Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова
Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 519.21

ЯСЬКОВ Павел Андреевич

Законы больших чисел в современных стохастических моделях

01.01.05 —теория вероятностей и математическая статистика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2010

Работа выполнена на кафедре теории вероятностей механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Булинский Александр Вадимович
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Гапошкин Владимир Фёдорович
	кандидат физико-математических наук Мусин Максим Маратович
Ведущая организация:	Санкт-Петербургское отделение Математического института имени В.А. Стеклова РАН

Защита диссертации состоится 10 декабря 2010 года в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.85 при МГУ имени М.В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ, механико-математического факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 9 ноября 2010 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д 501.001.85 при МГУ,
доктор физико-математических наук,
профессор В.Н. Сорокин

Актуальность

Закон больших чисел (ЗБЧ) является первой предельной теоремой теории вероятностей, доказанной Я. Бернулли в 1713 г. Классические условия справедливости ЗБЧ, полученные Радемахером, Меньшовым, Колмогоровым, Биркгоффом, Хинчиным, Гапошкиным[1] и Лионсом[2], имеют оптимальный характер для определенных типов случайных величин. В последние годы активно ведется работа по поиску аналогичных условий для новых классов случайных последовательностей и полей. Так например, в недавних статьях Володина, Розальски, Ху[3], Сунга[4], Вебера[5] были предприняты попытки перенести ряд известных результатов из теории квазистационарных временных рядов на тот случай, когда условие ограниченности вторых моментов заменено на условие их роста, фигурирующее в теореме Меньшова-Радемахера. Результаты, полученные в упомянутых недавних работах, все же далеки от оптимальных. Это явилось одной из мотивировок для проведенного нами исследования.

Другой важный класс случайных величин представляют дискретные стохастические интегралы, включающие, в частности, интегральные функционалы от случайных блужданий. Повышенный интерес к объектам такого рода связан с моделями рынка акций в финансовой математике, а также обусловлен некоторыми задачами, возникающими в современной теории временных рядов. При решении подобных задач полезны различные варианты предельных теорем для упомянутых интегралов. В литературе, например, имеются общие условия сходимости данных интегралов к интегралам Ито, а также интегралам по фрактальному броуновскому движению[6]. Этих результатов оказывается недостаточно для

[1]Гапошкин В.Ф. Критерий усиленного закона больших чисел для классов стационарных в широком смысле процессов и однородных случайных полей, *Теория вероятн. и ее примен.*, 22:2, 1977, с. 295–319.

[2]Lyons R. Strong laws of large numbers for weakly correlated random variables, *Michigan Math. J.*, 35:3, 1988, pp. 353-359.

[3]Hu T.-C., Rosalsky A., Volodin A.I. On convergence properties of sums of dependent random variables under second moment and covariance restrictions, *Statist. Probab. Lett.*, 78:14, 2008, pp. 1999–2005.

[4]Sung S.H. Maximal inequalities for dependent random variables and applications, *Journal of Inequalities and Applications*, 2008:ID 598319, 2008.

[5]Hu T.-C., Weber N.C. A note on strong convergence of sums of dependent random variables, *Journal of Probability and Statistics*, 2009:ID 873274, 2009.

[6]Mishura Yu.S., Rode S.H. Weak convergence of integral functionals of random walks weakly convergent to fractional Brownian motion, *Ukranian Math. J.*, 59:8, 2007, pp. 1040–1046.

некоторых новых задач, где, в частности, требуется ЗБЧ для дискретных интегралов. Поэтому выполненный анализ поведения дискретных стохастических интегралов представляется весьма актуальным.

При изучении сложных стохастических систем важную роль играют аппроксимации случайных полей, используемых для их описания. Широко применяются приближения пределом среднего поля, что представляет собой форму ЗБЧ. Обширный класс таких систем активно исследуется в математической биологии при моделировании процессов эпидемий[7], а также в статистической физике при анализе большого числа взаимодействующих частиц[8]. Одна из наиболее общих постановок модели эпидемий без учета локального взаимодействий индивидов принадлежит Рейнерт[9]. Динамика в этой модели описывается с помощью системы стохастических операторных уравнений. Рейнерт установлен вариант ЗБЧ, позволяющий приближать данную стохастическую модель некоторой детерминированной. При этом встает естественный вопрос о качестве такого приближения на заданных временных интервалах[10]. Эта задача также решается в диссертации.

Цель работы

Цель настоящей диссертации состоит в решении следующих задач.

1. Расширить оптимальные условия справедливости закона больших чисел (ЗБЧ) для квазистационарных рядов и полей, отказавшись от равномерной ограниченности вторых моментов рассматриваемых случайных элементов.

2. Получить новые максимальные и моментные неравенства, играющие важную роль в доказательстве ЗБЧ, а также некоторых вопросах теории интегрирования случайных функций.

3. Установить новые варианты ЗБЧ, приложимые к исследованию ряда новых сложных стохастических моделей биологических систем.

[7]Zhien Ma, Jia Li. *Dynamical modeling and analysis of epidemics*, World Scientific, 2009.

[8]Ligget T. M. *Interacting particle systems*, Springer, 2004.

[9]Reinert G. The asymptotic evolution of the General Stochastic Epidemic, *Ann. Appl. Probab.*, 5, 1995, pp. 1061–1086.

[10]Reinert G. Stein's method for epidemic processes, *Complex Stochastic Systems*, Chapman&Hall, 2001.

Научная новизна

Все результаты диссертации являются новыми. Перечислим основные из них:

1. Доказаны обобщения (усиленного) ЗБЧ Меньшова-Радемахера, имеющие в ряде случаев неулучшаемый характер.
2. Установлено обобщение максимального неравенства Морица.
3. Получены новые версии ЗБЧ для мартингал-разностей и величин, представимых в виде дискретных интегралов.
4. Расширена классическая теория интегрирования Янга.
5. Даны оценки скорости сходимости в ЗБЧ в рамках общей модели эпидемий.

Результаты диссертации обоснованы в виде строгих математических доказательств и получены автором самостоятельно. Точные формулировки установленных автором утверждений приведены ниже.

Методы исследования

В работе используется сочетание традиционных методов теории вероятностей, случайных процессов и функционального анализа (моментные и максимальные неравенства, лемма Гронуолла, преобразование Гильберта, лемма Бореля-Кантелли, теория эмпирических процессов и другие).

Теоретическая и практическая ценность

Диссертация носит теоретический характер. Практическая ценность полученных результатов продемонстрирована на примерах новых задач, возникающих в эконометрике и математической биологии.

Аппробация работы

Результаты диссертации докладывались на Большом кафедральном семинаре кафедры теории вероятностей под рук. член-корреспондента РАН А.Н.Ширяева (мехмат МГУ, 2010 г.), Городском семинаре по теории вероятностей под рук. академика РАН И.А.Ибрагимова (ПОМИ РАН, 2010 г.), семинаре «Ортогональные ряды» под рук. член-корреспондента РАН Б.С.Кашина и профессора С.В.Конягина (мехмат МГУ, 2009 г.), семинаре Института стохастики университета Ульма (Германия, 2010), семинаре «Асимптотический анализ случайных процессов и полей» под рук. профессора А.В.Булинского и доцента А.П.Шашкина (мехмат МГУ, 2007-2010 гг.).

Также были сделаны доклады на следующих международных конференциях: Российско-японском симпозиуме «Сложные стохастические модели: асимптотика и приложения» (Москва, 2007), конференции «Ломоносов-2009» (Москва, 2009), конференции «Стохастический анализ и случайные динамические системы» (Львов, Украина, 2009), симпозиуме «Стохастическая геометрия, пространственная статистика и их применения» (Хиршег, Австрия, 2009), «Втором международном семинаре по стохастике России, Швеции и Финляндии» (Стокгольм, Швеция, 2010), международном симпозиуме «Стохастика и ее видение» (Москва, 2010).

Работа автора поддержана грантами РФФИ 07-01-00373 и 10-01-00397.

Публикации

Результаты диссертации опубликованы в 7 работах автора (в том числе 4 статьи в журналах из перечня ВАК), список которых приведен в конце автореферата.

Структура диссертации

Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы, насчитывающего 87 наименований. Общий объем диссертации составляет 113 страниц.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении излагается история исследований, относящихся к ЗБЧ, и описывается структура диссертации.

В главе 1 рассматриваются классические условия применимости ЗБЧ, связанные с теоремой Меньшова-Радемахера. Первая часть этой главы посвящена последовательностям случайных величин $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ с конечным моментом второго порядка. Для точных формулировок введем ряд обозначений и приведем используемые далее условия.

Пусть последовательность положительных чисел $\{b_n\}_{n\geqslant 1}$ не убывает и удовлетворяет для всех достаточно больших n двойному неравенству

$$c \leqslant b_{2n}/b_n \leqslant C, \tag{1}$$

где $0 < c \leqslant C < \infty$. Предположим также, что имеет место условие $(*)$: $\sum\limits_{n\geqslant 1} n\rho_n/b_n^2 < \infty$, когда $c > \sqrt{2}$, или для некоторого $\beta > 3/2$ при $c = \sqrt{2}$

$$b_n \geqslant n^{1/2}\log^{\beta} n \ \text{ и } \ \sum_{n\geqslant 1} \rho_n \log^{3-2\beta} n < \infty;$$

здесь и далее $\rho_n = \sup_k(\mathsf{E}X_kX_{k+n})^+$, $x^+ = x \vee 0$ и $\log x = \log_2(x \vee 2)$. Основной результат первой части главы 1 содержит

ТЕОРЕМА 1.1.2. *Пусть b_n удовлетворяют* (1)*, причем*

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{\mathsf{E}X_n^2}{b_n^2} \log^2 n < \infty. \tag{2}$$

Если, кроме того, выполняется условие $(*)$*, то справедлив усиленный ЗБЧ в форме*

$$\frac{1}{b_n}\sum_{i=1}^{n} X_i \to 0 \ \text{ п.н.}, \quad n \to \infty. \tag{3}$$

Теорема 1.1.2 обобщает результаты, полученные Сунгом[4], Левенталем, Салехи, Чобоняном[11], а также часть результатов Морица[12]. Более

[11] Левенталь Ш., Салехи Х., Чобанян С.А. Общие максимальные неравенства, связанные с усиленным законом больших чисел, *Матем. заметки*, 81:1, 2007, с. 98–111.

[12] Moricz F. The strong laws of large numbers for quasi-stationary sequences, *Z. Wahrsch. Verw. Gebeite*, 38:3, 1977, pp. 223–236.

того, в диссертации установлена необходимость условий теоремы 1.1.2, обеспечивающих (3) (при $c > \sqrt{2}$) в определенном классе случайных величин.

Другим важным результатом первой части главы 1 является

ТЕОРЕМА 1.1.4. *Пусть* $b_n \geqslant n^\alpha/\log^\beta n$ *при всех* $n \geqslant 1$ *и некоторых*

$$(\alpha, \beta) \in \{(a, b) : a \neq 1,\, a > 1/2\} \cup \{(1, b) : b > -1\},$$

а также выполнено (2) *и* $\sum_{n\geqslant 1} n^{1-2\alpha}\lambda_n\rho_n \log^{2\beta} n < \infty$*, где*

$$\lambda_n = \begin{cases} (\log\log n)^2 & \text{при } 1/2 < \alpha < 1, \\ \log n(\log\log\log n)^2 & \text{при } \alpha = 1, \\ \log n(\log\log n)^\gamma & \text{при } \alpha > 1 \text{ и некотором } \gamma > 1. \end{cases}$$

Тогда

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{X_n}{b_n} \text{ сходится п.н.;} \tag{4}$$

если к тому же $b_n \uparrow \infty$*, то имеет место* (3).

Теорема 1.1.4 усиливает результаты Сунга[4], Ху, Вебера[5], а также часть результатов Гапошкина[13]. Примеры, демонстрирующие оптимальность условий теоремы 1.1.4 при $b_n = n^\alpha \log^\beta n$ для стационарных рядов с заданной скоростью убывания ковариационной функции в случаях $(\alpha, \beta) = (1, 0)$ и $(\alpha, \beta) \in (1/2, 1) \times \mathbb{R}$, даны Гапошкиным[13]. Заметим также, что согласно известному результату Тандори[14], условие (2) является необходимым для сходимости ряда (4), когда рассматривается весь класс ортогональных последовательностей, для которых $\mathsf{E}X_n^2/b_n^2$ убывает по n.

Кроме перечисленного, в первой части главы 1 получено несколько вспомогательных моментных неравенств, представляющих самостоятельный интерес. Одно из них – обобщение известного неравенства Морица[15]. Для его формулировки нам понадобится следующее определение. Функция $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}_+$ называется *супераддитивной*, если

$$f(l, m) + f(m, n) \leqslant f(l, n), \quad l \leqslant m \leqslant n.$$

[13]Гапошкин В.Ф. Сходимость рядов, связанных со стационарными последовательностями, *Изв. АН СССР: сер. матем.*, 39:6, 1975, с. 1366–1392.

[14]Tandori K. Über die orthogonalen Funktionen I, *Acta Sci. Math. Hung.*, 18, 1957, pp. 57–130.

[15]Moricz F. A general moment inequality for the maximum of partial sums of single series, *Acta. Sci. Math.*, 44, 1982, pp. 67–75.

ТЕОРЕМА 1.1.1. *Пусть* $\bar{K}, K \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$, *причем* $\bar{K} \leqslant K$. *Пусть также* $p \geqslant 1$ *и* $p_k > 0$, $k = 1, \ldots, \bar{K}$. *Если для любых* $i < j \leqslant n$, *некоторых супераддитивных функций* f_k, g_k *и неубывающих функций* $h_k : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ *случайные величины* $\{S_i\}_{i=1}^n$ *таковы, что*

$$\mathsf{E}|S_j - S_i|^p \leqslant \sum_{k=1}^{\bar{K}} f_k(i,j) g_k(i,j)^{p_k} + \sum_{k=\bar{K}+1}^{K} f_k(i,j) h_k(j-i),$$

то

$$\begin{aligned} \mathsf{E} \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |S_i|^p \ &\leqslant \ (K\bar{K} + 2K)^{p-1} \sum_{k=1}^{\bar{K}} \frac{2^{p_k+p} f_k(1,n) g_k(1,n)^{p_k}}{(2^{p_k/p} - 1)^p} \\ &\quad + 2^p (K\bar{K} + 2K)^{p-1} \sum_{k=\bar{K}+1}^{K} f_k(1,n) H_k(n), \end{aligned}$$

где $H_k(n)$ *определено формулой* $H_k(n)^{1/p} = \sum_{i=0}^{[\log_2 n]} h_k\big(2^i\big)^{1/p}$.

Отметим, что Мориц рассматривал только пары вида $(K, \bar{K}) = (1, 0)$ и $(K, \bar{K}) = (1, 1)$. Он установил, что во многих случаях при данных $(K, \bar{K})$ приведённая моментная оценка дает верный порядок роста $\mathsf{E} \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |S_i|^p$, когда $n \to \infty$.

Во второй части главы 1 исследуются вопросы о сходимости п.н. сумм, образованных элементами случайного поля $\{X_{\mathbf{n}}\}_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d}$. Для компактного изложения полученных результатов положим $\langle \mathbf{x} \rangle = \prod_{i=1}^d (x_i \vee 1)$, $f(\mathbf{x}) = \big(f(x_1), ..., f(x_d)\big)$ для $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_d) \in \mathbb{R}_+^d$ и $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$. Зададим на $\mathbb{N}_0^d$ покомпонентную операцию сложения и естественный частичный порядок. Пусть $\mathbf{0} = (0, ..., 0) \in \mathbb{N}_0^d$, $\mathbf{1} = (1, ..., 1) \in \mathbb{N}_0^d$. Если $\mathbf{m}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^d$, то также определим $\mathbf{mn} = (m_1 n_1, ..., m_d n_d)$, $\|\mathbf{n}\| = \max\{n_1, ..., n_d\}$, $[\mathbf{m}, \mathbf{n}] = \{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^d | \mathbf{m} \leqslant \mathbf{k} \leqslant \mathbf{n}\}$ и $\sum_{\mathbf{k}=\mathbf{m}}^{\mathbf{n}} = \sum_{\mathbf{k} \in [\mathbf{m}, \mathbf{n}]}$. Далее запись $\mathbf{n} \to \infty$ означает, что $\min\{n_1, ..., n_d\} \to \infty$. В диссертационной работе доказано следующее обобщение расширенной теоремы Меньшова-Радемахера (см., например,[16]).

ТЕОРЕМА 1.2.1. *Пусть* $a_{\mathbf{n}} \geqslant 0$ *при всех* $\mathbf{n}$ *и*

$$\sum_{\mathbf{n} \geqslant \mathbf{1}} a_{\mathbf{n}}^2 \mathsf{E} X_{\mathbf{n}}^2 \langle \log \mathbf{n} \rangle^2 < \infty.$$

[16] Andrienko V.A. Rate of approximation by rectangular partial sums of double orthogonal series, *Analysis Math.*, 22:4, 1996, 243–266.

Тогда для п.н. сходимости ряда $\sum_{\mathbf{n}\geqslant\mathbf{1}} a_{\mathbf{n}}X_{\mathbf{n}}$ *достаточно, чтобы для некоторой неубывающей* φ *с* $\sum_{n\geqslant 1} 1/\varphi(n) < \infty$ *при всех* $\varepsilon \in [\mathbf{0},\mathbf{1}]$

$$\sum_{\mathbf{n}\geqslant\mathbf{1}} W(\mathbf{n},\varepsilon)\big\langle\varphi(\log\varepsilon\mathbf{n})\big\rangle a_{\mathbf{n}}^2 < \infty, \tag{5}$$

где

$$W(\mathbf{n},\varepsilon)^{1/2} = \sum_{\mathbf{m}=\varepsilon[\log\mathbf{n}]}^{[\log\mathbf{n}]} \left(\sum_{\mathbf{k}=\mathbf{0}}^{2^{\mathbf{m}}} \rho_{\mathbf{k}},\right)^{1/2},\ \rho_{\mathbf{k}} = \sup_{\mathbf{m},\mathbf{n}:|\mathbf{m}-\mathbf{n}|=\mathbf{k}} \big(\mathsf{E}X_{\mathbf{m}}X_{\mathbf{n}}\big)^{+}.$$

Приведем также новый вариант усиленного ЗБЧ, охватывающий результат Серфлинга[17] при $d = 1$ и часть результатов Морица[18] при $d > 1$.

ТЕОРЕМА 1.2.2. *Пусть* $b_{\mathbf{n}}$ *не убывает по* $\mathbf{n}$, $b_{\mathbf{n}} > 0$ *и*

$$\sum_{\mathbf{m}:\,2^{\mathbf{m}}\geqslant\mathbf{n}} \frac{b_{\mathbf{n}}^2}{b_{2^{\mathbf{m}}}^2} = O\big(\langle\log\mathbf{n}\rangle^2\big),\quad \|\mathbf{n}\| \to \infty.$$

Предположим также, что

$$\sum_{\mathbf{n}\geqslant\mathbf{0}} \sum_{\mathbf{k}=2^{\mathbf{n}}}^{2^{\mathbf{n}+\mathbf{1}}-\mathbf{1}} \frac{\mathsf{E}X_{\mathbf{k}}^2}{b_{2^{\mathbf{n}}}^2}\langle\mathbf{n}\rangle^2 < \infty$$

и для некоторой неубывающей φ, *имеющей* $\sum_{n\geqslant 1} 1/\varphi(n) < \infty$, *при всех* $\varepsilon \in [\mathbf{0},\mathbf{1}] \setminus \{\mathbf{1}\}$ *выполнено* (5), *где* $a_{\mathbf{n}}$ *заменено на* $1/b_{\mathbf{n}}$. *Если при этом* $W(\mathbf{n},\mathbf{1})\big\langle\varphi(\log\mathbf{n})\big\rangle/b_{\mathbf{n}}^2$ *не возрастает по* $\mathbf{n}$, *то* $\sum_{\mathbf{k}=\mathbf{1}}^{\mathbf{n}} X_{\mathbf{k}}/b_{\mathbf{n}} \to 0$ *п.н., когда* $\|\mathbf{n}\| \to \infty$.

В главе 2 изучаются дискретные стохастические интегралы, которые определяются следующим образом. Пусть $U = \{U(t), t \in [a,b]\}$ и $V = \{V(t), t \in [a,b]\}$ – действительные случайные процессы. Пусть также T – конечное непустое подмножество отрезка $[a,b]$. Упорядочив точки T по возрастанию $t_1 < t_2 < \ldots < t_{|T|}$, зададим дискретный интеграл формулой

$$\int_T U dV = \sum_{i=2}^{|T|} U(t_{i-1})[V(t_i) - V(t_{i-1})], \tag{6}$$

[17] Серфлинг Р. Об усиленном законе больших чисел и близких результатах для квазистационарных последовательностей, *Теория вероятн. и ее примен.*, 25:1, 1980, 190–194.

[18] Moricz F. Strong laws of large numbers for quasi-stationary random fields, *Z. Wahrsch. Verw. Gebeite*, 51:3, 1980, 249–268.

здесь и далее сумма по пустому множеству равна нулю.

Введем основное ограничение на нормы приращений процессов U и V, которое позволит сформулировать главные результаты этой главы. Рассмотрим функцию $f : [a,b]^2 \to \mathbb{R}_+$ со следующими свойствами: $f(x,x) = 0$; $f(x,y)$ не убывает по y на $[x,b]$ и не возрастает по x на $[a,y]$; f симметрична, т.е. $f(x,y) = f(y,x)$ при всех x,y. Допустим, что выполнено неравенство

$$\|[U(z) - U(x)] \cdot [V(y) - V(z)]\| \leqslant f(x,y), \quad x \leqslant z \leqslant y, \tag{7}$$

где $\|\cdot\|$ – некоторая фиксированная норма, заданная на случайных величинах и приводящая к полному пространству. Первый результат главы 2 представляет

ТЕОРЕМА 2.1.1. *Пусть* (7) *выполнено при всех* $x,y,z \in T$. *Тогда*

$$\Big\| \int_T [U - U(t_1)] dV \Big\| \leqslant 4 H_{f \mathbf{1}_{D(T)}}(t_1, t_{|T|}), \tag{8}$$

где норма $\|\cdot\|$ *использована в* (7),

$$H_g(c,d) = \iint_{[c,d]^2} \frac{g(x,y)}{(x-y)^2}\, dxdy + \int_c^d \frac{g(c,y)}{y-c}\, dy + \int_c^d \frac{g(x,d)}{d-x}\, dx + g(c,d),$$

а множество $D(T)$ *состоит из всех* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, *для которых отрезок с концами* x,y *содержит более одной точки* T.

Отметим, что в теореме 2.1.1 впервые оценка интегральных сумм Римана-Стилтьеса дана с учетом взаимодействия интегранда и интегратора. В диссертации построены примеры гауссовских процессов U и V, демонстрирующие оптимальный характер оценки (8) для $f(x,y) = |x-y|^\lambda$ при $\lambda > 0$, когда мощность множества T растет. Важным следствием теоремы 2.1.1 являются новые условия существования форвардного интеграла $\int_a^b U dV$.

ТЕОРЕМА 2.1.2. *Допустим, что* (7) *справедливо для всех* $x,y,z \in [a,b]$. *Если величина* $H_f(a,b)$ *конечна, то существует* $\int_a^b U dV$, *причем*

$$\Big\| \int_a^b U dV - \int_T U dV \Big\| \leqslant 4 \sum_{i=2}^{|T|} H_f(t_{i-1}, t_i).$$

В диссертации показано, как теорема 2.1.2 позволяет расширить классические условия Янга[19] существования интеграла Римана-Стилтьеса для функций ограниченной φ-вариации. Она также дает возможность задать ряд стохастических интегралов, возникающих в немартингальных моделях рынка акций[20].

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.1.2. *Пусть* $F(u) = \int_{\mathbb{R}} \rho(v)\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(u-v)\mu(dv)$ *для некоторой меры* μ *на* $\mathbb{R}$ *и измеримой функции* $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, а* G *такова, что при всех* $p \geqslant 1$ *найдется* $C_p > 0$*, для которого*

$$\|G(B_{\mathbb{H}}(t)) - G(B_{\mathbb{H}}(s))\|_p \leqslant C_p\|B_{\mathbb{H}}(t) - B_{\mathbb{H}}(s)\|_p, \quad s, t \in [a, b] \subset \mathbb{R}_+,$$

здесь $B_{\mathbb{H}}$ *– фрактальное броуновское движение с параметром Харста* $\mathbb{H} > 1/2$*. Если при этом* $\int_{\mathbb{R}} |\rho(v)|(1 + |v|)\mu(dv) < \infty$*, то существует интеграл Римана-Стилтьеса* $\int_a^b F(B_{\mathbb{H}})dG(B_{\mathbb{H}})$ *как предел в* L_1*.*

Подобные результаты представляют интерес, поскольку согласно статье[20] интерпретация справедливых цен опционов, расчитанных с помощью других абстрактных стохастических интегралов, затруднена.

Вторая часть главы 2 посвящена ЗБЧ для дискретных интегралов, устанавливаемых на основе ЗБЧ для мартингал-разностей и оценки (8). В диссертации доказано несколько новых вариантов ЗБЧ для мартингал-разностей. Отметим один из них, дополняющий результат Холла[21]. Прежде введем класс $\mathcal{G}_p$, состоящий из гладких выпуклых возрастающих функции $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ с $g(0) = 0$, для которых $g\big(\sqrt{x}\,\big)$ вогнута по x и $g(x)/x^p$ убывает к нулю при $x \to \infty$. Будем также называть семейство $\{X_{in}\} = \{X_{in} : 1 \leqslant i \leqslant k_n,\, n \in \mathbb{N}\}$ МР-массивом, если X_{in} образуют мартингал-разность (по отношению к естественной фильтрации) по i при каждом фиксированном n.

ТЕОРЕМА 2.2.2. *Пусть* $\{X_{in}\}$ *– МР-массив, удовлетворяющий*

$$\sup_n \sum\nolimits_i \mathsf{E}|X_{in}|^p = M < \infty \quad \text{для некоторого } p \in (1, 2), \tag{9}$$

[19] Young L.C. General inequalities for Stieltjes integrals and the convergence of Fourier series, *Math. Ann.*, 115, 1938, pp. 581–612.

[20] Azmoodeh E., Mishura Y., Valkeila E. On hedging European options in geometric fractional Brownian motion market model, *Statistics&Decisions*, 27:2, 2009, pp. 129–143.

[21] Hall P. On the L_p convergence of sums of independent random, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 82, 1977, pp. 439–446.

где суммирование ведется по всем $i \leqslant k_n$. *Тогда для сходимости*

$$\lim_n \mathsf{E} g\Big(\Big|\sum\nolimits_i X_{in}\Big|\Big) = 0 \tag{10}$$

при любой $g \in \mathcal{G}_p$ *достаточно, чтобы для всех* $\varepsilon > 0$

$$\lim_n \sum\nolimits_i \mathsf{P}(|X_{in}| > \varepsilon) = 0. \tag{11}$$

Если при этом X_{in} *независимы по* i *при каждом фиксированном* n, *то* (10) *влечет* (11). *Более того, данные утверждения будут справедливы при замене условия* (9) *на*

$$\sup_n \sup_{x>0} \sum\nolimits_i x^p \, \mathsf{P}(|X_{in}| > x) < \infty, \tag{12}$$

если в качестве $g \in \mathcal{G}_p$ *брать функции, имеющие* $\int_1^\infty g(x)\dfrac{dx}{x^{p+1}} < \infty$.

Прежде чем сформулировать ЗБЧ для дискретных интегралов, определим τ-коэффициенты зависимости, обобщающие коэффициенты сильного перемешивания[22]. Для интегрируемой случайной величины ξ и σ-алгебры $\mathcal{A}$ положим

$$\tau(\xi, \mathcal{A}) = \mathsf{E} \sup_f \big|\mathsf{E}\big[f(\xi)|\mathcal{A}\big] - \mathsf{E} f(\xi)\big|,$$

где верхняя грань берется по всем функциям f с константой Липшица не большей 1.

Как и ранее, будем предполагать, что для некоторого $p > 1$ процессы U и V удовлетворяют неравенству (7). Положим

$$I = \int_T U dV, \quad F_T(a,b) = H_{f\mathbf{1}_{D(T)}}(a,b),$$

где $D(T)$ и H фигурируют в теореме 2.1.1. Пусть далее

$$\Delta_{ij} = \int_{T\cap[t_i,t_j]} U dV, \quad 1 \leqslant i < j \leqslant |T|.$$

Фиксируем σ-алгебры $\mathcal{F}_k = \sigma\big(\Delta_{ij},\ i < j \leqslant k\big)$ и для $m < |T|$ зададим

$$\tau_m = \sup\left\{\tau\left(\frac{\Delta_{ij}}{\|\Delta_{ij}\|_p}, \mathcal{F}_k\right) :\ k + m \leqslant i < j\right\},$$

[22] Dedecker J., Prieur C. Coupling for τ-dependent sequences and applications, *Journal of Theoretical Probability*, 17, 2004, pp. 861–885.

$$\Gamma_m = \max\Big\{\|U(t_i)\cdot[V(t_j)-V(t_i)]\|_p : \, i<j\leqslant i+m\Big\}.$$

ТЕОРЕМА 2.2.3. *Пусть $I^{(n)} = \int_{T^{(n)}} U^{(n)} dV^{(n)}$, $n \geqslant 1$, – последовательность дискретных интегралов с $|T^{(n)}| = n$. Предположим, что для некоторых $1 \leqslant q < p < 2$ справедливо равенство $\tau_m^{(n)} = o\big((m/n)^{1-1/q}\big)$ при $m < n$, $m, n \to \infty$. Тогда*

$$\frac{\mathsf{E}|I^{(n)} - \mathsf{E}I^{(n)}|}{\big(B_m^{(n)}\big)^{1/q}} \to 0, \quad m, n \to \infty, \tag{13}$$

для любых $B_m^{(n)}$, удовлетворяющих соотношениям

$$\sum_k F_{T^{(n)}}\big(t_{km+1}^{(n)}, t_{(km+m+1)\wedge n}^{(n)}\big)^q + \frac{n\big(\Gamma_m^{(n)}\big)^q}{m} = O(B_m^{(n)}),$$

$$\max_k F_{T^{(n)}}\big(t_{km+1}^{(n)}, t_{(km+m+1)\wedge n}^{(n)}\big)^q + \big(\Gamma_m^{(n)}\big)^q = o(B_m^{(n)}),$$

где суммирование и максимизация ведутся по всем индексам k, для которых определены точки $t_{km+1}^{(n)}, t_{(km+m+1)\wedge n}^{(n)}$.

Таким образом, впервые установлен ЗБЧ для дискретных интегралов, поскольку (13) влечет сходимость вида

$$\frac{I^{(n)} - \mathsf{E}I^{(n)}}{\big(B_m^{(n)}\big)^{1/q}} \xrightarrow{\mathsf{P}} 0.$$

Применение теоремы 2.2.3 демонстрируется в третьей части главы 2 на примере задачи отбора наилучшей (в смысле заданной функции потерь) модели исследуемого временного ряда.

В главе 3 устанавливаются новые оценки скорости сходимости в ЗБЧ в рамках общей модели эпидемий, предложенной Рейнерт[9]. Модель описывается следующим образом. Пусть имеется население численностью n. В нулевой момент an человек заражено некоторой инфекцией, где $a \in (0,1)$. Оставшиеся люди здоровы, однако могут заболеть в будущем. Индивид i, инфицированный в момент $t=0$, выздоравливает через случайное время $\hat{r}_i$. Развитие заболевания для индивида j, неинфицированного в момент $t=0$, зависит от его физических данных, доли $I_n(t)$ больных людей в населении в момент t и некоторого функционала $\lambda : \mathbb{R}_+ \times D_+ \to \mathbb{R}_+$, показывающего падение иммунитета. Здесь D_+

состоит из функций $x : \mathbb{R}_+ \to [-1, 1]$ непрерывных справа с конечным пределом слева. А именно, j заболевает в момент A_j^n, когда уровень падения иммунитета достигает индивидуального критического значения l_j:

$$A_j^n = \inf\Big\{t \geqslant 0 : \int_0^t \lambda(s, I_n) ds = l_j\Big\}. \tag{14}$$

Процесс излечения j занимает время r_j. Выздоровевший человек больше не заболевает. Предполагается, что указанные величины удовлетворяют следующим условиям:
1°. семейства $\{\hat{r}_i\}_{i=1}^{an}$ и $\{(l_j, r_j)\}_{j=1}^{bn}$ независимы и состоят из независимых одинаково распределенных случайных элементов;
2°. функции распределения величин $\hat{r}_1$, r_1, l_1 равны соответственно $\hat{\Phi}$, Φ, Ψ, причем $\hat{\Phi}(0) = \Phi(0) = \Psi(0) = 0$;
3°. существует абсолютно непрерывное условное распределение

$$\Psi_u(t) = \mathsf{P}(l_1 \leqslant t \,|\, r_1 = u) = \int_0^t \psi_u(s)\, ds, \quad u, t \geqslant 0,$$

такое, что $\sup_{u,t\geqslant 0} |\psi_u(t)| = \beta < \infty$.

Условие 1° отражает однородность рассматриваемого населения, а 2° гарантирует, что зараженный индивид не излечивается мгновенно.

Пусть для всех $t \geqslant 0$, $x, y \in D_+$ выполнены следующие ограничения:
1. $\lambda(t, x) = \lambda(t, x(\cdot \wedge t))$,
2. $|\lambda(t, x) - \lambda(t, y)| \leqslant L\|x - y\|_{C[0,t]}$ для некоторой константы $L > 0$,
3. $\|\lambda(\cdot, x)\|_{C(\mathbb{R}_+)} \leqslant 1$,
4. $\lambda(t, x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x(t) = 0$.

В качестве основной характеристики, описывающей средний путь развития эпидемии, берётся эмпирическая мера

$$\xi_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{an} \delta_{(0,\hat{r}_i)} + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{(1-a)n} \delta_{(A_j^n, A_j^n + r_j)}, \tag{15}$$

где δ_z – мера Дирака, сосредоточенная в точке z.

Рейнерт[9] найден предел среднего поля μ меры ξ_n, заданный системой функциональных уравнений. В главе 3 установлены новые оценки близости ξ к μ на конечном временном интервале $[0, T]$, уточняющие результат[10]. Полученные оценки даны в терминах идеальных метрик по некоторому классу функций $\mathcal{F}$, определяющим слабую сходимость в пространстве случайных мер (см.[10]). Приведем одну из этих оценок.

ТЕОРЕМА 3.4.1. *Пусть выполнены условия* 1°, 2° *и* 3°. *Если, кроме того,* λ *удовлетворяет* 1–4, *то для каждого* $T > 0$

$$\sup_{F\in\mathcal{F}} |\mathsf{E}F(\xi_n^T) - F(\mu^T)| \leqslant \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{n}} + L\beta b S(n) \int_0^T h_0(T-u)\,\Phi(du),$$

где $\nu^T = \nu\big(\,\cdot \cap [0,T]^2\big)$, $h_0(t) = h_1(t, L\beta b(1+\Phi(t)))$,

$$h_1(t,q) = (e^{qt}-1-qt)/q^2 - (e^{qt}-1)/q,$$

$$S(n) = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} + \left\{\frac{5\sqrt{b}}{\sqrt{n}} + (0.4+2\beta)\sqrt[3]{b^2}\left(\frac{T}{n}\right)^{1/3}\right\} \vee \frac{\sqrt{b}(7\sqrt{7}\beta+2)}{\sqrt{n}}.$$

Доказанное неравенство заслуживает внимания в том случае, когда его правая часть мала, т.е. когда T порядка $\ln n$. Если функционал λ удовлетворяет более ограничительному условию липшицевости, то справедливо усиление этого результата с существенно большим порядком роста T при $n \to \infty$.

Рассматриваемая модель допускает дальнейшее обобщение, например, относящееся к учету локального взаимодействия индивидов. Для исследования обобщений такого рода потребуется сочетать различные методы, в частности, теорию эмпирических процессов и технику стабилизирующих функционалов, примененную в статье[23].

Автор очень благодарен своему научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору Александру Вадимовичу Булинскому за постановку задач и неоценимую помощь в работе, а также доценту А.П.Шашкину за ряд конструктивных замечаний.

[23] Мусин М.М. Закон повторного логарифма для сумм экспоненциально стабилизирующихся функционалов, *Матем. заметки*, 85:2, 2009, с. 234—245.

Работы автора по теме диссертации

[1] Яськов П.А. Об одном обощении теоремы Меньшова-Радемахера, *Матем. заметки*, 86:6, 2009, с. 925-937.

[2] Яськов П.А. Оценка скорости сходимости в слабом законе больших чисел для процессов эпидемий, *Теория вероятн. и ее примен.*, 54:3, 2009, с. 533-550.

[3] Яськов П.А. Сильная сходимость кратных сумм неортогональных случайных величин, *Теория вероятн. и ее примен.*, 55:2, 2010, с. 382-386.

[4] Яськов П.А. Некоторые оценки норм дискретных стохастических интегралов. *ДАН*: *Математика*, 432:3, 2010, с. 322-325.

[5] Яськов П.А. Тестирование предсказательной способности при наличии структурных сдвигов, *Квантиль*, 8, 2010, с. 127-136.

[6] Яськов П.А. Новый подход к оценке предсказательной способности моделей реальных данных, *Тезисы докладов секции «Математика и механика» конференции «Ломоносов-2009»*, Москва, 2009, с. 79.

[7] Yaskov P.A. On the mean-field approximation for a certain class of epidemic processes, *Stochastic analysis and random dynamics (Lviv, 14-20 June, 2009)*, Abstracts, pp. 265-266.