МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи
УДК 517.547.2, 517.538.2

Юхименко Александр Анатольевич

АППРОКСИМАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА СИСТЕМ ЭКСПОНЕНТ НА КОНЕЧНОМ И БЕСКОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛАХ

01.01.01 — вещественный, комплексный и
функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва, 2010

Работа выполнена на кафедре математического анализа механико-математического факультета Московского Государственного Университета имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Седлецкий Анатолий Мечиславович.
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Шкаликов Андрей Андреевич, кандидат физико-математических наук, доцент Брайчев Георгий Генрихович.
Ведущая организация:	Саратовский Государственный Университет имени Н. Г. Чернышевского.

Защита диссертации состоится 26 ноября 2010 г. в 16 часов 40 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.85 при Московском Государственном Университете имени М. В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские Горы, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 26 октября 2010 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д 501.001.85 при МГУ,
доктор физико-математических
наук, профессор

В. Н. Сорокин

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы

В диссертации исследуются аппроксимационные свойства систем экспонент

$$e(\Lambda) = \left\{e^{i\lambda_n t}\right\}_{n\in\mathbb{Z}}, \quad \lambda_n \in \Lambda \subset \mathbb{C}$$

в функциональных пространствах на конечном и бесконечном интервалах. Сюда входит изучение таких свойств систем, как *полнота, минимальность и базис.* Систему $e(\Lambda)$ мы будем рассматривать в пространствах L^p на интервале, а также в весовых L^p-пространствах на интервале, полупрямой и прямой.

Впервые вопросы разложения функций в биортогональные на конечном интервале $(-a,\ a)$ ряды

$$f(t) \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{i\lambda_n t}$$

были рассмотрены в работе Р. Пэли и Н. Винера[1]. Они дали таким рядам название *негармонических рядов Фурье.* С тех пор раздел анализа, посвященный исследованию аппроксимационных свойств систем экспонент на конечном интервале, нередко называют негармоническим анализом Фурье или просто *негармоническим анализом.* Он получил свое развитие в работах Н. Левинсона, Л. Шварца, Р. Редхеффера, А. Бьерлинга и П. Мальявена, Б. Я. Левина, П. Кусиса, А. Ф. Леонтьева, Р. Янга, А .М. Седлецкого и других.

Теория аппроксимации посредством экспонент $e^{i\lambda_n t}$ в пространствах L^p с весом $(1 \leqslant p < \infty)$ на полупрямой и прямой возникла из задачи об аппроксимации сдвигами функций, а также в процессе естественного распространения негармонического анализа с конечного интервала на бесконечный. Этой тематике посвящены работы Р. Залика, Б. Факсена, А. М. Седлецкого, Б. В. Винницкого, Г. Денга и других.

Как хорошо известно, важную роль в решении упомянутых задач играют оценки целых функций определённого роста, нули которых совпадают с точками λ_n. В свою очередь задача нахождения оценок таких функций по теореме Адамара сводится к поиску асимптотики канонических произведений с нулями Λ, т. е. функций вида

$$F_\Lambda(z) = z^m \prod_{\lambda_n\in\Lambda\setminus\{0\}} \left(1 - \frac{z}{\lambda_n}\right) \exp\left(\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k}\left(\frac{z}{\lambda_n}\right)^k\right), \tag{1}$$

[1] *Paley R., Wiener N.* Fourier transforms in the complex domain. Publ. Amer. Math. Soc., New York, 1934.

где m — это кратность нуля в последовательности Λ, а p — род канонического произведения, т. е. такое целое число, что

$$\sum^{\infty} \frac{1}{|\lambda_n|^p} = \infty, \qquad \sum^{\infty} \frac{1}{|\lambda_n|^{p+1}} < \infty.$$

Именно асимптотические оценки канонических произведений составляют центральную часть диссертации. Результаты об аппроксимационных свойствах систем экспонент являются следствиями этих оценок.

Оценки для канонических произведений можно найти в классических работах Г. Валирона и Е. Титчмарша, а также у А. Пфлюгера, Б. Я. Левина, Н. Бовена, М. А. Евграфова, А. М. Седлецкого и многих других авторов.

Приведем краткий обзор некоторых результатов тесно связанных с тематикой диссертации.

• *Полнота систем экспонент на конечном интервале.* Хорошо известна следующая теорема Левинсона[2]: если $\lambda_n \in \mathbb{C}$ и $|\lambda_n| \leqslant |n| + 1/(2p)$, то система $e(\Lambda)$ полна в $L^p(-\pi,\pi)$ $\quad (1 < p < \infty)$, причем константа $1/(2p)$ — точная (т. е. при ее увеличении полнота нарушается). То, что полнота сохраняется в случае

$$|\lambda_n| \leqslant |n| + \frac{1}{2p} + \varepsilon_{|n|}, \qquad \varepsilon_n \geqslant 0, \quad \sum^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{n} < \infty,$$

обнаружил А. М. Седлецкий[3], а также Р. Редхеффер и Р. Янг[4]. Но условие $\sum^{\infty} \varepsilon_n/n < \infty$ не является необходимым. Это следует, например, из следующей теоремы А. И. Хейфица[5]: пусть Λ имеет следующий вид:

$$\lambda_n = n + \left(\frac{1}{4} + \frac{\Delta}{\ln|n|}\right) \operatorname{sign} n, \quad n \neq 0, \pm 1, \quad \Delta \in \mathbb{R}\,, \quad \lambda_0 = 0,\ \lambda_1 = -\lambda_{-1} = c,$$

где действительное число c выбрано таким образом, чтобы в последовательности Λ не было кратных членов; тогда для полноты в $L^2(-\pi,\pi)$ системы $e(\Lambda)$ необходимо и достаточно, чтобы $\Delta \leqslant 1/4$.

А. Буавеном и А. М. Седлецким в негармонический анализ были введены весовые L^p-пространства следующего вида:

$$L^p_{\alpha,\pi} = L^p((-\pi,\ \pi),\ \omega_\alpha(t)\,dt),$$

[2] *Levinson N.* Gap and density theorems. New York: Publ. Amer. Math. Soc., 1940.

[3] *Седлецкий А. М.* Полные и равномерно минимальные системы показательных функций в $L^p(-\pi,\pi)$. // Труды МЭИ. — 1972. — вып. 146. — С. 167-174.

[4] *Redheffer R., Young R. M.* Completeness and basis properties of complex exponentials. // Trans. Amer. Math. Soc. — 1983. — V.277. — P.93-111.

[5] *Хейфиц А. И.* Характеристики нулей некоторых специальных классов целых функций конечной степени. // Теор. функций, функ. анал. и их прил., Харьков. — 1968. — Т.9. — С. 3-13.

$$\omega_\alpha(t)=\prod_{j=1}^{s}|t-b_j|^\alpha,\quad s\geqslant 2,\quad -\pi=b_1<\ldots<b_s=\pi.$$

В случае $\alpha=0$ пространство $L^p_{\alpha,\pi}$ — это в точности $L^p(-\pi,\pi)$.

А. М. Седлецким было дано обобщение приведенной выше теоремы Левинсона на случай пространства $L^p_{\alpha,\pi}$: если $\lambda_n\in\mathbb{C}$ и $|\lambda_n|\leqslant|n|+(1+\alpha)/(2p)$, то система $e(\Lambda)$ полна в $L^p_{\alpha,\pi}$ $\quad(1<p<\infty,\ -1<\alpha<p-1)$, причем константа $(1+\alpha)/(2p)$ точная.

А. М. Седлецким[6] был рассмотрен вопрос о полноте в $L^p_{\alpha,\pi}$ системы $e(\Lambda)$, когда

$$\lambda_n=n+\left(\frac{1+\alpha}{2p}+\frac{\Delta}{\ln|n|}\right)\operatorname{sign}n,\quad n\neq 0,\pm1,$$
$$\Delta\in\mathbb{R}\,,\quad \lambda_0=0,\ \lambda_1=-\lambda_{-1}=c.$$

Была доказана следующая теорема: если

$$1<p<\infty,\quad \max(0,\ p-2)\leqslant\alpha<p-1, \tag{2}$$

то для полноты $e(\Lambda)$ в $L^p_{\alpha,\pi}$ необходимо и достаточно, чтобы $\Delta\leqslant 1/(2q),\ 1/p+1/q=1$.

• *Избытки систем экспонент в* $L^2(-\pi,\pi)$. Для удобства будем обозначать избыток $e(\Lambda)$ в пространстве $L^2(-\pi,\pi)$ за $E_2(\Lambda)$. А. М. Седлецким[7] была доказана следующая теорема: если

$$\lambda_n=n+\Delta\operatorname{sign}n+i\,\alpha\ln|n|,\quad n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\},\ \lambda_0=0,\ \Delta\in\mathbb{R}\,,\ \alpha\in\mathbb{R}_+,$$

то

$$\ln|F_\Lambda(x)|=O(1)+(\pi\alpha-2\Delta)\ln|x|,\quad |x|>2+|\Delta|. \tag{3}$$

Пусть последовательность Λ имеет вид

$$\lambda_n=n+i\,h(|n|),\quad n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\},\ \lambda_0=0, \tag{4}$$

где $h(t):\ \mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$. Оценка (3) позволила А. М. Седлецкому найти оценки снизу и сверху для избытков систем экспонент $e(\Lambda)$ в пространстве $L^2(-\pi,\pi)$:

1. Если для некоторого $\alpha\geqslant 0$

$$h(n)\leqslant\alpha\ln n\quad(n\geqslant n_0),$$

то $E_2(\Lambda)\leqslant[\alpha\pi]+1$. Если к тому же $\{\alpha\pi\}<1/2$, то $E_2(\Lambda)\leqslant[\alpha\pi]$.

[6] *Седлецкий А. М.* Классы аналитических преобразований Фурье и экспоненциальные аппроксимации. М.: Физматлит, 2005.

[7] *Sedletskii A. M.* On completeness of the system $\{\exp(ix(n+i\,h_n))\}$. // Anal. Math., 1978, V.4, P.125–143.

2. Если
$$\sum^{\infty}\frac{h^2(n)}{n^2}<\infty$$
и
$$h(n)\geqslant\alpha\ln n\quad(n\geqslant n_0,\ \alpha\geqslant 0),$$
то $E_2(\Lambda)\geqslant[\alpha\pi]$. Если к тому же $\{\alpha\pi\}\geqslant 1/2$, то $E_2(\Lambda)\geqslant[\alpha\pi]+1$.

• *Базисы из экспонент в пространствах* $L^p_{\alpha,\pi}$. Хорошо известна следующая теорема Кадеца[8]: если $\lambda_n\in\mathbb{R}$ и
$$\sup_n|\lambda_n-n|<1/4,$$
то система $e(\Lambda)$ образует базис Рисса в $L^2(-\pi,\pi)$. Константа $1/4$ в этой теореме является точной.

Результаты о базисах $e(\Lambda)$ в $L^p(-\pi,\pi)$ при $p\neq 2$, а также в пространствах $L^p_{\alpha,\pi}$ принадлежат А. М. Седлецкому. Им же было введено понятие *базиса, обладающего свойством Рисса* (оно инициировано теоремой М. Рисса о сопряженном ряде Фурье функции из $L^p(-\pi,\pi),\ 1<p<\infty$). Будем говорить, что базис $e(\Lambda)$ банахова пространства $B(a,\,b)$ обладает свойством Рисса, если оператор
$$\sum_{\lambda_n\in\Lambda}c_ne^{i\lambda_nt}\to\sum_{\operatorname{Re}\lambda_n>0}c_ne^{i\lambda_nt}$$
ограничен в $B(a,\,b)$. Это понятие является некоторой заменой понятия базиса Рисса для пространств $L^p(-\pi,\pi)$ при p отличном от 2.

А. М. Седлецким[9] был получен аналог теоремы Кадеца об 1/4 для случая регулярных возмущений целочисленной последовательности. А именно было показано, что если выполнено
$$1<p<\infty,\quad \max(0,p-2)\leqslant\alpha<p-1,\qquad \frac{1+\alpha}{p}+\frac{1}{q}=1,\tag{5}$$
то система $\{\exp(i(n+\Delta\operatorname{sign}n)t)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ образует в $L^p_{\alpha,\pi}$ базис, обладающий свойством Рисса тогда и только тогда, когда
$$-\frac{1}{2q}<\operatorname{Re}\Delta<\frac{1+\alpha}{2p}.$$

• *Функции типа синуса.* В связи с задачей о базисах Рисса из экспонент в

[8] *Кадец М. И.* Точное значение постоянной Палея-Винера. // Докл. АН СССР, 1964, т. 155, с. 1253–1254.

[9] *Седлецкий А. М.* Эквивалентные последовательности в некоторых пространствах функций. // Изв. ВУЗов, матем., 1973 г., No 7, с. 85–91.

$L^2(-\pi,\pi)$ Б. Я. Левиным в конце 1960-ых годов[10] были введены так называемые функции типа синуса (ф. т. с), т. е. целые функции экспоненциального типа, для которых выполняется оценка

$$\ln|G(z)| = O(1) + \pi|\mathrm{Im}\, z|, \quad |\mathrm{Im}\, z| \geqslant h = h(G) > 0. \tag{6}$$

Функции типа синуса нашли применение не только в негармоническом анализе, но и в спектральной теории и дифференциальных уравнениях. Большой интерес представляет вопрос о распределении нулей функций типа синуса.

Важный подкласс в классе ф. т. с. образуют функции вида

$$F(z) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{izt} d\sigma(t), \quad \mathrm{var}\, \sigma(t) < +\infty, \tag{7}$$

где $\sigma(t)$ имеет скачки в обеих точках $\pm\pi$; в этом случае нули λ_n функции $F(z)$ удовлетворяют условию

$$\lambda_n = n + O(1), \quad n \to \pm\infty. \tag{8}$$

Но функции вида (7) с условием $\sigma(\pm\pi) \neq \sigma(\pm\pi \mp 0)$ не исчерпывают весь класс ф. т. с. В ряде работ строились ф. т. с., не являющиеся преобразованием Фурье-Стилтьеса, т. е. не представимые в виде (7); во всех случаях нули построенных функций также удовлетворяли условию (8).

Обозначим через ${}_1F_1(a,c;z)$ вырожденную гипергеометрическую функцию. А. М. Седлецким[11] было показано, что при определенных условиях на a и c функция

$$F(z) = e^{-i\pi z}\, {}_1F_1(a,c;2\pi i z)$$

является ф. т. с., но вместе с тем имеет следующую асимптотику нулей:

$$\lambda_n = n + A + B\cdot\ln|n| + O\left(\frac{\ln|n|}{|n|}\right), \quad n \to \pm\infty,\ A \in \mathbb{C}\,,\ B \in \mathbb{R}\,,\ B \neq 0.$$

Это, по видимому, первый пример функции типа синуса с асимптотикой нулей не укладывающейся в рамки формулы (8).

• *Полнота систем экспонент в весовых пространствах на полупрямой и прямой.* К вопросам аппроксимационных свойств систем $e(\Lambda)$ в весовых пространствах L^p на полупрямой и прямой можно придти двумя путями.

[10] *Левин Б. Я.* Интерполяция целыми функциями экспоненциального типа. // Матем. физика и функц. анал., ФТИНТ АН УССР. 1969. Вып.1. С.136-146.

[11] *Седлецкий А. М.* Асимптотика нулей вырожденной гипергеометрической функции. // Математические заметки, 2007 г. том 82, выпуск 2, стр. 262-271.

Первый из них - следующая теорема Н. Винера: если $f \in L^1(\mathbb{R})$ ($f \in L^2(\mathbb{R})$), тогда для плотности в $L^1(\mathbb{R})$ ($L^2(\mathbb{R})$) линейных комбинаций сдвигов

$$f(t+\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R} \tag{9}$$

необходимо и достаточно, чтобы $\widehat{f} \neq 0$ ($\widehat{f} \neq 0$ почти всюду).

Так как $(f(t+\lambda))\widehat{\ } = e^{i\lambda t}\widehat{f}(t)$, а преобразование Фурье задает изоморфизм пространства $L^2(\mathbb{R})$ на себя, то плотность линейных комбинаций сдвигов (9) эквивалентна полноте в $L^2(\mathbb{R})$ семейства экспонент

$$e^{i\lambda t}g(t), \quad \lambda \in \Lambda \subseteq \mathbb{R}, \tag{10}$$

где $g(t) = \widehat{f}(t)$. Таким образом, теорема Н. Винера допускает следующую формулировку: пусть $g \in L^2(\mathbb{R})$; для того, чтобы семейство (10) с $\Lambda = \mathbb{R}$ было плотно в $L^2(\mathbb{R})$, необходимо и достаточно, чтобы $g \neq 0$ почти всюду.

В связи с этим результатом возникает вопрос: существует ли неплотное в $\mathbb{R}$ множество Λ такое, что система (10) полна в $L^2(\mathbb{R})$. Частично ответ на этот вопрос дает следующая теорема А. М. Седлецкого[12]: если

$$|g(t)| \geqslant \exp(-\omega(|t|)), \quad t \in \mathbb{R},$$

где $\omega(t)$ — положительная возрастающая функция на луче $(0,\infty)$ и

$$\frac{\omega(t)}{t^2+1} \in L^1(\mathbb{R}_+),$$

то система (10) неполна в $L^2(\mathbb{R})$ пока Λ неплотно в $\mathbb{R}$.

Эта теорема означает, что система (10) с неплотным в $\mathbb{R}$ множеством Λ может быть полной в $L^2(\mathbb{R})$ только при достаточно быстром убывании функции $g(t)$.

К аналогичным задачам приводят и попытки распространить негармонический анализ с конечного интервала на бесконечный. О полноте систем $e(\Lambda)$ в $L^p(\mathbb{R})$ говорить не приходится, поскольку функции $e^{i\lambda_n t}$ не лежат в $L^p(\mathbb{R})$, $p \geqslant 1$. Чтобы разрешить проблему, можно домножить эти функции на подходящий вес (или, что то же самое, рассмотреть их в весовых пространствах L^p на прямой). В результате, мы снова приходим к системам (10).

На сегодняшний день наиболее изученным является случай

$$g(t) = e^{-a|t|^\alpha}, \quad a > 0, \ \alpha > 1.$$

В работах Б. Факсена, Р. Залика и Т. Абуабары Саад, А. М. Седлецкого, Т. А. Сальниковой и Г. Денга в основном исследуется полнота систем

$$e(\Lambda; a, \alpha) = \left\{ e^{-i\lambda_n t} e^{-a|t|^\alpha} \right\}_{n\in\mathbb{N}}.$$

[12] *Седлецкий А. М.* Классы аналитических преобразований Фурье и экспоненциальные аппроксимации. М.: Физматлит, 2005.

Вопросы минимальности и равномерной минимальности таких систем исследованы в меньшей степени.

Далее нам понадобятся следующие обозначения: β — это число, сопряженное с α (т. е. $\beta^{-1}+\alpha^{-1}=1$),

$$K(\beta,\ a)=\frac{1}{\beta(\alpha a)^{\beta/\alpha}}. \tag{11}$$

Для единообразия формулировок будем обозначать $L^\infty(\mathbb{R})=C_0(\mathbb{R})$.

А. М. Седлецким была доказана следующая теорема: если последовательность Λ положительна и обладает плотностью $\Delta_\beta(\Lambda)$ при порядке β, то для полноты системы $e(\Lambda;a,\alpha)$ в $L^p(\mathbb{R}),\ 1\leqslant p\leqslant\infty$ необходимо, чтобы

$$\Delta_\beta(\Lambda)\geqslant\frac{1}{\pi}\,K(\beta,a)\sin^\beta\frac{\pi}{2\beta},$$

и достаточно, чтобы

$$\Delta_\beta(\Lambda)>\frac{1}{\pi}\,K(\beta,a)\sin^\beta\frac{\pi}{2\beta}. \tag{12}$$

• *Полные и одновременно минимальные системы весовых экспонент на полупрямой и прямой.* Полные системы $e(\Lambda;a,\alpha)$, удовлетворяющие условию (12), не могут быть минимальными в $L^p(\mathbb{R})$. Действительно, при удалении элемента λ_k из Λ, последовательность продолжает удовлетворять условию (12), и значит система $e(\Lambda\backslash\{\lambda_k\};a,\alpha)$ остается полной. А это и означает, что система $e(\Lambda;a,\alpha)$ неминимальна.

Первый пример системы весовых экспонент $e(\Lambda;a,\alpha)$ полной и одновременно минимальной в $L^2(\mathbb{R})$ принадлежит Р. Залику и Т. Абуабара Саад[13]. Они доказали, что при

$$\Lambda=\bigcup_{k=1}^{4}\left\{2\sqrt{\pi n}\exp\left(i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\,k\right)\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}\cup\{0\}\cup\{1\} \tag{13}$$

система $e(\Lambda;1/2,2)$ является полной и минимальной в $L^2(\mathbb{R})$. Т. А. Сальникова[14] и А. М. Седлецкий[15] рассмотрели последовательность Λ более общего

[13] *Zalik R. A., Abuabara Saad T.* Some theorems concerning holomorphic Fourier transforms. // J. Math. Anal. Appl. — 1987. — V. 126. — P. 483-493.

[14] *Сальникова Т. А.* Полные и минимальные системы экспонент в пространствах $L^p(\mathbb{R})$. // Мат. заметки. — 1994 — Т. 55, №3 — С. 118-129.

Сальникова Т. А. Полные и минимальные системы экспонент в лебеговых пространствах на вещественной оси. // Автореф. дисс. канд. физ.-мат. наук. — М.: РУДН, 1995.

[15] *Седлецкий А. М.* Преобразования Фурье быстро убывающих функций. // Изв. РАН. Сер. мат. — 1997. — Т. 61, №3. — С. 187-202.

по сравнению с (13) вида:

$$\Lambda = \bigcup_{k=1}^{4} \left\{ 2\sqrt{\pi(n+h)} \exp\left(i \left(\gamma + \frac{\pi}{2}\, k \right) \right) \right\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{\lambda_1\} \cup \{\lambda_2\},$$

$$h > -1, \quad \gamma \in [0,\, \pi/2), \quad (14)$$

где $\lambda_1 \neq \lambda_2$ выбраны таким образом, что в последовательности Λ нет кратных членов. Было доказано, что для полноты и минимальности системы $e(\Lambda, 1/2, 2)$ с Λ вида (14) в $L^p(\mathbb{R})$, $2 \leqslant p < \infty$ необходимо и достаточно, чтобы $-1/(4p) < h \leqslant 1/(4q)$.

Условие $\alpha = 2$ являлось существенным для доказательства этих результатов. Это связано с тем, что для определения аппроксимационных свойств системы $e(\Lambda; a, \alpha)$ требуются точные асимптотические оценки канонических произведений с нулями Λ. А такие оценки при $\alpha \neq 2$ известны не были.

Первые примеры полных и минимальных в $L^p(\mathbb{R})$ и в $L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ систем $e(\Lambda; a, \alpha)$ с $\alpha \neq 2$ принадлежат А. М. Седлецкому[16]. В качестве Λ им было взято множество нулей некоторой целой функции, являющейся линейной комбинацией функций Миттаг–Леффлера. В силу построения, выписать Λ в явном виде нельзя.

Цель работы

Изучение аппроксимационных свойств систем экспонент на конечном и бесконечном интервалах. Получение точных асимптотических оценок для канонических произведений с нулями определенного вида.

Научная новизна

В диссертации получены следующие новые результаты

- Найден критерий полноты систем экспонент $e(\Lambda)$ специального вида в весовых пространствах $L^p_{\alpha,\pi}$, а также точная формула для определения избытка системы экспонент $e(\Lambda)$ в пространстве $L^2(-\pi,\pi)$.

- Найдено достаточное условие базисности системы экспонент $e(\Lambda)$ специального вида в весовых пространствах L^p на интервале $(-\pi,\pi)$.

[16] *Седлецкий А. М.* Аппроксимативные свойства систем экспонент на прямой и полупрямой. // Мат. сб. — 1998. — Т. 189, №3. — С. 125-140.
Седлецкий А. М. Аппроксимация посредством экспонент на прямой и на полупрямой. // Anal. Math. — 2002. — Т. 28. — P. 43-60.

- Для широкого класса последовательностей Λ найден критерий принадлежности канонического произведения с нулями Λ классу функций типа синуса.

- В терминах усредненной плотности последовательности Λ найдено достаточное условие полноты системы $e(\Lambda, a, \alpha)$ в пространствах $L^p(\mathbb{R})$ и $L^p(\mathbb{R}_+)$, а также доказана точность этого условия при $\alpha = 2$. Для специального класса последовательностей Λ найдено необходимое и достаточное условие полноты и минимальности системы $e(\Lambda, a, \alpha)$ в пространствах $L^p(\mathbb{R})$ и $L^p(\mathbb{R}_+)$.

Методы исследования

В работе применяются методы комплексного анализа, анализа Фурье, теории аппроксимации, а также аппарат медленно меняющихся функций.

Теоретическая и практическая ценность

Работа носит теоретический характер. Ее результаты могут найти применение в дальнейших исследованиях по аппроксимации системами экспонент на конечном и бесконечном интервалах, а также при изучении асимптотического поведения целых функций с заданным множеством нулей.

Апробация работы

Основные результаты диссертации докладывались

- на семинаре механико-математического факультета МГУ "Негармонический анализ" под руководством проф. А. М. Седлецкого (2004-2010 гг., неоднократно).

- на семинаре мех.-мат. ф-та МГУ "Операторные модели в математической физике" под руководством проф. А. А. Шкаликова (2010 г.).

- на Воронежской зимней математической школе "Современные методы теории функций и смежные проблемы" (Воронеж, 2007 г.).

- на Уфимской международной математической конференции, посвященной памяти академика А. Ф. Леонтьева (Уфа, 2007 г.).

- на Саратовской зимней математической школе "Современные методы теории функций и смежные проблемы" (Саратов, 2008 г.).

- на международной конференции "Analytic methods of mechanics and complex analysis" (Киев, 2009 г.).
- на международной конференции по комплексному анализу, посвященной памяти А. А. Гольдберга (Львов, 2010).

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в 12 работах автора. Их список приведен в конце автореферата. Работ, написанных в соавторстве, нет.

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения и двух глав, разбитых в общей сложности на 9 параграфов. Объем диссертации 87 страниц. Список литературы включает 47 наименований.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во **введении** дан краткий обзор работ по теме диссертации, сформулированы рассматриваемые в диссертации задачи и изложены основные результаты.

Первая глава диссертации посвящена вопросам негармонического анализа. В **параграфе 1** приведены вспомогательные предложения, определения и обозначения.

Во **втором параграфе** рассматриваются вопросы полноты систем экспонент $e(\Lambda)$ в пространствах $L^p_{\alpha,\pi}$.

Пусть $l(t)$ — *медленно меняющаяся функция*, т. е. положительна, измерима на полуоси $[A,\infty]$, $A>0$ и при всех $\lambda>0$ удовлетворяет условию

$$\frac{l(\lambda t)}{l(t)} \xrightarrow{t\to\infty} 1.$$

Пусть, кроме того, $l(t) \xrightarrow{t\to\infty} 0$, $l(t)$ — дифференцируема и $l'(t)$ монотонна. Обозначим

$$\lambda_n = n + \left(\frac{1+\alpha}{2p} + l(n)\right)\operatorname{sign} n, \quad n\in\mathbb{Z}\,. \tag{15}$$

В диссертации доказана следующая оценка.

Теорема (1.1). *Пусть* Λ *имеет вид (15). Тогда*

$$\ln|F_\Lambda(z)| = O(1) + \pi|\mathrm{Im}\, z| - \frac{1+\alpha}{p}\ln|z| + \ln R(|z|), \qquad z\in\Omega_\delta(\Lambda).$$

где

$$R(t) = \exp\left(-2\int\limits_1^t \frac{l(u)}{u}\,du\right), \quad \Omega_\delta(\Lambda) = \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z-\lambda_n| \geqslant \delta > 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}\}\,.$$

На основе этой оценки доказан следующий критерий полноты.

Теорема (1.2). *Если выполнено условие (2), то для полноты системы* $e(\Lambda)$ *с* Λ *вида (15) в* $L^p_{\alpha,\pi}$ *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\frac{R^q(x)}{x} \notin L^1(1,\infty), \qquad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

Кроме того, найдено условие базиса в $L^p_{\alpha,\pi}$ системы $e(\Lambda)$ с Λ вида

$$\lambda_n = n + (a + l(n))\operatorname{sign} n, \quad a \in \mathbb{R}\,. \tag{16}$$

Теорема (1.3). *Пусть* Λ *имеет вид (16). Пусть выполнены условия (2) и*

$$\frac{1+\alpha}{2p} - \frac{1}{2} < a < \frac{1+\alpha}{2p}.$$

Тогда система $e(\Lambda)$ *образует в* $L^p_{\alpha,\pi}$ *базис, обладающий свойством Рисса, а при* $p=2,\ \alpha=0$ *— базис Рисса.*

В **параграфе 3 главы 1** при некоторых ограничениях на функцию $h(t)$, найдена точная оценка для канонического произведения с нулями (4).

Теорема (1.4). *Пусть* $h(t)\,:\ \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *— дифференцируемая вогнутая функция и* $h(t) = O(t^\beta),\ \beta < 1/2$. *Тогда*

$$\ln|F_\Lambda(x)| = O(1) + \pi h(|x|), \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Эта оценка позволила автору получить точную формулу для избытка $E_2(\Lambda)$ системы $e(\Lambda)$ с Λ вида (4) в $L^2(-\pi,\pi)$.

Теорема (1.5). *Пусть* $h(t)$ *— функция из предыдущей теоремы. Тогда*

$$E_2(\Lambda) = \max\left\{ n \in \mathbb{Z}_+ :\ \int^{\infty} \left(\frac{e^{\pi h(x)}}{x^n}\right)^2 dx = \infty \right\}.$$

В **параграфе 4 главы 1** найден некоторый аналог теоремы Кадеца для весовых пространств $L^p_{\alpha,\pi}$.

Теорема (1.6). *Если выполнены условия (5) и*

$$-\frac{1}{2q} < \Delta_1 \leqslant |\mathrm{Re}\,\lambda_n| - |n| \leqslant \Delta_2 < \frac{1+\alpha}{2p},$$
$$|\mathrm{Im}\,\lambda_n| < H < \infty,\ n \in \mathbb{Z}\,, \quad \mathrm{sign}\,\mathrm{Re}\,\lambda_n = \mathrm{sign}\,n,$$

причем $\Delta_2 - \Delta_1 < 1/q$, то система $e(\Lambda)$ образует в $L^p_{\alpha,\pi}$ базис, обладающий свойством Рисса.

Полученный результат является новым и для невесового случая, т. е. для пространства $L^p(-\pi,\pi),\ 1 < p < 2$.

В **параграфе 5** решается вопрос об описании функций $l(t) \xrightarrow{t\to\infty} +\infty$, таких, что последовательность

$$\lambda_n = n + l(|n|), \quad n \in \mathbb{Z}\,, \quad l(n) = o(n). \tag{17}$$

является множеством нулей ф. т. с.

Теорема (1.7). *Пусть $l(t)$ — вогнутая дифференцируемая функция, такая, что $l(t) = O(t^\alpha), \quad 0 < \alpha < 1$. Тогда для того, чтобы последовательность (17) была множеством нулей некоторой ф. т. с., необходимо и достаточно выполнение условия*

$$t \cdot l'(t) = O(1), \quad t \to +\infty.$$

Вторая глава диссертации посвящена вопросам аппроксимации посредством систем $e(\Lambda, a, \alpha)$ в пространствах L^p на полупрямой и прямой. **Параграф 1** представляет собой набор вспомогательных утверждений и определений. В **параграфе 2** получены точные оценки для канонических произведений с нулями специального вида. Эти оценки используются в следующих параграфах главы 2.

В параграфе 3 найдено достаточное условие полноты системы $e(\Lambda, a, \alpha)$ в пространствах L^p. Пусть $n_\Lambda(t)$ — считающая функция последовательности Λ. Обозначим

$$N_\Lambda(r) = \int_1^r \frac{n_\Lambda(t)}{t}\,dt.$$

Верхней усредненной плотностью последовательности Λ при порядке β назовем

$$\overline{D}_\beta(\Lambda) := \overline{\lim}_{r\to\infty} \frac{N_\Lambda(r)}{r^\beta}.$$

Аналогично определяется нижняя усредненная плотность $\underline{D}_\beta(\Lambda)$ и усредненная плотность $D_\beta(\Lambda)$. Имеет место следующая

Теорема (2.2). *Пусть β — число сопряженное с α, а функция $K(\beta, a)$ определена равенством (11). Тогда для полноты системы $e(\Lambda; a, \alpha)$ в $L^p(\mathbb{R})$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ достаточно выполнения условия*

$$\overline{D}_\beta(\Lambda) > \frac{K(\beta, a)}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\cos t|^\beta dt. \tag{18}$$

Возникает вопрос о точности этой оценки. Ответ на него в случае $\beta = 2$ (при этом правая часть неравенства (18) равна $1/(8a)$) дан в диссертации.

Теорема (2.3). *Для любого $0 \leqslant D < 1/(8a)$ существует неполная в пространстве $L^p(\mathbb{R})$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ система экспонент $e(\Lambda; a, 2)$, такая, что $D_2(\Lambda) = D$.*

Заметим, что теорема 2.2 для случая $p = 2$, $1 < \alpha \leqslant 2$ доказана в совместной работе В. В. Напалкова, А. А. Румянцевой и Р. С. Юлмухаметова[17]. Там же без доказательства приведено утверждение о точности оценки (18). Теорема 2.2 для всех $\alpha > 1$ и $1 \leqslant p \leqslant \infty$ доказана в диссертации.

В диссертации показано, что если усредненная плотность последовательности Λ находится справа от интервала

$$\left(\frac{1}{16\pi a}, \frac{1}{8a}\right), \tag{19}$$

то система $e(\Lambda; a, 2)$ полна в $L^p(\mathbb{R})$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, а если внутри, то система $e(\Lambda; a, 2)$ может быть как полной, так и неполной.

Для пространств $L^p(\mathbb{R}_+)$ верны аналогичные результаты. В этом случае в роли (19) выступает интервал $(1/(32\pi a), 1/(16a))$.

В **параграфе 4 главы 2** строятся полные и одновременно минимальные системы экспонент $e(\Lambda, a, \alpha)$ в пространствах $L^p(\mathbb{R})$ и $L^p(\mathbb{R}_+)$.

Аналитическая в области

$$\Omega = \{|z| > a, \ |\arg z| < \gamma \leqslant \pi\}$$

функция $l(z)$ называется *аналитической медленно меняющейся* в этой области, если

$$z\,\frac{l'(z)}{l(z)} \to 0, \quad z \to \infty, \quad z \in \Omega.$$

Пусть $l(z)$ — аналитическая медленно меняющаяся функция в области Ω, причем $l(\mathbb{R}_+) \subseteq \mathbb{R}_+$ и $l(t) \to 0$ $(t \to \infty)$. Обозначим

$$\theta_k = \frac{\pi k}{\beta}, \quad \theta_k^0 = \frac{\theta_k}{\alpha} + \frac{\pi}{2\beta}, \quad a_k = |\sin\theta_k|^{\beta-1}, \quad I_k = \left[\theta_k^0 - \frac{\pi}{2\beta}, \theta_k^0 + \frac{\pi}{2\beta}\right],$$

[17] *Напалков В. В., Румянцева А. А., Юлмухаметов Р. С.* Полнота систем экспонент в весовых пространствах на вещественной оси. // Уфимск. матем. журн., 2010, т. 2, вып. 1, С. 97–109.

$$k=1,\dots,K:=\max\{n\in\mathbb{N}:\ n<\beta\},$$

$$\widetilde{l}(x)=\int\limits_1^x\frac{l(t)}{t}\,dt,\quad \varphi(t)=\exp\left(-\frac{2K}{\beta}\,\widetilde{l}\left(t^\beta\right)\right).$$

Рассмотрим последовательность Λ следующего вида

$$\Lambda=\bigcup_{k=1}^{K}\{\lambda_k\}\cup\left\{e^{i\theta_k^0\pm i\pi/2\beta}\left(\frac{2\pi(n+h+l(n))}{a_k\cdot K(\beta,a)}\right)^{1/\beta}\right\}_{n\in\mathbb{N}}. \qquad (20)$$

Здесь $\lambda_k\in\mathbb{C}$ выбраны так, чтобы в последовательности Λ не было кратных членов.

Всюду далее q — число, сопряженное с p, т. е. такое, что $p^{-1}+q^{-1}=1$.

Теорема (2.4). *1. Условие*

$$h<\frac{1}{2qK}-\frac{(q-2)(\beta-2)}{4qK}$$

или

$$h=\frac{1}{2qK}-\frac{(q-2)(\beta-2)}{4qK},\quad \frac{\varphi^q(t)}{t+1}\notin L^1(\mathbb{R}_+),$$

при $1<p<\infty$ *является достаточным для полноты системы* $e(\Lambda;a,\alpha)$ *с* Λ *вида (20) в пространстве* $L^p(\mathbb{R}_+)$*. А при* $2\leqslant p<\infty$ *это условие является и необходимым.*

2. Условие

$$h>-\frac{1}{2pK}-\frac{(q-2)(\beta-2)}{4qK}$$

или

$$h=-\frac{1}{2pK}-\frac{(q-2)(\beta-2)}{4qK},\quad \frac{\varphi^q(t)}{t+1}\in L^1(\mathbb{R}_+),$$

при $1<p<\infty$ *является необходимым для минимальности системы* $e(\Lambda;a,\alpha)$ *с* Λ *вида (20) в пространстве* $L^p(\mathbb{R}_+)$*. А при* $2\leqslant p<\infty$ *это условие является и достаточным.*

Благодарности

Автор глубоко благодарен своему научному руководителю, профессору А. М. Седлецкому за постановку задач, ценные советы и постоянное внимание к работе.

Список работ автора по теме диссертации

[1] *Юхименко А. А.* Канонические произведения, порожденные возмущениями целочисленной последовательности, и их асимптотические оценки. // Известия РАН, серия математическая, том 74, № 5, 2010, С. 205-224.

[2] *Юхименко А. А.* Полнота и базисные свойства систем экспонент в весовых пространстах $L^p(-\pi, \pi)$. // Математические заметки, 2007, том 81, вып. 5, стр. 776–788.

[3] *Юхименко А. А.* Об одном классе функций типа синуса. // Математические заметки, 2008, том 83, вып. 6, стр. 941–954.

[4] *Юхименко А. А.* Асимптотические оценки канонических произведений с нулями специального вида. // Сиб. Мат. Журнал, Том 51, №4, 2010. С. 944-954.

[5] *Юхименко А. А.* Базисы из экспонент в весовых пространствах $L^p(-\pi, \pi)$. // Вест. Моск. Ун-та, матем. механ. 2010, №2, С. 36-38.

[6] *Юхименко А. А.* Критерий принадлежности бесконечного произведения классу функций типа синуса. // Тезисы докл. Воронежской зимней математической школы "Современные методы теории функций и смежные проблемы". Воронеж: ВГУ, 2007. С. 249.

[7] *Юхименко А. А.* Точные оценки для порождающих функций возмущений целочисленной последовательности. // Тезисы докл. Уфимской Международной Математической Конференции. Уфа: УНЦ РАН, 2007. С. 44.

[8] *Юхименко А. А.* Избытки систем $\{\exp(ix(n + ih_n))\}$ в $L^2(-\pi, \pi)$. // Тезисы докл. Восьмой Международной Летней Научной Школы-конференции "Теория функций, ее приложения и смежные вопросы". Казанское Математическое Общество, 2007. С. 286.

[9] *Юхименко А. А.* Точные оценки для порождающих функций комплексных возмущений целочисленно последовательности. // Тезисы докл. Саратовской зимней математической школы "Современные методы теории функций и смежные проблемы". Саратов: СГУ, 2008. С. 207.

[10] *Юхименко А. А.* Базисы из экспонент в весовых пространствах $L^p(-\pi, \pi)$. // Тезисы докл. на V Международном Симпозиуме "Ряды Фурье и их приложения". Изд-во "ЦВВР", Ростов н/Д, 2008. С. 65.

[11] *Юхименко А. А.* Asymptotic estimates of canonical products whith special kind of zeroes. // Тезисы докл. Intern. Conf. "Analytic methods of mechanics and complex analysis". Kiev, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, 2009. С. 60.

[12] *Юхименко А. А.* Полные и минимальные системы весовых экспонент на полупрямой и прямой. // Тезисы докл. Intern. Conf. on Complex Analysis in Memory of A. A. Goldberg. Lviv, Ivan Franco National University, 2010. С. 139.