Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова

Механико-математический факультет

На правах рукописи

УДК 512.938.5+514.762

Москвин Андрей Юрьевич

Топология особенностей дробно-рациональных интегрируемых систем

Специальность 01.01.04 — геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2010

Работа выполнена на кафедре дифференциальной геометрии и приложений Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научные руководители:	академик РАН Фоменко Анатолий Тимофеевич, доктор физико-математических наук, профессор Болсинов Алексей Викторович
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Карапетян Александр Владиленович
	кандидат физико-математических наук, доцент Рябов Павел Евгеньевич
Ведущая организация:	Московский государственный университет электроники и математики

Защита диссертации состоится 10 декабря 2010 г. в 16 ч. 45 м. на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д.1, МГУ, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж)

Автореферат разослан 10 ноября 2010 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д.501.001.84 при МГУ
доктор физико-математических наук,
профессор

А.О. Иванов

Общая характеристика работы

Актуальность темы

В работе можно выделить три направления исследования. Во-первых, получены результаты, описывающие топологию слоения Лиувилля для некоторых интегрируемых гамильтоновых систем. А именно, А.Т. Фоменко, Х. Цишангом[1], А.В. Болсиновым[2], А.А. Ошемковым[3] и другими[4] была предложена теория топологической классификации слоения Лиувилля интегрируемых по Лиувиллю гамильтоновых систем. Авторы этой теории развили математический аппарат, позволяющий проводить классификацию особенностей слоения Лиувилля, построение бифуркационных диаграмм и определение типов бифуркаций, вычисление локальных и глобальных инвариантов слоения Лиувилля, траекторных инвариантов. Основным объектом этой теории является инвариант Фоменко-Цишанга, полностью классифицирующий слоения Лиувилля. В диссертации построен этот инвариант для системы Дуллина-Матвеева. Тем самым, эту систему можно сравнить с классическими случаями интегрируемости.

Во-вторых, найдены все устойчивые критические траектории в задачах неголономной механики о качении шара Чаплыгина и резинового шара по плоскости. Обе эти задачи после подходящей замены времени становятся интегрируемыми гамильтоновыми системами. А потому, для их исследования применимы методы топологического анализа интегрируемых гамильтоновых систем, разработанные М.П. Харламовым[5]. Актуальность исследования устойчивых решений заключается в том, что именно устойчивые решения не исчезают при возмущении системы.

И в-третьих, получены общие результаты, помогающие проверять полноту векторных полей, обладающих больших количеством первых интегралов. Полученные результаты были применены к исследованию полноты некоторых гамильтоновых векторных полей.

---

[1]А.Т. Фоменко, Х. Цишанг, *Топологический инвариант и критерий эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы*, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 54, выпуск 3, стр. 546-575, 1990

[2]А.В. Болсинов, *Гладкая траекторная классификация интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы*, Матем. сборник, т. 186, №1, стр. 3-28, 1995

[3]А.А. Ошемков, *Вычисление инварианта Фоменко для основных интегрируемых случаев динамики твердого тела*, Труды семинара по векторному и тензорному анализу, №25, часть 2, стр. 23-110, 1993

[4]А.В. Болсинов, А.Т. Фоменко, *Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация*, РХД, Ижевск, 1999

[5]М.П. Харламов, *Топологический анализ интегрируемых задач динамики твердого тела*, Ленинград: Изд-во Ленинградского Университета, 1988

Цель работы

1. Нахождение инварианта Фоменко-Цишанга слоения Лиувилля интегрируемого случая Дуллина -Матвеева.
2. Описание устойчивости критических решений в задачах о качении шара Чаплыгина и резинового шара по плоскости.
3. Изучение вопроса полноты гамильтоновых полей, соответствующих полиномам из полного коммутативного набора полиномов на вещественных алгебрах Ли, полученных методом С.Т. Садэтова.

Научная новизна

1. Исследована топология слоений Лиувилля для интегрируемых случаев Дуллина-Матвеева, о качении шара Чаплыгина с ротором по плоскости, о качении резинового шара с ротором и в поле сил задачи Бруна по плоскости. Для всех систем получены бифуркационные диаграммы отображения момента, вычислены индексы критических окружностей и построены бифуркационные комплексы.
2. Решена задача тонкой Лиувиллевой классификации изоэнергетических поверхностей случая Дуллина-Матвеева. Доказана невырожденность и дана классификация положений равновесия, описаны инварианты Фоменко-Цишанга изоэнергетических поверхностей.
3. Решена задача о полноте гамильтоновых векторных полей отвечающих полиномам, полученных методом С.Т. Садэтова. А именно, в полных коммутативных наборах полиномов, полученных методом С.Т. Садэтова, есть два типа полиномов. Полиномы первого типа получаются методом сдвига аргумента, полиномы второго типа — другими методами. Доказано, что гамильтоновы поля, соответствующие полиномам второго типа — полные.

Основные методы исследования

В работе используются методы топологического анализа интегрируемых гамильтоновых систем, разработанные М.П. Харламовым[5]. Для построения инварианта Фоменко-Цишанга была использована теория топологической классификации интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы, построенная А.Т. Фоменко, А.В. Болсиновым и другими[4].

При исследовании полноты векторных полей использовался метод редукции динамических систем.

Теоретическая и практическая ценность работы

Полученные в работе результаты имеют теоретическое значение. Они могут быть полезны для исследования особенностей интегрируемых гамильтоновых систем. Автором предложен метод доказательства полноты гамильтоновых полей, обладающих большим количеством первых интегралов. На практике результаты могут быть использованы для создания шарообразных движущихся механизмов, например, игрушек.

Апробация работы

Результаты диссертации докладывались:

- многократно (в 2005 — 2010 годах) на семинаре «Современные геометрические методы» под руководством академика РАН А.Т. Фоменко и проф., д.ф.-м.н. А.С. Мищенко (мех-мат МГУ),
- на заседании Воронежской зимней математической школы (Воронеж, 2006),
- на конференции «Александровские чтения» (Москва, 2006),
- на геометрическом заседании семинара проф. Лауреса (Бохумский университет, Германия, 2008),
- на международной конференции «Geometry, Dynamics and Integrable systems» (Белград, 2008),
- на конференции «Современные проблемы математики, механики и их приложений», посвященную 70-летию ректора МГУ академика РАН В.А.Садовничего (Москва, 2009),
- на семинаре Ижевского Института Компьютерных Исследований (2009).

Публикации

Результаты автора по теме диссертации опубликованы в 4 работах, из них 3 в журналах из перечня ВАК. Список работ приводится в конце автореферата [1–4].

Структура и объем диссертации

Диссертационная работа состоит из 5 глав (первая из которых является вводной). Список литературы включает 40 наименований. Общий объем диссертации составляет 134 страницы.

Краткое содержание работы

Во **введении** формулируется цель работы, кратко излагаются ее результаты и содержание, а также освещается место данных результатов в современной теории интегрируемых систем.

В **первой главе** вводятся основные понятия и излагаются ключевые теоремы топологической классификации интегрируемых гамильтоновых систем.

Определение. *Слоением Лиувилля, отвечающим интегрируемой по Лиувиллю системе*, называется разбиение фазового многообразия $\mathcal{M}^{2n}$ системы на связные компоненты совместных поверхностей уровня интегралов $f_1, f_2, ..., f_n$.

Определение. Две интегрируемые по Лиувиллю гамильтоновы системы $(\mathcal{M}, v)$ и $(\mathcal{M}', v')$ называются *лиувиллево эквивалентными*, если существует диффеоморфизм $\Phi : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$, переводящий лиувиллево слоение первой системы в лиувиллево слоение второй системы.

В главах 2, 3, 4 рассмотрены гамильтоновы системы с двумя степенями свободы, то есть такие, у которых фазовое симплектическое многообразие $\mathcal{M}$ имеет размерность 4, а интегрируемость гарантируется существованием лишь одного функционально независимого с гамильтонианом H дополнительного интеграла F. *Изоэнергетической поверхностью* называется поверхность уровня гамильтониана $Q_h^3 = \{H(x) = h\}$. Полным инвариантном слоения Лиувилля на неособой изоэнергетической поверхности является инвариант Фоменко-Цишанга, также называемый меченой молекулой или тонким лиувиллевым инвариантом. Он представляет собой граф, ребра которого отвечают однопараметрическим семействам торов Лиувилля, а вершины — критическим слоям, в которых происходят бифуркации. На ребрах этого графа стоят числовые метки.

Определение. Класс лиувиллевой эквивалентности замкнутой окрестности особого слоя называется *3-атомом.*

Оказывается, в подавляющем большинстве изученных интегрируемых систем разнообразие бифуркаций ограничивается четырьмя наиболее распространенными 3-атомами, которые обозначаются A, A^*, B и C_2.

Обозначения 3-атомов помещаются в вершины графа. Способ склейки глобального изоэнергетического многообразия Q_h^3 из этих "универсальных кирпичей" задается числовыми метками трех типов: r, ε и n. Вместе с описанным графом они и составляют инвариант Фоменко-Цишанга. Имеет место следующий результат.

Теорема(Фоменко-Цишанг). *Две интегрируемые гамильтоновы системы (Q^3, v) и $(Q^{3\prime}, v')$ лиувиллево эквивалентны тогда и только тогда, когда отвечающие им меченые молекулы совпадают.*

Также в первой главе сформулирована гипотеза Мищенко-Фоменко. Напомним, что для произвольной алгебры Ли $\mathfrak{g}$, ее двойственное пространство можно наделить структурой пуассонового многообразия со скобкой Пуассона, которая произвольным гладким функциям $f, g \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ ставит в соответствие функцию

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_j}c_{ij}^k x_k \in C^\infty(\mathfrak{g}^*),$$

где $x_1, x_2, ..., x_n$ — координаты в двойственном пространстве, а c_{ij}^k — структурные константы алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Набор гладких функций $f_1, f_2, ..., f_k \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ называется *полным коммутативным набором*, если, во-первых, градиенты этих функций почти всюду линейно независимы, и во-вторых, их количество

$$k = \frac{\operatorname{ind}\mathfrak{g} + \dim\mathfrak{g}}{2}.$$

В работе [6] А.С.Мищенко и А. Т. Фоменко сформулировали гипотезу о существовании полного коммутативного набора полиномов на произвольной алгебре Ли над полями $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$, и предложили метод сдвига аргумента, с помощью которого они доказали эту гипотезу для полупростых алгебр Ли.

[6] А.С. Мищенко, А.Т. Фоменко, *Интегрирование гамильтоновых систем некоммутативными симметриями*, Труды семинара по вект. и тенз. анализу. М.: МГУ, т. 20, стр. 5-54, 1981

Гипотеза(Мищенко-Фоменко). *Пусть $\mathfrak{g}$ — вещественная или комплексная конечномерная алгебра Ли. Тогда на $\mathfrak{g}$ существует полный коммутативный набор полиномов.*

В работе [7] С.Т. Садэтов доказал гипотезу в общем случае над произвольным полем нулевой характеристики. В первой главе дана новая интерпретация метода С.Т. Садэтова построения полных коммутативных наборов полиномов на алгебрах Ли.

Во **второй главе** для случая Дуллина–Матвеева найдены множество критических точек и множество критических значений отображения момента, описана топология изоэнергетических поверхностей, исследованы особые точки векторного поля и их тип, определено количество критических окружностей в прообразе кривых бифуркационной диаграммы. На компьютере вычислены индексы критических окружностей и построен инвариант Фоменко-Цишанга изоэнергетических поверхностей.

Случай Дуллина–Матвеева является топологически новым, поскольку одна из меченых молекул в этом случае содержит атом D_2. Такая перестройка торов Лиувилля не встречается ни в одном из классических случаев интегрируемости. А согласно теореме Фоменко-Цишанга, инвариант Фоменко-Цишанга является полным инвариантом слоения Лиувилля.

В **третьей главе** анализируются движения шара Чаплыгина с ротором. Проведен топологический анализ. В частности, для отображения момента построена бифуркационная диаграмма и бифуркационный комплекс. Описаны особые решения. Их устойчивость исследована аналитически. В последнем параграфе показано, как при помощи ротора можно стабилизировать неустойчивые и дестабилизировать устойчивые критические траектории.

В **четвертой главе** изучены отдельные замечательные периодические решения задачи о качении резинового шара по плоскости. Эта задача остается интегрируемой по Лиувиллю после замены времени даже при добавлении к шару постоянного ротора или силового поля задачи Бруна. При обеих добавках также исследованы решения, и среди них найдены устойчивые. Для этого системы были подвергнуты топологическому анализу, разработанному М.П. Харламовым. В частности, по отображению момен-

[7] С.Т. Садэтов, *Доказательство гипотезы Мищенко-Фоменко*, Доклады РАН, т. 397, №6, стр. 751-754, 2004

та построены бифуркационные диаграммы и бифуркационные комплексы. Описаны критические решения. Их устойчивость исследована аналитически.

Наконец, в **пятой главе**, во-первых, получена важная лемма, с помощью которой возможно проверять полноту некоторых векторных полей. Под полнотой векторного поля подразумевается продолжимость всех его интегральных траекторий по параметру времени от $-\infty$ до $+\infty$. Рассмотрим многообразие $\mathcal{M}$ и векторное поле $\boldsymbol{v}$ на нем. Пусть определено действие произвольной группы Ли $\mathbf{G}$ на $\mathcal{M}$, сохраняющее векторное поле $\boldsymbol{v}$. Множество орбит этого действия $\mathcal{K} = \mathcal{M}/\mathbf{G}$ не обязано быть хаусдорфовым пространством. Очевидно, тогда поле $\boldsymbol{v}$ переводит орбиты этого действия в орбиты. Тем самым, $\boldsymbol{v}$ локально задает поток ϕ_t^v на пространстве орбит.

Лемма. *Если поток ϕ_t^v определен для любого $t \in \mathbb{R}$ на $\mathcal{K}$, тогда поле $\boldsymbol{v}$ полно на $\mathcal{M}$.*

А во-вторых,получены результаты о полноте некоторых гамильтоновых векторных полей. А именно, исследуется полнота гамильтоновых полей, отвечающих полиномам, полученных методом С.Т. Садэтова. Этот вопрос важен, поскольку полный коммутативный набор функций еще не определяет интегрируемую по Лиувиллю систему. Для интегрируемости по Лиувиллю требуется полнота гамильтоновых полей для всех функций из набора коммутирующих функций. Метод С.Т. Садэтова устроен пошагово. На каждом шаге применяется один из четырех методов и к уже существующему набору полиномов добавляется несколько новых. Среди этих четырех методов, используемых С.Т. Садэтовым, есть метод сдвига аргумента. Таким образом, С.Т. Садэтов каждый отдельный полином получает одним из двух способов: либо методом сдвига аргумента, либо одним из трех оставшихся методов. В пятой главе показано, что гамильтоновы поля для полиномов, полученных вторым способом — полны. Тем самым, задача об исследовании полноты гамильтоновых полей полиномов из полного коммутативного набора полиномов, полученных методом С.Т. Садэтова, сведена к задача об исследовании полноты гамильтоновых полей полиномов, полученных методом сдвига аргумента.

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность своим научным руководителям академику РАН А.Т. Фоменко и д.ф.-м.н., профессору А.В. Болсинову за постановку задачи и постоянное внимание к работе. А также доценту А.А. Ошемкову за обсуждение работы.

Автор благодарит участников семинара «Современные геометрические методы» и всех сотрудников кафедры за творческую атмосферу, которая способствовала научной работе.

Работы автора по теме диссертации

[1] А.Ю. Москвин, *Топология слоения Лиувилля интегрируемого случая Дуллина–Матвеева на двумерной сфере*, Матем. сб., 2008, т.199, №3,стр. 95–132

[2] А.Ю. Москвин, *Шар Чаплыгина с гиростатом: особые решения*, Нелинейная динамика, 2009, т.5, №3, стр. 345-356

[3] А.Ю. Москвин, *Резиновый шар на плоскости: критические решения*, Нелинейная динамика, 2010, т.6, №2, стр. 345-358

[4] А.Ю. Москвин, *Топология слоений Лиувилля нового интегрируемого случая на двумерной сфере*, Труды Воронежской зимней математической школы С.Г. Крейна, 2006, ИПЦВГУ, стр. 135-139