МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи
УДК 519.71

Лялин Илья Викторович

ОБ УСЛОВИЯХ РАЗРЕШИМОСТИ

АВТОМАТНЫХ УРАВНЕНИЙ

01.01.09 - дискретная математика и математическая кибернетика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

МОСКВА - 2011

Работа выполнена на кафедре Математической теории интеллектуальных систем Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор
Буевич Вячеслав Александрович

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук, профессор
Гашков Сергей Борисович
кандидат физико-математических наук, доцент
Лавров Игорь Андреевич

Ведущая организация – Московский энергетический институт
(технический университет)

Защита диссертации состоится 21 января 2011 года в 16^{45} часов на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 при Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова по адресу: РФ, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, МГУ, Главное здание, механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 21 декабря 2011 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д.501.001.84 при МГУ
доктор физико-математических наук,
профессор

А.О. Иванов

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Вот уже несколько десятилетий происходит постоянный рост сложности интегральных схем. Путем синтеза из простейших элементов, таких как логические функции и задержки, создаются все более сложные системы, являющиеся по сути автоматными схемами. Современные интегральные схемы могут содержать миллиарды логических элементов. При этом на первый план выходит задача синтеза интегральной схемы. Когда известен автомат, который должна реализовать интегральная схема, и требуется этот автомат "собрать" из простейших элементов. В этой области могут оказаться полезными результаты работы, решающие задачу синтеза (построения) недостающего участка автоматных схем так, чтобы вся схема функционировала требуемым образом.

Цель работы

Рассматривается задача решения автоматных уравнений, которая заключается в следующем. Есть автоматная схема, некоторые автоматы которой можно заменять на другие автоматы. Требуется определить, можно ли произвести такую замену, чтобы схема стала эквивалентна некоторому заранее заданному автомату.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения и 3 глав. Объем диссертации 84 страниц. Список литературы содержит 15 наименований.

Научная новизна

Задача была впервые поставлена в общем случае академиком В.Б. Кудрявцевым[1]. Частный случай решаемой задачи был рассмотрен А.К. Григоряном[2,3]. В этих работах решаются автоматные уравнения с одной неизвестной для 4 видов схем. Позже А.С. Подколзин и Ш.М. Ушчумлич[4] ввели понятие автоматного

[1] Кудрявцев В.Б. *Функциональные системы.* Издательство Московского Университета, Москва, 1982

[2] Григорян А.К. *Метод декомпозиции конечных автоматов.* Автоматика и Телемеханика, №5, 1968

[3] Григорян А.К. *Метод декомпозиции конечных автоматов с выделением выходного и входного автоматов.* Автоматика и Телемеханика, №10, 1968

[4] Подколзин А.С., Ушчумлич Ш.М. *О решении систем автоматных уравнений.* Дискретная Математика, том 2 выпуск 1, 1990

уравнения, отличное от понятия автоматного уравнения, рассматриваемого в этой работе, и описали алгоритм, перечисляющий все решения такого уравнения с одной неизвестной. Кроме того, Н.В. Евтушенко в своих работах[5,6,7] рассматривала автоматные уравнения для разных классов языков, в том числе и для недетерминированных автоматов и получила необходимое условие для недетерминированного автомата, чтобы он был решением уравнения.

В работе впервые решается задача нахождения всех решений произвольного автоматного уравнения для одного неизвестного. Впервые рассматриваются уравнения с более чем одной неизвестной. Доказывается неразрешимость пролемы существования решения уравнений с более чем одной неизвестной.

Основные методы исследования

В работе используются методы теории автоматов, теории графов и теории алгоритмов.

Теоретическая и практическая ценность работы

Работа носит теоретический характер. Результаты работы могут оказаться полезными для теории автоматов, а также могут быть использованы при проектировании интегральных схем.

Апробация работы

Результаты настоящей работы докладывались на семинаре "Теория автоматов" под руководством академика, проф., д.ф.-м.н. В.Б. Кудрявцева (2005, 2010), на XIII Международной конференции по проблемам теоретической кибернетики (Казань 2002), на XIV Международной конференции по проблемам теоретической кибернетики (Пенза 2005), VII Международной конференции "Дискретные модели в теории управляющих систем"(Москва 2006), на конференции "Ломоносовские чтения"(Москва 2007), на конференции "Дискретная математика и её приложения"(Москва 2010), а также на семинарах механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова: на семинаре "Математические вопросы кибернетики" под руководством академика РАН, проф., д.ф.-м.н. О.Б.

[5]Евтушенко Н., Вилла Т., Петренко А., Брайтон Р., Санджованни-Винцентелли А. *Решение уравнений в логическом синтезе. Препринт.* Издательство "Спектр ИОА СО РАН, Томск,1999

[6]N.Yevtushenko, T.Villa, R.Brayton, A.Petrenko, A.Sangiovani-Vincentelli. *Synthesis by language equation solving: exended abstract.* Proceedings of Annual Intern.worjshop on Logic Synthesis, pp. 11-14, USA, 2000

[7]N.Yevtushenko, T.Villa. R.K.Brayton, A.Petrenko, A.Sangiovanni-Vincentelli. *Solving a parallel language equation.* Proceedings of the ICCAD'01, pp. 103-1109, USA, 2001

Лупанова (2005), на семинаре "Вопросы сложности алгоритмов поиска" под руководством проф., д.ф.-м.н. Э.Э. Гасанова (2010).

Публикации по теме диссертации

По теме диссертации опубликованы 8 печатных работ [1-8].

Краткое содержание работы

Алфавит $\{0, \ldots, k-1\}$ будем обозначать E_k.

Пусть A – произвольный конечный алфавит. Обозначим A^* множество всех слов, а A^∞ – множество всех сверхслов над данным алфавитом.

Пусть $a, b \in A^*$, тогда $|a|$ будем обозначать длину слова a, а ab – конкатенация этих слов.

Функция $f : A^* \to B^*$ называется детерминированной, если она удовлетворяет следующим условиям.

1) Если $a \in A^*$, то $|f(a)| = |a|$.

2) Пусть $\alpha_1 = a(1) \ldots a(k)$ и $\alpha_2 = a'(1) \ldots a'(k)$, $f(\alpha_1) = b(1) \ldots b(k)$ и $f(\alpha_2) = b'(1) \ldots b'(k)$. И пусть при всех s, $1 \le s \le k$, если $a(1) = a'(1), \ldots, a(s) = a'(s)$, то $b(1) = b'(1), \ldots, b(s) = b'(s)$.

Детерминированная функция $g : A^* \to B^*$ называется частичной для детерминированной функции $f : A^* \to B^*$, если существует такое $\gamma \in A^*$, что для любого слова $\alpha \in A^*$ $f(\gamma\alpha) = f(\gamma)g(\alpha)$.

Детерминированная функция называется ограниченно–детерминированной, или о.-д. функцией, если она имеет конечное множество частичных функций.

Детерминированным автоматом (ДА, или просто *автоматом*) называется шестерка
$\langle A, Q, B, \phi, \psi, q^0 \rangle$, где:

A – конечный входной алфавит;

B – конечный выходной алфавит;

Q – конечное множество состояний;

$\phi : Q \times A \to Q$ – *функция переходов*;

$\psi : Q \times A \to B$ – *функция выходов*;

$q^0 \in Q$ – начальное состояние.

В случае, когда $A = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$, будем говорить, что автомат имеет n *входов* и алфавит i-ого входа – A_i.

В случае, когда $B = B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_m$, будем говорить, что автомат имеет m *выходов* и алфавит i-ого выхода – B_i. При этом функция выходов $\psi : Q \times A \to B$ разбивается на m функций выходов $\psi_i : Q \times A \to B_i$, $1 \le i \le m$ следующим образом. Если для некоторых, $q \in Q$ и $a \in A$ $\psi(q,a) = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$, то $\psi_i(q,a) = b_i$. То есть $\psi = \psi_1 \times \psi_2 \times \ldots \times \psi_m$.

Множество автоматов с входным алфавитом A и выходным B обозначим $P(A,B)$.

Обозначим $\mathbb{P}$ множество всех таких автоматов, каждый вход и выход которого имеет алфавит E_k, где k – некоторое натуральное число, для каждого входа или выхода своё.

Пусть здесь и далее $v = \langle A, Q, B, \phi, \psi, q^0 \rangle$ – детерминированный автомат.

Обозначим $\Phi : A^* \to Q$ функцию, возвращающую состояние $\Phi(\alpha)$, в котором окажется автомат v, если на вход ему подать слово α. Более строго:

1) $\Phi(\Lambda) = q^0$, где Λ – пустое слово;

2) $\Phi(a(1)\ldots a(n-1)a(n)) = \phi(\Phi(a(1)\ldots a(n-1)), a(n))$.

Обозначим $\Phi^* : A^* \to Q^*$ функцию, возвращающую последовательность состояний $\Phi^*(\alpha)$, через которые проходит автомат v, если на вход ему подать слово α. Более строго:

1) $\Phi^*(\Lambda) = q^0$, где Λ – пустое слово;

2) $\Phi^*(a(1)\ldots a(n-1)a(n)) = \Phi^*(a(1)\ldots a(n-1))\Phi(a(1)\ldots a(n))$.

Обозначим $\Psi : A^* \to B$ функцию, возвращающую последнюю букву $\Psi(\alpha)$, выданную на выходе автомата v, если на вход ему подать слово α. Более строго:

$$\Psi(a(1)\ldots a(n-1)a(n)) = \psi(\Phi(a(1)\ldots a(n-1)), a(n)).$$

Обозначим $\Psi^* : A^* \to B^*$ функцию, возвращающую выходную последовательность $\Psi^*(\alpha)$, выданную на выходе автомата v, если на вход ему подать слово α. Более строго:

1) $\Psi^*(\Lambda) = \Lambda$, где Λ – пустое слово;

2) $\Psi^*(a(1)\ldots a(n-1)a(n)) = \Psi^*(a(1)\ldots a(n-1))\Psi(a(1)\ldots a(n))$.

Функцию Ψ^* будем называть функцией автомата v.

В книге[8] доказывается, что функция любого автомата всегда является о.-д. функцией, и наоборот: для любой о.-д. функции существует автомат, функцией которого она является.

Два автомата называются *эквивалентными*, если их автоматные функции совпадают.

Определим некоторые элементарные операции над автоматами, с помощью которых будут строиться автоматные схемы:

Операцией *добавления фиктивного входа* (см. рис. 1) будем называть функцию, отображающую множество $P(A,B)$ во множество $P(A \times A', B)$, такую

[8]Кудрявцев В.Б., Алешин С.В., Подколзин А.С. *Введение в теорию автоматов.* Издательство "Наука Москва, 1985

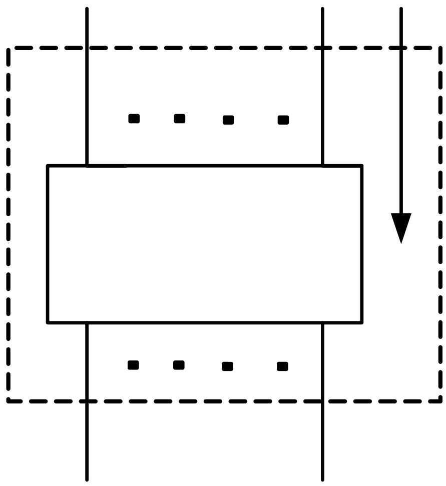

Рис. 1:

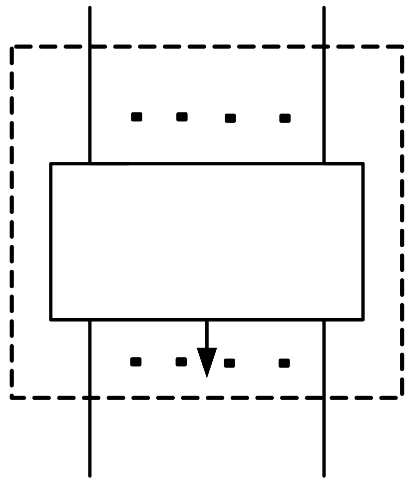

Рис. 2:

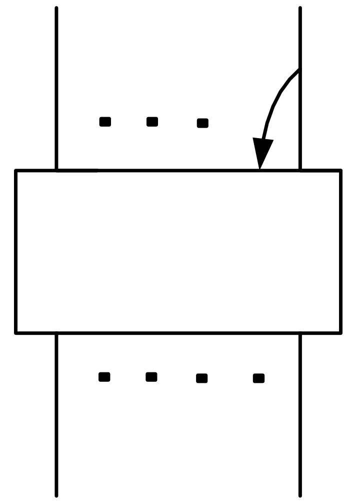

Рис. 3:

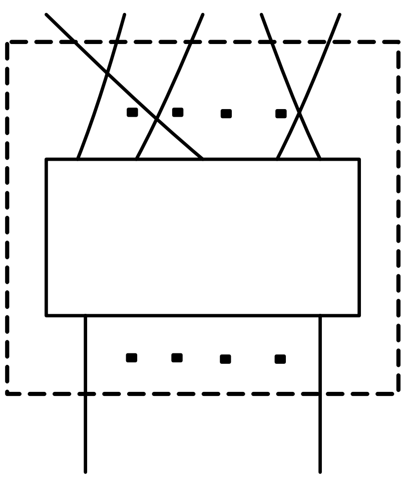

Рис. 4:

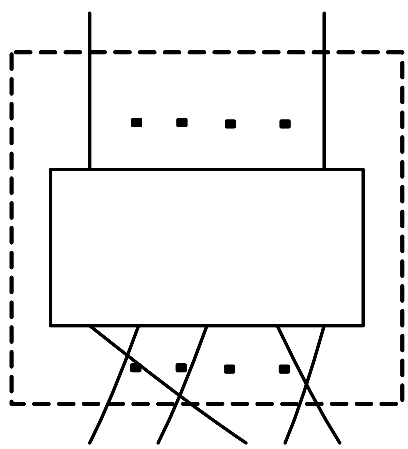

Рис. 5:

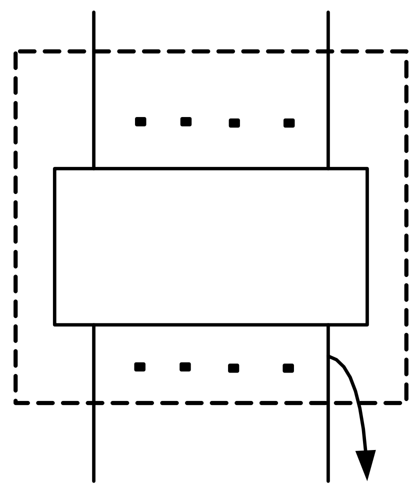

Рис. 6:

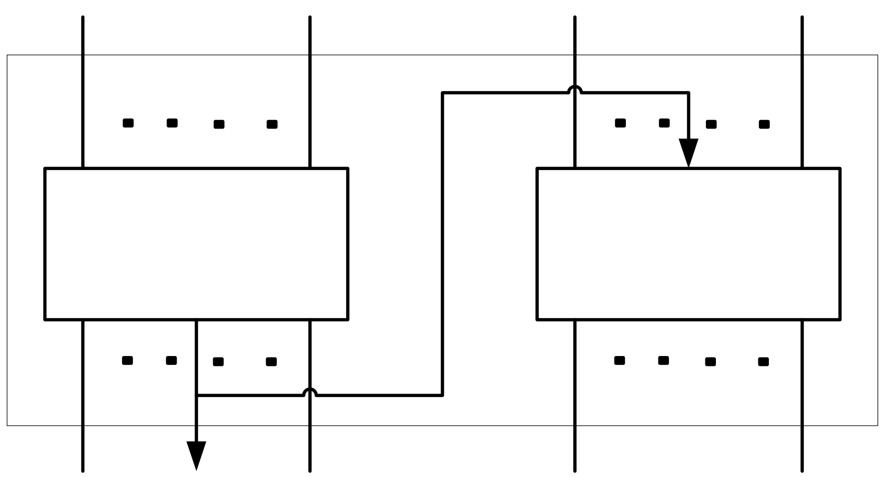

Рис. 7:

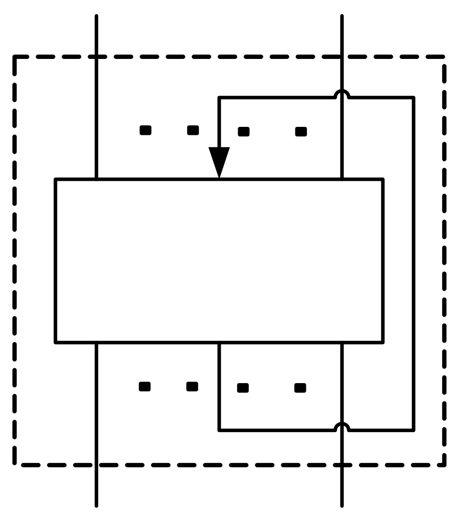

Рис. 8:

что произвольный автомат $v = \langle A, Q, B, \phi, \psi, q^0 \rangle$ переходит в автомат $v' = \langle A \times A', Q, B, \phi', \psi', q^0 \rangle$, такой что для всех $q \in Q$, $a \in A$ и $a' \in A'$ выполняется:

$$\phi'(q, (a, a')) = \phi(q, a);$$

$$\psi'(q, (a, a')) = \psi(q, a).$$

Таким образом, операция добавления фиктивного входа просто добавляет ещё один вход к автомату, при этом новый вход становится несущественным. Обозначается данная операция 1_Σ.

Операцией *изъятия выхода* (см. рис. 2) будем называть функцию, отображающую множество $P(A, B \times B')$ во множество $P(A, B)$, такую что произвольный автомат $v = \langle A, Q, B_1 \times \ldots \times B_m, \phi, \psi, q^0 \rangle$ переходит в автомат $v' = \langle A, Q, B_1 \times \ldots \times B_{m-1}, \phi, \psi', q^0 \rangle$, такой что для всех $q \in Q$, $a \in A$ и $1 \le i \le m-1$ выполняется:

$$\psi'_i(q, a) = \psi_i(q, a).$$

Таким образом, операция изъятия выхода просто игнорирует последний выход автомата. Обозначается данная операция 2_Σ.

Пусть $A_{n-1} = A_n$. Операцией *склеивания входов* (см. рис. 3) будем называть функцию, отображающую множество $P(A_1 \times \ldots \times A_{n-1} \times A_n, B)$ во множество $P(A_1 \times \ldots \times A_{n-1}, B)$, такую что произвольный автомат $v = \langle A_1 \times \ldots \times A_{n-1} \times A_n, Q, B, \phi, \psi, q^0 \rangle$ переходит в автомат $v' = \langle A_1 \times \ldots \times A_{n-1}, Q, B, \phi', \psi', q^0 \rangle$, такой что для всех $q \in Q$ и $a_i \in A_i$ выполняется:

$$\phi'(q, (a_1, \ldots, a_{n-1})) = \phi(q, (a_1, \ldots, a_{n-1}, a_{n-1}));$$

$$\psi'(q, (a_1, \ldots, a_{n-1})) = \psi(q, (a_1, \ldots, a_{n-1}, a_{n-1})).$$

Обозначается данная операция 3_Σ.

Пусть $i_1, \ldots, i_n$ – произвольная перестановка элементов множества $\{1, \ldots, n\}$. Операцией *переименования входов* (см. рис. 4) будем называть функцию, отображающую множество $P(A_{i_1} \times \ldots \times A_{i_n}, B)$ во множество $P(A_1 \times \ldots \times A_n, B)$, такую что произвольный автомат $v = \langle A_{i_1} \times \ldots \times A_{i_n}, Q, B, \phi, \psi, q^0 \rangle$ переходит в автомат $v' = \langle A_1 \times \ldots \times A_n, Q, B, \phi', \psi', q^0 \rangle$, такой что для всех $q \in Q$, $a_i \in A_i$ выполняется:

$$\phi'(q, (a_1, \ldots, a_n)) = \phi(q, (a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}));$$

$$\psi'(q, (a_1, \ldots, a_n)) = \psi(q, (a_{i_1}, \ldots, a_{i_n})).$$

Обозначается данная операция 4_Σ, $v' = 4_\Sigma(v, i_1, \ldots, i_n)$.

Пусть $j_1, \ldots, j_m$ – произвольная перестановка элементов множества $\{1, \ldots, m\}$. Операцией *переименования выходов* (см. рис. 5) будем называть функцию, отображающую множество $P(A, B_{i_1} \times \ldots \times B_{i_m})$ во множество $P(A, B_1 \times \ldots \times B_m)$, такую что произвольный автомат $v = \langle A, Q, B_{i_1} \times \ldots \times B_{i_m}, \phi, \psi, q^0 \rangle$ переходит в автомат $v' = \langle A, Q, B_1 \times \ldots \times B_m, \phi, \psi', q^0 \rangle$, такой что для всех $q \in Q$, $a \in A$ и $1 \leq k \leq m$ выполняется:

$$\psi'_k(q, a) = \psi_{i_k}(q, a).$$

Обозначается данная операция 5_Σ, $v' = 5_\Sigma(v, j_1, \ldots, j_m)$.

Операцией *расщепления выхода* (см. рис. 6) будем называть функцию, отображающую множество $P(A, B_1 \times \ldots \times B_m)$ во множество $P(A, B_1 \times \ldots \times B_m \times B_{m+1})$, такую что произвольный автомат $v = \langle A, Q, B_1 \times \ldots \times B_m, \phi, \psi, q^0 \rangle$ переходит в автомат $v' = \langle A, Q, B_1 \times \ldots \times B_m \times B_{m+1}, \phi, \psi', q^0 \rangle$, такой что для всех $q \in Q$, $a \in A$ выполняется:

$$\begin{cases} \psi'_j(q, a) = \psi_j(q, a), \text{если} 1 \leq j \leq m, \\ \psi'_{m+1}(q, a) = \psi_m(q, a) \end{cases}$$

Обозначается данная операция 6_Σ.

Пусть $v = \langle A, Q, B_1 \times \ldots \times B_m, \phi, \psi, q^0 \rangle$ и
$z = \langle C_1 \times \ldots \times C_n, Q_z, D, \phi_z, \psi_z, q_z^0 \rangle$. Скажем, что автомат $7_\Sigma(v, i, z, j) = \langle A', Q \times Q_z, D', \phi', \psi', (q^0, q_z^0) \rangle$ получен из автоматов v и z с помощью *операции последовательного соединения* (или выход i автомата v соединен со входом j автомата z, см. рис. 7), если выполняются следующие условия.

1) $B_i \subseteq C_j$.

2) $A' = A \times C_1 \times \ldots \times C_{j-1} \times C_{j+1} \times \ldots \times C_n$.

3) $D' = B_1 \times \ldots \times B_m \times D$.

4) $\phi'((q, q_z), (a, c_1, \ldots, c_{j-1}, c_{j+1}, \ldots, c_n)) =$
$(\phi(q, a), \phi_z(q_z, (c_1, \ldots, c_{j-1}, \psi_i(q, a), c_{j+1}, \ldots, c_n)))$.

5) Если $k \leq m$, то $\psi'_k((q, q_z), (a, c_1, \ldots, c_{j-1}, c_{j+1}, \ldots, c_n)) = \psi_k(q, a)$.

6) $\psi'_{m+1}((q, q_z), (a, c_1, \ldots, c_{j-1}, c_{j+1}, \ldots, c_n)) =$
$\psi_z(q_z, (c_1, \ldots, c_{j-1}, \psi_i(q, a), c_{j+1}, \ldots, c_n))$.

Будем говорить, что в состоянии q автомата $v = \langle A_1 \times \ldots \times A_n, Q, B_1 \times \ldots \times B_m, \phi, \psi, q^0 \rangle$ i-тый выход не зависит от j-того входа, если для любых $a_k \in A_k$ $(1 \leq k \leq n)$ и любого $a \in A_j$ выполняется равенство

$$\psi_i(q, (a_1, \ldots, a_{j-1}, a_j, a_{j+1}, \ldots, a_n)) = \psi_i(q, (a_1, \ldots, a_{j-1}, a, a_{j+1}, \ldots, a_n))$$

.

Автомат $v = \langle A_1 \times \ldots \times A_n, Q, B_1 \times \ldots \times B_m, \phi, \psi, q^0 \rangle$ будем называть *ij-корректным для обратной связи*, если выполняются следующие условия.

1) В состоянии q^0 i-тый выход не зависит от j-того входа.

2) Если в состоянии $q \in Q$ i-тый выход не зависит от j-того входа, то для любых $a_k \in A_k$ $(1 \le k \le n)$ в состоянии

$$\phi(q, (a_1, \ldots, a_{j-1}, \psi_i(q, (a_1, \ldots, a_{j-1}, a_j, a_{j+1}, \ldots, a_n)), a_{j+1}, \ldots, a_n))$$

i-тый выход тоже не зависит от j-того входа.

Пусть автомат $v = \langle A_1 \times \ldots \times A_n, Q, B_1 \times \ldots \times B_m, \phi, \psi, q^0 \rangle$ ij-корректен для обратной связи. Будем говорить, что автомат $8_\Sigma(v, i, j) = \langle A', Q', B_1 \times \ldots \times B_m, \phi', \psi', q^0 \rangle$ получен из автомата v с помощью операции *инициальной обратной связи* (см. рис. 8) для i-ого выхода и j-ого входа, если выполняются следующие условия.

1) $A' = A_1 \times \ldots \times A_{j-1} \times A_{j+1} \times \ldots \times A_n$.

2) Q' есть множество всех состояний автомата v, в которых i-тый выход не зависит от j-того входа.

3) Для любых $a_k \in A_k$ $(1 \le k \le n)$ и $q \in Q'$

$$\phi'(q, (a_1, \ldots, a_{j-1}, a_{j+1}, \ldots, a_n)) = \\ \phi(q, (a_1, \ldots, a_{j-1}, \psi_i(q, (a_1, \ldots, a_n)), a_{j+1}, \ldots, a_n))$$

Поскольку автомат v ij-корректен для обратной связи, то ϕ' не выходит за рамки Q'.

4) Для любых $a_k \in A_k$ $(1 \le k \le n)$ и $q \in Q'$

$$\psi'_i(q, (a_1, \ldots, a_{j-1}, a_{j+1}, \ldots, a_n)) = \psi_i(q, (a_1, \ldots, a_n)).$$

5) Для любых $a_k \in A_k$ $(1 \le k \le n)$, $q \in Q'$ и $l \ne i$

$$\psi'_l(q, (a_1, \ldots, a_{j-1}, a_{j+1}, \ldots, a_n)) = \\ \psi_l(q, (a_1, \ldots, a_{j-1}, \psi_i(q, (a_1, \ldots, a_n)), a_{j+1}, \ldots, a_n))$$

Состояние автомата q называется достижимым, если существует такое $a \in A^*$, что $\Phi(a) = q$.

Будем говорить, что выход i автомата v зависит с задержкой от входа j, если в каждом достижимом состояния автомата v i-тый выход не зависит от j-того входа.

Пусть в автомате v i-тый выход зависит с задержкой от j-того входа. Будем говорить, что автомат $9_\Sigma(v, i, j)$ получен из автомата v с помощью операции *классической обратной связи* для i-ого выхода и j-ого входа, если $9_\Sigma(v, i, j) = 8_\Sigma(v, i, j)$.

То есть инициальная обратная связь и классическая обратная связь есть одна и та же операция, отличаются они только областью определения. Классическая обратная связь определяется на множестве автоматов, у которых i-тый выход зависит с задержкой от j-того входа. Инициальная обратная связь определяется на ij-корректных автоматах. Область определения инициальной обратной связи шире. Обычно в литературе, посвященной теории автоматов, рассматриваются классические обратные связи (поэтому они здесь и названы классическими). Однако при рассмотрении автоматных уравнений, чему посвящена данная работа, инициальные обратные связи оказываются намного естественнее. Забегая немного вперед скажем, что автоматные уравнения с одной неизвестной сначала решаются для инициальных обратных связей, а уже через этот результат – для классических.

В дальнейшем под операцией *обратной связи (о.с.)* мы будем подразумевать инициальную обратную связь.

Пусть $v_1 = \langle A_1, Q_1, B_1, \phi_1, \psi_1, q_1^0 \rangle$ и $v_2 = \langle A_2, Q_2, B_2, \phi_2, \psi_2, q_2^0 \rangle$. Будем говорить, что автомат v является *декартовым произведением* автоматов v_1 и v_2, если $v = \langle A_1 \times A_2, Q_1 \times Q_2, B_1 \times B_2, \phi_1 \times \phi_2, \psi_1 \times \psi_2, (q_1^0, q_2^0) \rangle$. Обозначается декартово произведение $v_1 \times v_2$.

Дадим рекурсивное определение *автоматной схемы–шаблона* с набором неизвестных (переменных) X, множеством входов A и множеством выходов B, которая является словом над алфавитом

$$\mathbb{P} \cup \mathbb{N} \cup \{\Sigma, \times,), (, ", "\} \cup \{y_1, y_2, \ldots\}.$$

Здесь "," обозначает символ запятой. Пусть каждой переменной из множества $Y = \{y_1, y_2, \ldots\}$ сопоставлен собственный входной алфавит A_i и выходной алфавит B_i таким образом, чтобы для каждой пары алфавитов $A = E_{k_1} \times \ldots \times E_{k_n}$ и $B = E_{l_1} \times \ldots \times E_{l_m}$ существовало счетное множество переменных из Y, имеющих такой входной и выходной алфавиты. Элементы множества Y будем также называть неизвестными.

1) Пусть v – любой автомат из $\mathbb{P}$ с входным алфавитом A и выходным алфавитом B. Тогда выражение v является схемой–шаблоном с пустым набором неизвестных, множеством входов A и множеством выходов B.

2) Пусть y_i – неизвестная с входным алфавитом A и выходным алфавитом B. Тогда выражение y_i является схемой–шаблоном с набором неизвестных y_i, множеством входов A и множеством выходов B.

3) Пусть S – схема–шаблон с набором неизвестных X, с входным алфавитом $A_1 \times \ldots \times A_n$ и выходным алфавитом B. Тогда слово $1\Sigma(S)$ является схемой–шаблоном с набором неизвестных X, входным алфавитом $A_1 \times \ldots \times A_n \times A_{n+1}$ и выходным алфавитом B.

4) Пусть S – схема–шаблон с набором неизвестных X, с входным алфавитом A и выходным алфавитом $B_1 \times \ldots \times B_m$. Тогда слово $2\Sigma(S)$ является схемой–шаблоном с набором неизвестных X, входным алфавитом A и выходным алфавитом $B_1 \times \ldots \times B_{m-1}$.

5) Пусть S – схема–шаблон с набором неизвестных X, с входным алфавитом $A_1 \times \ldots \times A_n$ и выходным алфавитом B. Тогда слово $3\Sigma(S)$ является схемой–

шаблоном с набором неизвестных X, входным алфавитом $A_1 \times \ldots \times A_{n-1}$ и выходным алфавитом B.

6) Пусть $i_1, \ldots, i_n$ – произвольная перестановка элементов множества $\{1, \ldots, n\}$, S – схема–шаблон с набором неизвестных X, с входным алфавитом $A_{i_1} \times \ldots \times A_{i_n}$ и выходным алфавитом B. Тогда слово $4\Sigma(S, i_1, \ldots, i_n)$ является схемой–шаблоном с набором неизвестных X, входным алфавитом $A_1 \times \ldots \times A_n$ и выходным алфавитом B.

7) Пусть $j_1, \ldots, j_m$ – произвольная перестановка элементов множества $\{1, \ldots, m\}$, S – схема–шаблон с набором неизвестных X, с входным алфавитом A и выходным алфавитом $B_{j_1} \times \ldots \times B_{j_m}$. Тогда слово $5\Sigma(S, j_1, \ldots, j_m)$ является схемой–шаблоном с набором неизвестных X, входным алфавитом A и выходным алфавитом $B_1 \times \ldots \times B_m$.

8) Пусть S – схема–шаблон с набором неизвестных X, с входным алфавитом A и выходным алфавитом $B_1 \times \ldots \times B_m$. Тогда слово $6\Sigma(S)$ является схемой–шаблоном с набором неизвестных X, входным алфавитом A и выходным алфавитом $B_1 \times \ldots \times B_m \times B_m$.

9) Пусть S_1 и S_2 – схемы–шаблоны с набором неизвестных X_1 и X_2, с входными алфавитами A и $A_1 \times \ldots \times A_n$ и выходным алфавитом $B_1 \times \ldots \times B_m$ и B соответственно. И пусть $1 \leq i \leq m$ и $1 \leq j \leq n$ – такие, что $B_i \subseteq A_j$. Тогда слово $7\Sigma(S_1, i, S_2, j)$ является схемой–шаблоном с набором неизвестных (X_1, X_2), входным алфавитом $A \times A_1 \times \ldots \times A_{j-1} \times A_{j+1} \times \ldots \times A_n$ и выходным алфавитом $B_1 \times \ldots \times B_m \times B$.

10) Пусть S – схема–шаблон с набором неизвестных X, с входными алфавитами $A_1 \times \ldots \times A_n$ и выходным алфавитом $B_1 \times \ldots \times B_m$. И пусть $1 \leq i \leq m$ и $1 \leq j \leq n$ – такие, что $B_i \subseteq A_j$. Тогда слова $8\Sigma(S, i, j)$ и $9\Sigma(S, i, j)$ является схемами–шаблонами с набором неизвестных X, входным алфавитом $A \times A_1 \times \ldots \times A_{j-1} \times A_{j+1} \times \ldots \times A_n$ и выходным алфавитом $B_1 \times \ldots \times B_m$.

11) Пусть S_1 и S_2 – схемы–шаблоны с набором неизвестных X_1 и X_2, с входными алфавитами A_1 и $A2$ и выходным алфавитом B_1 и B_2 соответственно. Тогда слово $S_1 \times S_2$ является схемой–шаблоном с набором неизвестных (X_1, X_2), входным алфавитом $A_1 \times A_2$ и выходным алфавитом $B_1 \times B_2$.

Схему-шаблон S, имеющую набор неизвестных $X = (y_{i_1}, \ldots, y_{i_n})$, будем обозначать $S(y_{i_1}, \ldots, y_{i_n})$, или для простоты $S(x_1, \ldots, x_n)$, подразумевая под x_j переменную y_{i_j}.

Содержательно схема–шаблон представляет из себя автоматную схему, некоторые автоматы в которой “неизвестны”, известно только их множество входов, выходов и то, как они соединяются с другими автоматами.

Автоматной схемой будем называть схему–шаблон с пустым набором неизвестных.

Пусть S – произвольная автоматная схема. Дадим определение автомата, соответствующего схеме S. Или автомата, который она *реализует*. Будем обозначать его $Avt(S)$.

1) Если $S = v$ и $v \in \mathbb{P}$, то $Avt(S) = v$.

2) Пусть $S = 1\Sigma(S')$. Тогда если автомат $Avt(S')$ определен, то $Avt(S) = 1_\Sigma(Avt(S'))$. Иначе $Avt(S)$ не определен.

3) Пусть $S = 2\Sigma(S')$. Тогда если автомат $Avt(S')$ определен, то $Avt(S) = 2_\Sigma(Avt(S'))$. Иначе $Avt(S)$ не определен.

4) Пусть $S = 3\Sigma(S')$. Тогда если автомат $Avt(S')$ определен, то $Avt(S) = 3_\Sigma(Avt(S'))$. Иначе $Avt(S)$ не определен.

5) Пусть $S = 4\Sigma(S', i_1, \ldots, i_n)$. Тогда если автомат $Avt(S')$ определен, то $Avt(S) = 4_\Sigma(Avt(S'), i_1, \ldots, i_n)$. Иначе $Avt(S)$ не определен.

6) Пусть $S = 5\Sigma(S', j_1, \ldots, j_m)$. Тогда если автомат $Avt(S')$ определен, то $Avt(S) = 5_\Sigma(Avt(S'), j_1, \ldots, j_m)$. Иначе $Avt(S)$ не определен.

7) Пусть $S = 6\Sigma(S')$. Тогда если автомат $Avt(S)$ определен, то $Avt(S) = 6_\Sigma(Avt(S'))$. Иначе $Avt(S')$ не определен.

8) Пусть $S = 7\Sigma(S_1, i, S_2, j)$. Тогда если автоматы $Avt(S_1)$ и $Avt(S_2)$ определены, то $Avt(S) = 7_\Sigma(Avt(S_1), i, Avt(S_2), j)$. Иначе $Avt(S)$ не определен.

9) Пусть $S = 8\Sigma(S', i, j)$. Тогда если автомат $Avt(S')$ определен и ij-корректен для обратной связи, то $Avt(S) = 8_\Sigma(Avt(S'), i, j)$. Иначе $Avt(S)$ не определен.

10) Пусть $S = 9\Sigma(S', i, j)$. Тогда если автомат $Avt(S')$ определен и его i-тый выход зависит со сдвигом от j-того входа, то $Avt(S) = 9_\Sigma(Avt(S'), i, j)$. Иначе $Avt(S)$ не определен.

11) Пусть $S = S_1 \times S_2$. Тогда если автоматы $Avt(S_1)$ и $Avt(S_2)$ определены, то $Avt(S) = Avt(S_1) \times Avt(S_2)$. Иначе $Avt(S)$ не определен.

Пусть дана схема–шаблон $S(x_1, \ldots, x_n)$, в которой каждая неизвестная x_i имеет входной алфавит A_i и выходной алфавит B_i. И пусть
$c_1 \in P(A_1, B_1), \ldots, c_n \in P(A_n, B_n)$ – такие автоматы, что если $x_i = x_j$ для некоторых i и j, то $c_i = c_j$. *Инстанцированием* схемы–шаблона $S(x_1, \ldots, x_n)$ автоматами $c_1, \ldots, c_n$ называется такая автоматная схема, которая получается из слова S заменой в нем букв x_i буквами c_i соответственно для всех i от 1 до n. Если при этом полученная схема реализует некоторый автомат, то будем обозначать его так: $S(c_1, \ldots, c_n)$, а если полученная схема не реализует никакого автомата, то будем говорить, что схема–шаблон S не может быть инстанцирована набором $c_1, \ldots, c_n$.

Содержательно инстанцированием схемы–шаблона $S(x_1, \ldots, x_n)$ является подстановка вместо неизвестных $x_1, \ldots, x_n$ каких-то автоматов
$c_1, \ldots, c_n$ с тем же множеством входов и выходов, что и у неизвестных. Если при этом все обратные связи оказываются корректными, то полученная автоматная схема будет реализовывать некоторый автомат, который обозначается $S(c_1, \ldots, c_n)$.

Автоматным уравнением с n неизвестными называется пара: схема-шаблон

$S(x_1, \ldots, x_n)$ и автомат h, имеющие одинаковые входные и выходные алфавиты. Записывается автоматное уравнение так:

$$S(x_1, \ldots, x_n) = h.$$

Решением автоматного уравнения с одной неизвестной $S(x_1, \ldots, x_n) = h$ является такой набор автоматов $c_1, \ldots, c_n$, что схема–шаблон S может быть инстанцирована набором $c_1, \ldots, c_n$, и автомат $S(c_1, \ldots, c_n)$ эквивалентен автомату h.

Числом состояний автоматного уравнения $S(x_1, \ldots, x_n) = h$ назовем произведение числа состояний всех автоматов из схемы–шаблона S и числа состояний автомата h.

Недетерминированным автоматом (НДА) называется следующая пятерка: $\langle A, U, B, \rho, u^0 \rangle$, где:

A – конечный входной алфавит;

B – конечный выходной алфавит;

U – конечное множество состояний НДА;

$u^0 \subseteq U$ – множество начальных состояний. u^0 может быть пустым.

$\rho : U \times A \to 2^{U \times B}$, где $2^{U \times B}$ – множество всех подмножеств множества $U \times B$, ρ называется *функцией перехода* .

Как несложно видеть, детерминированный автомат является частным случаем НДА, у которого:

1) $|u_0| = 1$;

2) Для всех $u \in U$ и $a \in A$ выполняется $|\rho(u, a)| = 1$.

Пусть НДА $N = \langle A, U, B, \rho, u^0 \rangle$. Графиком НДА N будем называть множество M всех слов $(a_1, b_1)(a_2, b_2) \ldots (a_n, b_n)$ из алфавита $A \times B$, таких что существует такая последовательность состояний НДА N $u_1, u_2, \ldots, u_{n+1}$, что:

1) $u_1 \in u^0$;

2) Для всех i от 1 до n $(u_{i+1}, b_i) \in \rho(u_i, a_i)$.

Поскольку автомат является частным случаем НДА, то данное определение определяет язык и для автомата тоже. Причем если слово $(a_1, b_1) \ldots (a_n, b_n)$ входит в язык автомата, то при подаче на вход автомата слова $a_1, a_2, \ldots, a_n$ на выходе будет слово $b_1, b_2, \ldots, b_n$.

Будем говорить, что автомат z является *редукцией* НДА N, если язык автомата z является подмножеством языка НДА N.

В Главе 1 исследуются уравнения с одной неизвестной и получены следующие результаты.

Утверждение 1. *Пусть автомат z_1 является редукцией НДА N и автомат z_2 эквивалентен автомату z_1. Тогда z_2 тоже является редукцией НДА N.*

НДА $N = \langle A, U, B, \rho, u^0 \rangle$ будем называть *выходо-недетерминированным автоматом (ВНДА)*, если:

1) $|u^0| \le 1$;

2) Для любых $u_1 \in U$, $a \in A$ и $b \in B$ существует не более одного u_2 такого, что $(u_2, b) \in \rho(u_1, a)$.

Теорема 1. *Существует алгоритм, который получает на вход произвольный ВНДА N и произвольный автомат D и на выходе сообщает, является ли данный автомат D редукцией ВНДА N. Время его работы данного алгоритма линейно зависит от произведения числа переходов в N и D.*

Теорема 2. *Существует алгоритм, который получает на вход произвольный ВНДА N и на выходе возвращает такой автомат D, что D есть редукция ВНДА N, или сообщает, что такого автомата нет. Время работы данного алгоритма линейно зависит от количества состояний в ВНДА N.*

Автоматное уравнение $S(x) = h$ будем называть *уравнением с полной информацией*, если:

1) в S не используются обратные связи, то есть нет операций 8Σ и 9Σ;

2) множество входов схемы–шаблона S совпадает со множеством входов неизвестной x.

Теорема 3. *Для любого уравнения с полной информацией $S(x) = h$ найдется такой ВНДА N, что $S(c) = h$ тогда и только тогда, когда c есть редукция N. Причем количество состояний в N не превосходит количества состояний схемы $S(x) = h$. Существует алгоритм, который получает на вход произвольное уравнение $S(x) = h$ и возвращает на выходе данный ВНДА. Время работы алгоритма линейно зависит от количества состояний входной схемы.*

Автоматное уравнение $S(x) = h$ будем называть *уравнением без обратных связей*, если в S не используются обратные связи, то есть нет операций 8Σ и 9Σ.

Теорема 4. *Для любого уравнения без обратных связей $S(x) = h$ найдется такой ВНДА N, что $S(c) = h$ тогда и только тогда, когда c есть редукция N. Причем количество состояний в N зависит экспоненциально от количества состояний схемы $S(x) = h$. Существует алгоритм, который получает на вход произвольное уравнение $S(x) = h$ и возвращает на выходе данный ВНДА.*

Будем говорить, что ДА $z = \langle A, Q, B, \phi, \psi, q^0 \rangle$ *вкладывается* в НДА $N = \langle A, U, B, \rho, u^0 \rangle$, если существует такое отображение $\omega : Q \to 2^U$, что:

1) $\omega(q^0) \cap u^0 \ne \emptyset$;

2) пусть между двумя состояниями $q_1, q_2 \in Q$ есть переход a/b, то есть $q_2 = \phi(q_1, a)$ и $b = \psi(q_1, a)$. Тогда

$$\forall u_1 \in \omega(q_1)\ \exists u_2 \in \omega(q_2) \text{ такой, что } (u_2, b) \in \rho(u_1, a).$$

Про отображение ω будем говорить, что оно *вкладывает* z в N.

Утверждение 2. *Пусть автомат* z_1 *отображением* w *вложим в НДА* N *и автомат* z_2 *эквивалентен автомату* z_1*. Тогда* z_2 *тоже вложим в* N.

Теорема 5. *Существует алгоритм, который получает на вход произвольный НДА* N *и произвольный автомат* D *и на выходе сообщает, вкладывается ли* D *в* N*. Время его работы линейно зависит от произведения числа переходов в* N *и* D.

Теорема 6. *Существует алгоритм, который получает на вход произвольный НДА* N *и на выходе возвращает такой автомат* D*, что* D *вложим в* N*, или сообщает, что такого автомата нет. Время работы данного алгоритма линейно зависит от количества состояний в НДА* N.

Теорема 7. *Для произвольного уравнения* $S(x) = h$ *найдется такой НДА* N*, что* $S(c) = h$ *тогда и только тогда, когда* c *вкладывается в* N*. Причем количество состояний в* N *зависит экспоненциально от количества состояний схемы* $S(x) = h$*. Существует алгоритм, который получает на вход произвольное уравнение* $S(x) = h$ *и возвращает на выходе данный НДА.*

В Главе 2 исследуются уравнения с двумя и более неизвестными и получены следующие результаты.

Теорема 8. *Не существует алгоритма, который бы для произвольного автоматного уравнения с двумя неизвестными и без обратных связей* $S(x_1, x_2) = h$ *определял бы, имеет оно решение или нет.*

Как следствие из предыдущей теоремы можно сформулировать следующее утверждение.

Теорема 9. *Не существует алгоритма, который бы для произвольного НДА* $N = \langle A_1 \times A_2, U, B_1 \times B_2, \rho, u^0\rangle$ *определял, имеет ли он хоть один вложимый в него автомат* D*, такой что* $D = D_1 \times D_2$*, причем* $D_1 \in P(A_1, B_1)$ *и* $D_2 \in P(A_2, B_2)$.

Теорема 10. *Не существует алгоритма, который для произвольного автоматного уравнения* $S(x, x) = h$ *определяет, имеет оно решение или нет.*

В Главе 3 исследуется решение автоматных уравнений во множестве детерминированных функций и получены следующие результаты.

Теорема 11. *Детерминированная функция является решением автоматного уравнения* $S(x) = h_0$ *тогда и только тогда, когда она вложима в тот же НДА, в который вкладываются все ограниченно-детерминированные решения уравнения* $S(x) = h_0$ *(см. теорему 7).*

Как следствие из предыдущей теоремы получаем, что у уравнение с одной неизвестной имеет ограниченно-детерминированное решение тогда и только тогда, когда оно имеет детерминированное решение. Но это неверно для случая уравнений с более чем одной неизвестной, что доказывается в следующей теореме.

Теорема 12. *Существует уравнение с двумя неизвестными, имеющее детерминированное решение, но не имеющее ограниченно-детерминированного решения.*

Благодарности

Автор выражает благодарность научному руководителю профессору В.А. Буевичу за постановку задачи и помощь в работе, профессору Э.Э. Гасанову и академику В.Б. Кудрявцеву за ценные замечания при написании этой работы.

Публикации по теме диссертации

1. Лялин И. В. О решении автоматных уравнений // Дискретная Математика. — 2004. — Т. 16, вып. 2. — С. 104–116

2. Лялин И. В. Решение автоматных уравнений с одной неизвестной // Интеллектуальные системы. — 2009. — том 12. — С. 271–282

3. Лялин И. В. Решение автоматных уравнений с двумя неизвестными// Интеллектуальные системы. — 2010. — том 13.

4. Лялин И. В. Решение автоматных уравнений // Тезисы докладов XIII Международной конференции "Проблемы Теоретической Кибернетики". — Казань, 2002. — часть 2 стр. 118.

5. I. V. Lyalin. On solving automaton equations // Discrete Mathematics and Applications. — 2004. — Volume 14, No. 3. — Pp. 287–300.

6. Лялин И. В. Алгоритмическая неразрешимость автоматных уравнений с тремя неизвестными // Тезисы докладов XIV Международной конференции "Проблемы Теоретической Кибернетики". — Пенза, 2005. — С. 91.

7. Лялин И. В. Решение автоматных уравнений // Тезисы VII Международной конференции "Дискретные модели в теории управляющих систем". — Москва, 2006. — С. 96

8. Лялин И. В. Решение автоматных уравнений // Тезисы конференции "Дискретная математика и её приложения". — Москва, 2010.