривые с монотонным изменением кривизны или, так называемые, спиральные кривые. Здесь автор не ставит своей целью построение конкретного алгоритма аппроксимации, а предлагает оценку детерминированности данной кривой при некоторых ограничениях на выбор узлов интерполяции. Вопрос о длинах кривых здесь также не обсуждается.

В отличие от этих работ, во второй главе мы рассматриваем задачу о приближении плоских кривых круговыми сплайнами в классической постановке, где качественно новым требованием выступает условие равенства длин исходной и аппроксимирующих кривых. Мы приводим конкретный алгоритм интерполяции и получаем в некотором смысле неулучшаемые оценки погрешности. При этом наш метод пригоден как для замкнутых, так и незамкнутых кривых, а также допускает наличие самопересечений у исходной кривой.

В третьей главе, которая посвящена методам аппроксимации в теории функций, мы изучаем орторекурсивные разложения элементов гильбертова пространства по неортогональным системам. Это обобщение классических рядов Фурье, наследующее такие их свойства как тождество Бесселя, неравенство Бесселя, эквивалентность равенства Парсеваля и сходимости разложения и др., было предложено Т.П. Лукашенко[10]. В отличие от классического определения, здесь очередной коэффициент Фурье зависит от предыдущих, а сам процесс разложения строится рекурсивным образом.

При таком подходе существует две принципиально разные возможности: система разложения либо фиксируется, либо меняется во время разложения и зависит от результатов, полученных на предыдущих шагах. Первый

[8] Леус В.А. Гладкая окружностная интерполяция кривых // Вычислительные системы, 1970, №38, с. 102-127.

[9] Курносенко А.И. Интерполяционные свойства плоских спиральных кривых // Фундаментальная и прикладная математика, 2001, т.7, №2, с. 441-463.

[10] Лукашенко Т.П. О свойствах орторекурсивных разложений по неортогональным системам // Вестн. МГУ, сер. 1, 2001, №1, с. 6-10.

случай представлен в работах В.В. Галатенко[11] и Т.П. Лукашенко, В.А. Садовничего[12]; а второй, к которому, в частности, относятся так называемые „жадные алгоритмы“, исследуется в статьях В.В. Галатенко[13] и В.Н. Темлякова[14]. Стоит также отметить, что, возможно, впервые рекурсивный процесс разложения был рассмотрен Б.С. Стечкиным и С.Б. Стечкиным[15].

При изучении орторекурсивных методов приближения L_2-функций интересной задачей представляется построение в L_2-пространстве системы разложения, порожденной сжатиями и сдвигами некоторой одной функции. Если основным требованием в этой задаче является L_2-сходимость орторекурсивного ряда Фурье к разлагаемому элементу, то дополнительным условием может выступать его равномерная сходимость в случае непрерывных функций. В третьей главе мы описываем пример такой системы разложения, используя при этом некоторые вспомогательные факты из теории фреймов, отдельные из которых представляют самостоятельный интерес.

Понятие абстрактного фрейма в гильбертовом пространстве впервые появилось в 1952 году в работе Р. Даффина и А. Шеффера[16] при рассмотрении последовательностей, обладающих равномерной плотностью. В современной литературе многие авторы используют это понятие в основном в теории всплесков, основы которой можно найти в книгах И. Добеши[17] и И.Я. Новикова, В.Ю. Протасова, М.А. Скопиной[18], а также в многочисленных приложениях. К последним можно отнести книгу С. Малла[19] по обработке сигналов.

Системы элементов, образующие фрейм, можно рассматривать как в гильбертовых пространствах (пространствах бесконечного числа измерений), так и в конечномерных, евклидовых или унитарных. В обоих случаях одной из главных задач является построение или конструктивное описание фреймов общего вида. В гильбертовых пространствах конструктив-

[11] Галатенко В.В. Об орторекурсивном разложении по некоторой системе функций с ошибками при вычислении коэффициентов // Мат. сборник, 2004, т. 195, №7, с. 21 - 36.

[12] Лукашенко Т.П., Садовничий В.А. О рекурсивных разложениях по цепочке систем // Доклады АН, 2009, т. 425, №6, с. 1-6.

[13] Галатенко В.В. Об орторекурсивном разложении по некоторой системе функций // Изв. РАН, сер. Матем., 2002, т. 66, №1, с. 59 - 70.

[14] Temlyakov V.N. Weak greedy algorithms // Adv. in Comp. Math., 2000, v. 12, №2-3, p. 193 - 208.

[15] Стечкин Б.С., Стечкин С.Б. Среднее квадратическое и среднее арифметическое // Докл. АН СССР, 1961, т. 137, №2, с. 287 - 290.

[16] Duffin R.J., Schaeffer A.C. A class of nonharmonic Fourier series // Trans. Amer. Math. Soc., 1952, 72, p. 341-366.

[17] Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. Ижевск: НИЦ „Регулярная и хаотическая динамика“, 2001.

[18] Новиков И.Я., Протасов В.Ю., Скопина М.А. Теория всплесков. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006.

[19] Малла С. Вейвлеты в обработке сигналов. М.: МИР, 2005.

ный подход в решении этого вопроса обеспечивает теорема, истоки которой можно отнести к результатам М.А. Наймарка[20], полученным еще до появления работы Р. Даффина и А. Шеффера. Согласно этой теореме, любой фрейм Парсеваля можно понимать как образ ортонормированного базиса при ортогональном проектировании на подпространство. Аналогичное описание произвольных фреймов, но с использованием базисов Рисса, можно найти в работе Б.С. Кашина и Т.Ю. Куликовой[21]. Если говорить о фреймах в конечномерных пространствах, то здесь можно отметить работы Е.С. Драбковой и С.Я. Новикова[22] и монографию О. Христенсена[23]. В первой из них, в частности, представлены необходимые и достаточные условия для системы векторов, при которых она является фреймом, а также показано существование равномерных (состоящих из векторов одинаковой длины) фреймов Парсеваля произвольных объемов.

В третьей главе мы строим алгоритм дополнения произвольного базиса евклидова пространства до жесткого фрейма, приводим оценки на его объем и используем полученные результаты при описании указанной выше системы орторекурсивного разложения.

Цель работы. Основные задачи настоящей работы следующие:

- Изучить вопросы об изгибаемости ленты Мебиуса с плоской метрикой и о сохранении регулярности ее асимптотической параметризации при вариации направляющей. Изучить предельное поведение интегрального кручения замкнутых аналитических пространственных кривых при сжатии их к плоскости.

- Построить алгоритм приближения плоских кривых круговыми сплайнами, отвечающий требованию сохранения длины исходной кривой и пригодный как для замкнутых, так и незамкнутых кривых; получить оценки погрешности аппроксимации.

- Описать способ дополнения произвольного базиса конечномерного евклидова пространства до жесткого фрейма и исследовать вопрос о его объеме.

[20] Наймарк М.А. Спектральные функции симметрического оператора // Изв. АН СССР, 1940, т. 4, №3, с. 277-318.

[21] Кашин Б.С., Куликова Т.Ю. Замечание об описании фреймов общего вида // Мат. заметки, 2002, т. 72, вып. 6, с. 941-945.

[22] Драбкова Е.С., Новиков С.Я. Объем фрейма Парсеваля // Вестник СамГУ, Естественнонаучная серия, 2007, №9/1(59), с. 91-106.

[23] Christensen O. Introduction to Frames and Riesz Bases. Boston: Birkhauser, 2002.

- Построить в гильбертовом пространстве интегрируемых по Лебегу функций систему орторекурсивного разложения, порожденного сжатиями и сдвигами одной функции, для которой орторекурсивный ряд Фурье непрерывных функций сходится к разлагаемому элементу в равномерной метрике.

Научная новизна. Результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

- Установлено, что стандартная лента Мебиуса допускает нетривиальное изгибание скольжения. Показано, что регулярность асимптотической параметризации плоской ленты Мебиуса не обладает устойчивостью при вариации направляющей. Введено понятие предельного интегрального кручения (ПИК) замкнутой аналитической кривой при сжатии ее к плоскости и найдены все возможные его значения.

- Описан алгоритм приближения плоских C^3-гладких кривых круговыми сплайнами, отвечающий требованию сохранения длины исходной кривой, с качественно неулучшаемыми оценками погрешности аппроксимации.

- Получен алгоритм дополнения произвольного базиса евклидова пространства до жесткого фрейма и показано, что в случае общего положения объем такого фрейма превышает объем исходной системы векторов как минимум вдвое.

- В пространстве интегрируемых по Лебегу функций построена система орторекурсивного разложения, порожденная сжатиями и сдвигами одной функции. Доказано, что в случае непрерывных функций орторекурсивный ряд Фурье сходится к разлагаемому элементу равномерно; приведены оценки нормы остатка разложения в равномерной метрике.

Методы исследования. Поставленные задачи в настоящей диссертации в основном решаются методами классического математического анализа, линейной алгебры и дифференциальной геометрии, а некоторые идеи заимствованы из теории обыкновенных дифференциальных уравнений и функционального анализа.

Теоретическая и практическая ценность. Работа имеет теоретический характер. Результаты могут быть использованы в исследованиях развертывающихся поверхностей, в теории кривых и ее приложениях в инженерных задачах, в теории конформных отображений, вычислительной геометрии и теории приближений функций.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на семинаре „Геометрия в целом“ под руководством проф. И.Х. Сабитова (2007 - 2010); на семинаре „Ортоподобные системы“ под руководством проф. Т.П. Лукашенко, доц. Т.В. Родионова, доц. В.В. Галатенко (2009); на семинаре „Актуальные проблемы геометрии и механики“ под руководством проф. Д.В. Георгиевского, ст.н.с. М.В. Шамолина, проф. С.А. Агафонова (2008, 2009); на семинаре „Ортогональные ряды“ под руководством член-корр. РАН Б.С. Кашина и проф. С.В. Конягина (2009); на научно-исследовательском семинаре кафедры Вычислительной математики под руководством проф. Г.М. Кобелькова (2009); а также на 15-й Саратовской зимней школе (2010) и международной конференции „Метрическая геометрия поверхностей и многогранников“, посвященной 100-летию со дня рождения Н.В. Ефимова (2010).

Публикации. Результаты диссертации были опубликованы в 5 работах. Из совместной работы [2] в диссертацию вошли только результаты, принадлежащие лично диссертанту. Списку ВАК соответствуют работы [1]-[3].

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, разбитых на параграфы, и списка цитируемой литературы из 35 наименований. Общий объем диссертации — 80 стр.

Краткое содержание работы

В первой главе изучаются ленты Мебиуса с плоской метрикой и некоторые сопряженные с ними свойства пространственных кривых. Введем следующее

Определение. Поверхность S нулевой гауссовой кривизны, диффеоморфную прямоугольному листу Мебиуса D, назовем *лентой Мебиуса с плоской метрикой* или *плоской лентой Мебиуса.* При дополнительном условии изометричности S прямоугольнику D в целом, соответствующую ленту Мебиуса будем называть *стандартной.*

В аналитическом классе плоская лента Мебиуса представляет собой развертывающуюся поверхность, на которой естественным образом возникает так называемая асимптотическая параметризация. В большинстве исследований плоских лент Мебиуса в качестве направляющей используется замкнутая линия, при обходе вдоль которой нормаль к поверхности поворачивается на 180°. Такую линию мы будем называть *петлей.* Поскольку направляющая на линейчатой поверхности определяется неоднозначно, возникает вопрос об устойчивости регулярности асимптотической параметризации при вариации петли. Ответ на поставленный вопрос оказывается отрицательным, а именно справедлива

Теорема 1.1. *Пусть на аналитической плоской ленте Мебиуса выбрана какая-то петля, нигде не касающаяся образующих. Тогда в сколь угодно малой ее окрестности можно построить новую направляющую, которая, будучи петлей, в некоторой точке касается образующей.*

Одним из основных в метрической теории поверхностей является вопрос об изгибаемости/неизгибаемости рассматриваемой поверхности. В случае стандартной ленты Мебиуса мы доказываем ее изгибаемость, построив так называемое изгибание скольжения.

Определение. Пусть аналитическая стандартная лента Мебиуса S, отвечающая прямоугольному листу Мебиуса D,

$$D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < u < L,\ -h < v < h\},$$

задается аналитическим отображением $F:\ D \to \mathbb{R}^3$. Продолжим это отображение в полосу

$$\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid -\infty < u < +\infty,\ -h < v < h\}$$

с помощью равенства $F(u + L, v) = F(u, -v)$, которое изначально соответствует склейке вертикальных границ D. Зафиксируем число $\varepsilon > 0$ и определим отображение $F_\varepsilon : D \to S$ формулой $F_\varepsilon(u, v) = F(u + \varepsilon, v)$. Тогда композицию $g_\varepsilon = F_\varepsilon \circ F^{-1} : S \to S$ назовем *деформацией скольжения* ленты Мебиуса S.

Мы доказываем, что для некоторого $\varepsilon_0 > 0$ соответствующая деформация g_{ε_0} является изометрией и не порождается движением всего пространства $\mathbb{R}^3$, откуда следует

Теорема 1.2. *Любая аналитическая стандартная лента Мебиуса допускает нетривиальное изгибание.*

При изучении плоских лент Мебиуса в некоторых случаях возникает необходимость в установлении существования аналитической замкнутой кривой с заданным значением интегрального кручения. В положительном смысле этот вопрос решается в книге С. Сьюнга[24], однако без достаточно подробного изложения. Используя идею указанной работы, мы приводим полное доказательство аналогичного утверждения, усилив его требованием отсутствия самопересечений у искомой кривой. Имеет место

Теорема 1.3. *Для любого числа $\varkappa_0$ существует замкнутая аналитическая кривая без самопересечений с интегральным кручением $\varkappa_0$.*

Сам факт существования, установленный в теореме 1.3, большого интереса не представляет, однако схема доказательства заслуживает внимания. Так, в процессе доказательства, некоторая замкнутая кривая подвергается сжатию к плоскости, а ее интегральное кручение при этом стремится к нулю. Такое поведение интегрального кручения вполне ожидаемо, однако оно имеет место лишь в частных случаях. Чтобы описать общий случай, нам потребуется следующее

Определение. Рассмотрим пространственную замкнутую аналитическую кривую $\bar{r}(t)$, $t \in [0, T]$, и некоторую плоскость Π с нормалью $\bar{e}$. Определим семейство кривых $\{\bar{r}_\lambda(t), \lambda \in [0,1]\}$ формулой

$$\bar{r}_\lambda(t) = \bar{r}(t) - (1-\lambda)(\bar{e}, \bar{r}(t))\bar{e}, \quad t \in [0, T],$$

а через $\varkappa_{int}(\lambda)$ обозначим интегральное кручение кривой $\bar{r}_\lambda(t)$. Тогда *предельным интегральным кручением* (ПИК) кривой $\bar{r}(t)$ при сжатии к плоскости Π назовем величину $\lim\limits_{\lambda \to 0+0} \varkappa_{int}(\lambda)$.

Мы доказываем, что все возможные значения предельного интегрального кручения образуют дискретное множество, а именно справедлива

Теорема 1.4. *Предельное интегральное кручение замкнутой аналитической кривой при сжатии к любой плоскости кратно числу π.*

Интересной задачей представляется нахождение каких-либо достаточных условий, при которых предельное интегральное кручение отлично от нуля. Для ее решения нам потребуется разбиение всех замкнутых аналитических кривых на два непересекающихся класса.

[24] Hsiung C.-C. A first course in differential geometry. New York: Wiley, 1981.

Определение. Пусть $\bar{r}$ — замкнутая аналитическая кривая с подвижным аналитическим репером Френе $\{\bar{\tau}, \bar{\nu}, \bar{\beta}\}$. Касательный вектор $\bar{\tau}$ является периодической функцией, а векторы главной нормали и бинормали $\bar{\nu}$ и $\bar{\beta}$ могут быть как периодическими, так и антипериодическими. Следуя терминологии И.Х. Сабитова, в первом случае кривую назовем *ориентируемой*, а во втором — *полуориентируемой.*

Чтобы добиться ненулевого предельного интегрального кручение, мы ограничимся полуориентируемыми кривыми, а также исключим некоторые плоскости сжатия.

Определение. Плоскость Π с нормалью $\bar{e}, |\bar{e}| = 1$, назовем *регулярной* по отношению к кривой $\bar{r}(t), t \in [0, T]$, если ни один из векторов $\{\bar{\tau}(t), t \in [0, T]\}$ не коллинеарен $\bar{e}$.

Достаточные условия, при которых предельное интегральное кручения отлично от нуля, обеспечивает

Теорема 1.5. *Предельное интегральное кручение замкнутой аналитической кривой при сжатии к регулярной плоскости кратно числу π с четным коэффициентом пропорциональности, если кривая ориентируемая, и кратно π с нечетным коэффициентом пропорциональности, если кривая полуориентируемая.*

Во второй главе рассматриваются плоские C^3-гладкие кривые и решается задача о приближении данной кривой дугами сопряженных окружностей, в которой основным требованием выступает равенство длин исходной и аппроксимирующей кривых. Мы считаем, что кривая задана своей C^1-гладкой функцией кривизны $k(s)$, зависящей от натурального параметра $s \in [0, L]$, и тем самым определена с точностью до движения. Сначала мы решаем поставленную задачу в частном случае, ограничившись монотонными функциями кривизны или, что то же самое, выбирая в качестве аппроксимируемой некоторую спиральную кривую.

Теорема 2.1. *Пусть функция кривизны $k(s)$ кривой γ, зависящая от натурального параметра $s \in [0, L]$, непрерывна, положительна, монотонно строго возрастает и $0 < \int_0^L k(s)ds < \frac{\pi}{2}$. Тогда существует C^1-гладкая аппроксимирующая кривая $\hat{\gamma}$, имеющая такую же длину L и состоящая из дуг двух окружностей, причем* *а) концы $\hat{\gamma}$ и касательные векторы в них совпадают соответственно с концами и касательными векторами исходной кривой γ;*

б) радиусы окружностей, дуги которых составляют $\hat{\gamma}$, можно выбрать таким образом, чтобы они подчинялись условию

$$\frac{1}{k_2} < r < R < \frac{1}{k_1},$$

где $k_1 = k(0), \quad k_2 = k(L)$.

Мы показываем, что теорема 2.1 остается верной и при $k_1 = 0$, а также в случае монотонной функции кривизны произвольного знака. Поэтому, предположив, что данная кривая Γ разбивается на спиральные участки и участки постоянной кривизны (среди которых содержатся дуги окружностей и отрезки прямых линий), мы можем построить для Γ аппроксимацию в целом:

Теорема 2.2. *Произвольная C^3-гладкая кривая Γ, допускающая разбиение на конечное число участков, на каждом из которых кривизна постоянна или представляет собой строго монотонную знакопостоянную функцию, может быть аппроксимирована в целом дугами сопряженных окружностей с сохранением длины на каждом из участков.*

За счет условия б) теоремы 2.1 нетрудно получить оценки погрешности аппроксимации:

Теорема 2.3. *Пусть на C^3-гладкой кривой Γ выбраны точки $P_1, \ldots, P_n$ так, что на каждом участке P_iP_{i+1}, $i = 1, \ldots, n-1$, кривизна постоянна или представляет собой строго монотонную знакопостоянную функцию. Если кривая $\hat{\Gamma}$ — приближение Γ, построенное в соответствии с теоремой 2.1, то в точках, отличных от узлов $P_1, \ldots, P_n$, для координатных функций Γ и $\hat{\Gamma}$ справедливы неравенства*

$$\max_{[0,L]} |x^{(n)}(s) - \hat{x}^{(n)}(s)| \leqslant C \cdot \max_k (s_{k+1} - s_k)^{3-n}, \qquad n = 0, 1, 2,$$

где C — некоторая абсолютная постоянная.

В третьей главе изучаются орторекурсивные методы разложения интегрируемых по Лебегу функций и смежные вопросы теории фреймов в конечномерных пространствах. В частности, нас интересуют жесткие фреймы, для которых мы используем следующее

Определение. Пусть V — n-мерное евклидово пространство. Система ненулевых векторов $\Phi = \{\bar{v}_k, k = 1, \ldots, l\}$ из V образует *жесткий фрейм*, если существует положительное число λ такое, что для любого вектора $\bar{v} \in V$ выполняется равенство

$$\sum_{k=1}^{l} (\bar{v}, \bar{v}_k)\bar{v}_k = \lambda \cdot \bar{v}.$$

Число λ при этом называется *границей фрейма.*

Из фрейма, как следует из определения, всегда можно выделить подсистему векторов, образующую базис. В связи с этим, интересной представляется в некотором смысле обратная задача о дополнении данного базиса до жесткого фрейма. Ее решение мы формулируем в виде теоремы, конструктивное доказательство которой по своей сути является алгоритмом.

Теорема 3.1. *Любой базис $\Phi = \{\bar{\varphi}_k, k = 1, \ldots, n\}$ конечномерного евклидова пространства V можно дополнить до жесткого фрейма с некоторой границей $\lambda > 0$, добавив к нему систему $\Psi = \{\bar{\psi}_k, k = 1, \ldots, n\}$, состоящую из такого же числа векторов.*

Мы показываем, что увеличение объема системы вдвое, при дополнении данного базиса до фрейма, соответствует случаю общего положения, и при этом существуют примеры, в которых это дополнение состоит из единственного вектора. Полученные результаты мы используем при изучении орторекурсивных методов разложения элементов гильбертова пространства по неортогональным системам.

Определение. Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство над полем действительных или комплексных чисел с выделенной системой замкнутых подпространств $\{H^n\}_{n=1}^{\infty}$, $H^n \subset H$. Зафиксируем в каждом подпространстве H^n жесткий фрейм $\Phi^n = \{\varphi_k^n,\ k = 1, \ldots, K^n\}$[25] с границей 1 и определим *орторекурсивное разложение* элемента $f \in H$ следующим образом:

1) пусть нулевой остаток приближения $r^0 = f$;

2) если задан остаток приближения r^{n-1}, то полагаем

$$\hat{f}_k^n = (r^{n-1}, \varphi_k^n), \quad k = 1, \ldots, K^n, \quad \text{и} \quad r^n = r^{n-1} - \sum_{k=1}^{K^n} \hat{f}_k^n \varphi_k^n.$$

[25]Здесь K^n может быть конечным числом или ∞.

При этом числа $\hat{f}_k^n$ называются *орторекурсивными коэффициентами Фурье*, а выражения вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{K^n} \hat{f}_k^n \varphi_k^n \quad \text{и} \quad S^N = \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{K^n} \hat{f}_k^n \varphi_k^n = f - r^N$$

— *орторекурсивным рядом Фурье* и его *частичными суммами.*

Далее мы работаем с гильбертовым пространством $L_2[0,1]$, в котором рассматриваем орторекурсивные разложения по вложенным подпространствам $\{V^n\}_{n=1}^{\infty}$, порожденным сжатиями и сдвигами одной функции. Порождающая функция $g^0 \in C[-1,1]$ образована индикатором некоторого отрезка, называемого основным, который по краям дополняется двумя канторовыми лестницами — восходящей и нисходящей. При этом длина оснований канторовых лестниц может быть сделана сколь угодно малой по сравнению с длиной основного промежутка, поэтому порождающую функцию можно понимать как непрерывное продолжение индикатора.

Мы показываем, что g^0 раскладывается в линейную комбинацию четырех своих сжатий и сдвигов, и на этой основе строим в $L_2[0,1]$ цепочку $\{V^n\}_{n=1}^{\infty}$, выбирая в качестве базиса подпространства V^n сдвиги функции g^0, сжатой в 3^n раз. Указанный базис, согласно теореме 3.1, дополняется до жесткого фрейма с границей 1, поэтому мы вправе рассмотреть орторекурсивное разложение элементов $f \in L_2[0,1]$ по системе $\{V^n\}_{n=1}^{\infty}$. Здесь, помимо сходимости орторекурсивного ряда Фурье к разлагаемому элементу по норме $L_2[0,1]$, справедлива также

Теорема 3.2. *Для любой функции $f \in C_1[0,1] = \{f \in C[0,1] \mid f(0) = f(1)\}$ ее орторекурсивный ряд Фурье по цепочке подпространств $\{V^n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к f равномерно.*

При доказательстве теоремы 3.2 мы получаем оценку для C-нормы остатка разложения вида

$$\|r^n\|_{C[0,1]} \leqslant C \cdot w_f\left(\tfrac{1}{2} \cdot 3^{-n}\right).$$

Автор выражает искреннюю и глубокую благодарность своим научным руководителям профессору Иджаду Хаковичу Сабитову и профессору Тарасу Павловичу Лукашенко за постановку задач, многочисленные консультации, полезные замечания и постоянный интерес к работе.

Публикации автора по теме диссертации

[1] Словеснов А.В. Ленты Мебиуса с плоской метрикой // Вестн. Моск. Ун-та, сер. 1, 2009, №5, с. 7-10.

[2] Сабитов И.Х. Словеснов А.В. Приближения плоских кривых круговыми дугами // Журнал выч. мат. и мат. физ., 2010, т. 50, №8, с. 1-10.

В данной работе И.Х. Сабитову принадлежит постановка задачи и общее описание подходов к ее решению. Формулировки теорем и доказательства принадлежат А.В. Словеснову.

[3] Словеснов А.В. Рекурсивные разложения по цепочке подпространств // Фундаментальная и прикладная математика, 2010, т. 16, № 3, с. 197-215.

[4] Словеснов А.В. Рекурсивное разложение по цепочке подпространств. Материалы 15-ой Саратовской зимней школы, 2010, Саратов: изд-во Саратовского университета, с. 162-163.

[5] Словеснов А.В. Предельное интегральное кручение пространственных кривых. Сборник тезисов международной конференции „Метрическая геометрия поверхностей и многогранников“, посвященной 100-летию со дня рождения Н.В. Ефимова, 2010, Москва: МАКС Пресс, с. 58-59.