

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА
Механико-математический факультет

На правах рукописи

ШУТКИН Андрей Сергеевич

**МОДЕЛИ МАТЕРИАЛОВ С ПАМЯТЬЮ ФОРМЫ ПРИ
КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ**

01.02.04 — механика деформируемого твердого тела

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2010

Работа выполнена на кафедре теории упругости механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова.

Научный руководитель доктор физико-математических наук,
профессор

Бровко Георгий Леонидович

Официальные оппоненты доктор физико-математических наук,
профессор

Мовчан Андрей Александрович

доктор физико-математических наук,
профессор

Маркин Алексей Александрович

Ведущая организация Учреждение Российской Академии
Наук Институт проблем механики
имени А.Ю. Ишлинского РАН

Защита состоится 11 февраля 2011 года в 16 часов на заседании специализированного совета Д 501.001.91 по механике при Московском Государственном университете им. М. В. Ломоносова по адресу: 119991, г. Москва, Ленинские горы, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 1610.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан «27» декабря 2010 года.

Ученый секретарь
Диссертационного Совета Д 501.001.91
профессор

С. В. Шешенин

Актуальность, цели и задачи исследования

Материалы с памятью формы, открытые в середине прошлого века, в наше время широко применяются в различных отраслях производства, в том числе в авиастроении, в космическом производстве и в медицине. При использовании таких материалов в технологическом процессе необходимо правильно предсказывать происходящие в них фазовые превращения при изменениях температуры окружающей среды и приложенных к изделию нагрузок. В большинстве случаев использования сплавов с памятью формы, их свойства сводятся к проявлению простых одномерных эффектов, предсказание которых базируется, как правило, на накопленном эмпирическом опыте. Методика описания двух- и трехмерных эффектов недостаточно развита, и требуется ее доработка с использованием существующих теоретических основ.

Существует множество моделей, описывающих свойства материалов с памятью формы, часть из них способны описать поведение этих материалов в том числе и в трехмерном случае. Однако, отсутствие общих алгоритмов идентификации (нахождения материальных констант и функций) этих моделей для произвольных материалов затрудняет их практическое использование.

Несмотря на достаточно большие деформации, развивающиеся в изделиях из сплавов с памятью формы (более 10%), подавляющее большинство моделей написаны в терминах малых деформаций. Существуют разные методы обобщения известных моделей деформируемых твердых тел на область конечных деформаций, в том числе с использованием различных тензорных мер, выбор которых существенно влияет на свойства модели материала. Использование подобных подходов к обобщению определяющих соотношений на область конечных деформаций представляется возможным и для моделей материалов с памятью формы.

Основной целью диссертационной работы являлось построение новых определяющих соотношений материалов с памятью формы путем обобщения известных моделей на область конечных деформаций, а также разработка методики идентификации исходных и модифицированных моделей.

Были поставлены следующие задачи:

- 1) сравнение существующих моделей материалов с памятью формы;
- 2) разработка подходов к обобщению определяющих соотношений моделей материалов с памятью формы на область конечных деформаций;
- 3) разработка и проверка алгоритма идентификации моделей материалов с памятью формы.

Новизна и достоверность предложенных методов и решений

Проведено сравнение четырех моделей сплавов с памятью формы, основанных на различных подходах к описанию свойств материала: модели Абдрахманова, модели Бертрама, модели Танаки и модели Мовчана. Две из них — модель Танаки и модель Мовчана — детально исследованы на предмет описания основных эффектов, проявляемых материалами с памятью формы. Были проведены соответствующие расчеты, позволяющие описать эксперименты, в которых проявляются следующие эффекты: эффект монотонной памяти формы, эффект реверсивной памяти формы и явление фазовой текучести.

По результатам сравнения, выделена модель Мовчана для проведения дальнейшего исследования, как наиболее удобная и лучше других описывающая рассматриваемые эффекты.

Предложены некоторые варианты описания неполных циклов фазовых превращений, пригодные для применения в составе большинства существующих моделей.

Разработан метод обобщения моделей сплавов с памятью формы на область конечных деформаций. Для этого были использованы два формальных подхода к такому обобщению: материальный и пространственный. Оба подхода корректны относительно принципа материальной независимости от системы отсчета и заключаются в замене тензоров напряжений и малых деформаций на материальные или пространственные тензоры напряжений и конечных деформаций соответственно. Меры выбирались из параметрического семейства голономных энергетически сопряженных тензорных мер, предложенного Г.Л. Бровко.

С целью изучения влияния выбора конкретной пары мер на свойства моделей деформируемых твердых тел были построены решения тестовой задачи о простом сдвиге для обобщений четырех известных моделей: упругого тела, вязкоупругого тела, упруго-пластического тела и материала с памятью формы. Обобщение на область конечных деформаций проводилось двумя формальными способами (пространственным и материальным) с использованием нескольких пар мер напряжений и деформаций из предложенного семейства, вид которых задается значением параметра. Показана существенная зависимость свойств полученных обобщений от выбранной пары мер напряжений и конечных деформаций. Продемонстрированы различия в направлении и степени проявления эффектов Кельвина и Пойнтинга в зависимости от параметра семейства.

Для модели Мовчана материала с памятью формы аналогичные результаты получены для задачи, в которой проявляется эффект монотонной памяти формы, причем различия наблюдались уже при значениях деформации порядка 5%.

Предложен набор базовых экспериментов для идентификации моделей материалов с памятью формы. Построен алгоритм нахождения всех материальных констант модели Мовчана по данным идентификационных опытов. Для соотношений при малых деформациях все константы выражаются в аналитическом виде, для обобщенных на область конечных деформаций соотношений константы определяются с помощью численных методов с использованием программы Maple.

Достоверность и обоснованность полученных результатов обеспечивается использованием апробированных определяющих соотношений деформируемых твердых тел, проведением вычислений в известной программной среде Maple, хорошим совпадением результатов с экспериментальными данными.

Практическая и научная значимость, положения выносимые на защиту

- 1) Данные проведенного анализа различных соотношений материалов с памятью формы на предмет описания основных эффектов могут

быть использованы для выбора подходящей модели при решении конкретных задач.

- 2) Продемонстрированные различия в свойствах обобщенных на область конечных деформаций моделей говорят о широких возможностях варьирования свойств модели путем выбора конкретных мер деформаций и напряжений, входящих в определяющие соотношения.
- 3) Предложенный алгоритм идентификации моделей материалов с памятью формы пригоден для применения в том числе при использовании определяющих соотношений при конечных деформациях. При этом определение наилучшей пары тензорных мер производится на основе экспериментальных данных.

Апробация работы

- 1) Научные семинары кафедр МГУ: теории упругости, теории пластичности, механики композитов.
- 2) Конференция-конкурс молодых ученых Института механики МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, 2005, 2006, 2007, 2009гг.
- 3) Международная научная конференция «Современные проблемы математики, механики, информатики». Тула, 19-21 ноября 2007г., Тула, 23-27 ноября 2009г., Тула 22-26 ноября 2010г.
- 4) Международная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов». Москва, 14-18 апреля 2009г., Москва, 12-15 апреля 2010г.
- 5) Ломоносовские чтения МГУ. Москва, 2009, 2010гг.

Объём и структура диссертации

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы и приложений. Объем диссертации — 92 страниц. Работа содержит 40 рисунков и библиографический список из 89 наименований.

Краткое изложение содержания работы

Во **Введении** обоснована актуальность темы, сформулированы цели работы, и приведено краткое содержание работы.

В **первой главе** проводится сравнительный анализ подходов к моделированию свойств материалов с памятью формы.

В параграфе I.1 приводится описание основных свойств материалов с памятью формы. Причиной проявляемых ими специфических явлений являются происходящие в них мартенситные превращения, заключающиеся в изменении кристаллической структуры материала под влиянием температуры и напряжений.

При высоких температурах в материале устойчивой является кристаллическая решетка одной структуры (высокотемпературное состояние называют аустенитом), а при низких — другой структуры (низкотемпературное состояние называют мартенситом)¹.

При некоторых промежуточных температурах в материале могут присутствовать обе фазы, причем переход из одной фазы в другую происходит по схеме, изображенной на рисунке 1. При понижении температуры переход аустенит→мартенсит, называемый прямым мартенситным превращением, начинается при температуре M_s , а заканчивается при температуре M_f . Переход мартенсит→аустенит (обратное мартенситное превращение) начинается при температуре A_s и заканчивается при температуре A_f . Взаимное расположение температур A_s и M_s может быть различным у разных материалов (рисунок 1,а,б).

Кроме того, прямое мартенситное превращение может быть инициировано механическим нагружением. При этом мартенситное состояние может быть как устойчивым (материал остается в мартенситной фазе после разгрузки, рисунок 1,а), так и неустойчивым (материал при разгрузке переходит обратно в аустенитную фазу, рисунок 1,б).

Благодаря мартенситным превращениям, диаграмма деформирования материалов с памятью формы сильно отличается от аналогичной диаграм-

¹Под высокими и низкими температурами понимаются характерные температуры для конкретного материала. То есть у одного материала аустенитная решетка может быть стабильной при комнатной температуре (например, у Ti-50%Ni), у других — только при 100°С или 200°С (например, у сплавов на основе Fe), а у некоторых уже при -100°С (Ti-51%Ni).

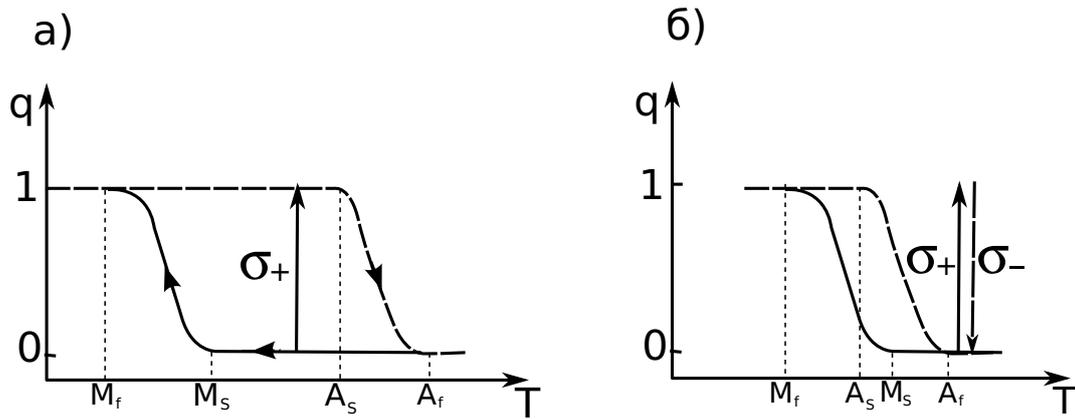


Рис. 1. Фазовые диаграммы для материалов с мартенситными превращениями. q — объемная доля мартенсита. а — широкий гистерезис; б — узкий гистерезис.

мы обычных сплавов и металлов. Так, если обычные сплавы после упругого деформирования входят в стадию необратимого пластического деформирования (см. рисунок 2,а), то диаграмма растяжения материала с памятью формы после упругого этапа имеет участок «фазовой» текучести (см. рисунок 2,б). Упрочнение материала на этом этапе мало по сравнению с упругим деформированием, однако накопленная в ходе «фазовой» текучести деформация является обратимой. После участка «фазовой» текучести материал с памятью формы снова начинает деформироваться упруго, а затем, как и обычные сплавы, входит в стадию накопления необратимых пластических деформаций.

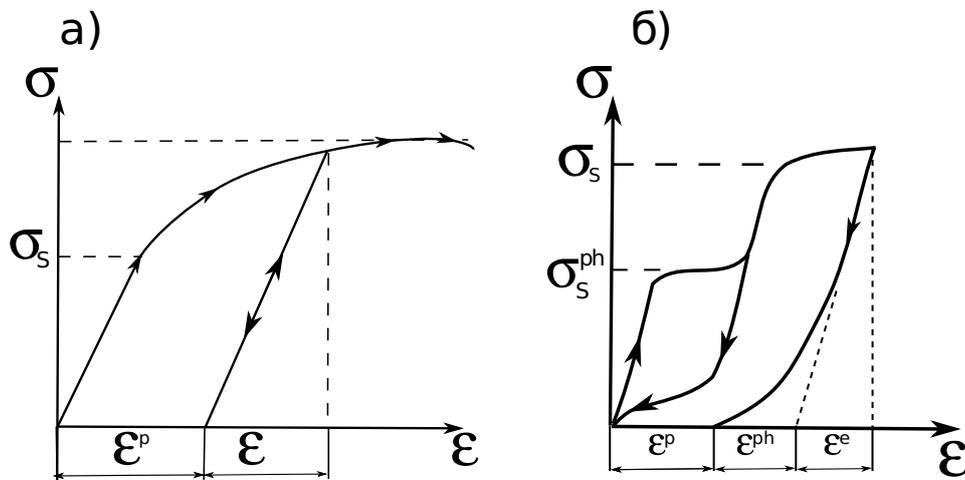


Рис. 2. Типичные диаграммы деформирования обычного пластического материала (а) и материала с памятью формы (б).

Кривая деформирования материалов с памятью формы не является постоянной для одного материала, а сильно зависит от многих факторов, таких как температура проведения эксперимента, размеры зерен, состав сплава и предварительная термообработка.

В параграфе I.2 приводится обзор основных эффектов, проявляемых материалами с памятью формы: эффекта «пластичности превращения», эффектов монотонной и обратимой памяти формы, эффекта реверсивной памяти формы, эффекта генерации реактивных сил и эффекта «ориентированного превращения».

Наиболее популярные из них — эффект «пластичности превращения» и эффект монотонной памяти формы. Эффект «пластичности превращения» заключается в росте фазовых деформаций в направлении действующего напряжения при охлаждении образца из аустенитного состояния в мартенситное. Эффект памяти формы заключается в возврате на этапе обратного мартенситного превращения фазовых деформаций, накопленных на этапе прямого превращения.

В параграфе I.3 приведены определяющие соотношения нескольких моделей материалов с памятью формы: достаточно простой модели Абдрахманова; модели Бертрама, описывающей поведение сплавов с памятью формы с применением теории течений; модели Танаки, основанной на положениях термодинамики; модели Мовчана, использующей микромеханический подход.

Параграф I.4 посвящен сравнению представленных моделей на предмет описания основных эффектов. Для моделей Мовчана и Танаки проводятся расчеты по данным трех реальных экспериментов: опыта с проявлением эффекта памяти формы, опыта с проявлением эффекта реверсивной памяти формы и опыта на явления фазовой текучести. Полученные решения этих задач сравниваются с экспериментальными данными. На основе проведенного анализа делаются выводы о пригодности моделей для описания основных эффектов (см. таблицу 1).

В параграфе I.5 обсуждается вопрос описания поведения материалов с памятью формы при незавершенных циклах фазовых превращений. Большинство авторов моделей уделяют этой проблеме мало внимания. Хотя на практике такие случаи встречаются достаточно часто, возникающие при

	Модель Мовчана	Модель Та-наки	Модель Бертрама	Модель Абдрахманова
Монотонный ЭФП	описывает достаточно точно	качественно описывает	описывает достаточно точно	качественно описывает
Обратимый ЭФП	качественно описывает	качественно описывает	не описывает в отсутствии напряжений	не описывает в отсутствии напряжений
Реверсивный ЭФП	описывает достаточно точно *	не описывает	не описывает	не описывает
Явление фазовой текучести	описывает достаточно точно при температурах больше M_s	качественно описывает при температурах больше M_s	описывает достаточно точно при температурах больше M_s	не описывает
Генерация реактивных сил	качественно описывает	качественно описывает	качественно описывает	качественно описывает
Эфф. деформации «ориентированного превращения»	описывает достаточно точно	качественно описывает	не описывает	качественно описывает

* — в одной из ранних работ А.А. Мовчана предложено соотношение для процесса обратного превращения, которое описывает эффект реверсивного превращения. В более поздних работах предлагается более простое соотношение, которое этот эффект не учитывает.

Таблица 1. Сравнение моделей, описывающих материалы с памятью формы.

этом эффекты до сих пор плохо изучены.

На рисунке 3,а представлена фазовая диаграмма для полных переходов. В качестве простейшего варианта описания прерванного прямого или обратного перехода можно предложить условие постоянства доли мартенсита внутри исходного гистерезиса (рисунок 3,б). К сожалению, такое простое описание не соответствует экспериментам, так как на практике после прерванного при температуре T_A (см. рисунок 3,б) прямого перехода обратное превращение всегда начинается при более низкой температуре, чем температура T_B (рисунок 3,б).

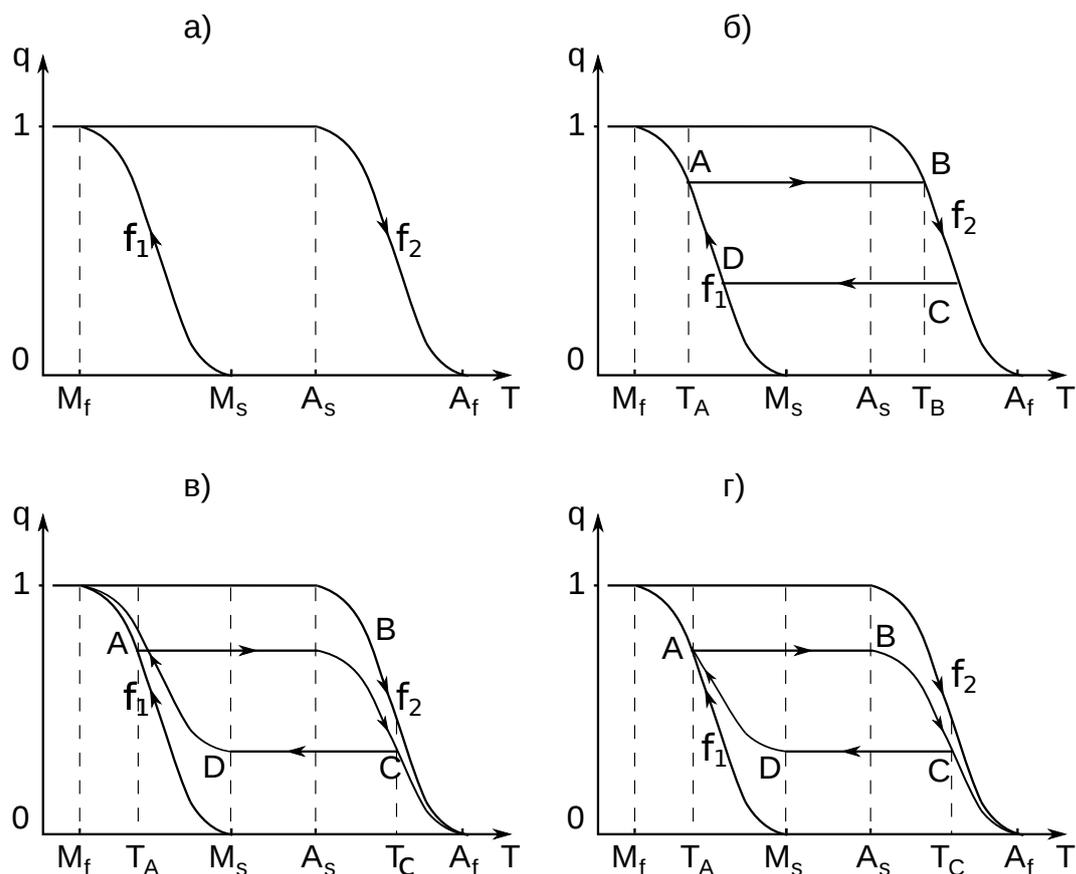


Рис. 3. Диаграмма фазовых превращений материала с памятью формы. а — полные циклы, б, в, г — варианты обобщений на неполные переходы

Более близкими к реальным данным являются варианты, представленные на рисунках 3,в и 3,г. Первый из них был предложен А.А.Мовчаном в одной из ранних работ, второй предлагается в настоящей работе и отличается от первого тем, что при повторном прерывании на этапе обратного превращения, кривая проходит через точку первого прерывания на этапе прямого превращения (точка A на рисунке).

Подробно последнюю схему можно описать следующим образом:

- 1) Прямое превращение всегда начинается при одной и той же температуре M_s .
- 2) После прерывания обратного превращения и до температуры M_s доля мартенсита q постоянна.
- 3) Кривая $q(T)$ прямого превращения должна проходить через все точки предыдущих разворотов на этапах прямого превращения (на рисунке 3,в одна точка — A).

- 4) На участках между двумя любыми ключевыми точками этапа прямого превращения (ключевые точки — это все точки разворота, а также точки начала и конца превращения) зависимость $q(T)$ пропорциональна исходной зависимости $q(T)$ для прямого превращения, то есть исходная функция нормируется так, чтобы получившаяся функция прошла через две ключевые точки.
- 5) Все перечисленные пункты верны и для обратного мартенситного превращения.

Такая схема описания неполных циклов может быть использована в составе любой модели, в которой вводятся зависимости доли мартенсита от параметров состояния.

Вторая глава посвящена подходам к обобщению определяющих соотношений на область конечных деформаций.

В параграфе II.1 приведены общие положения и определения. Приводятся выражения известных характеристик деформации частицы через аффинов деформации \mathbf{A} , а также некоторые характеристики напряженного состояния, выраженные через тензор истинных напряжений Коши \mathbf{S} и аффинов деформаций \mathbf{A} .

Выделяются два типа объективных тензоров: правые (также называемые материальными или инвариантными) и левые (также называемые пространственными или индифферентными). Правые тензоры не изменяются при переходе к новой системе отсчета, а левые преобразуются по закону:

$$\mathbf{Z}_* = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Z} \cdot \mathbf{Q}^T, \quad (1)$$

где $\mathbf{Q}(t)$ — ортогональный тензор поворота старой системы отсчета относительно новой.

Правые \mathbf{U} и левые \mathbf{Z} тензоры, описывающие один и тот же механический процесс, могут быть связаны соотношениями эквивалентности вида:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{B}^T, \quad (2)$$

где \mathbf{A} и \mathbf{B} — невырожденные тензоры 2-го ранга, зависящие от движения частицы среды.

В качестве характеристики скорости изменения правых тензоров используют материальные производные. Материальная производная от левого тензора не является левым тензором. Для сохранения корректности определяющих соотношений, в качестве скорости изменения левых тензоров на основе (2) вводятся объективные производные:

$$D[\mathbf{Z}] = \mathcal{A} \cdot \dot{\mathbf{U}} \cdot \mathcal{B}^T = \mathcal{A} \cdot (\mathcal{A}^{-1} \cdot \mathbf{Z} \cdot \mathcal{B}^{-1T}) \cdot \mathcal{B}^T. \quad (3)$$

Производная, заданная по формуле (3), преобразуется по закону (1). Примерами таких производных являются:

$$D_{KR}[\mathbf{Z}] = \dot{\mathbf{Z}} + \mathbf{D}^T \cdot \mathbf{Z} + \mathbf{Z} \cdot \mathbf{D} \text{ — производная Коттер-Ривлина при } \mathcal{A} = \mathcal{B} = \mathbf{A}^{-1T},$$

$$D_{Old}[\mathbf{Z}] = \dot{\mathbf{Z}} - \mathbf{D} \cdot \mathbf{Z} - \mathbf{Z} \cdot \mathbf{D}^T \text{ — производная Олдройда при } \mathcal{A} = \mathcal{B} = \mathbf{A},$$

$$D_0[\mathbf{Z}] = \dot{\mathbf{Z}} - \mathbf{\Omega}_0 \cdot \mathbf{Z} + \mathbf{Z} \cdot \mathbf{\Omega}_0 \text{ — нейтральная производная Динса при } \mathcal{A} = \mathcal{B} = \mathbf{Q},$$

$$D_J[\mathbf{Z}] = \dot{\mathbf{Z}} + \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{Z} + \mathbf{Z} \cdot \mathbf{\Omega} \text{ — производная Яумана,}$$

где $\mathbf{D} = \dot{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{A}^{-1}$ — тензор скоростей дисторсий, $\mathbf{\Omega}_0 = \dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^T$, $\mathbf{\Omega} = \dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^T + \mathbf{Q} \cdot \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{X}^{-1} - \mathbf{X}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{X}}) \cdot \mathbf{Q}^T$ — тензор скоростей вращений, \mathbf{Q} — ортогональный тензор поворота из полярного разложения аффинора деформаций.

В параграфе II.2 описаны подходы к построению определяющих соотношений при конечных деформациях, предпринятые в данной работе.

Рассматриваются два формальных подхода к обобщению известных соотношений при малых деформациях на область конечных деформаций. Первый подход заключается в замене мер малых деформаций и их производных на правые меры конечных деформаций и их материальные производные. Второй подход — в замене мер малых деформаций и их производных на левые меры конечных деформаций и их объективные производные. То есть, если в исходных соотношениях фигурируют $\boldsymbol{\sigma}$ — тензор напряжений, $\boldsymbol{\varepsilon}$ — тензор деформаций и $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ — производная от тензора деформаций, то, согласно первому подходу, вместо них следует использовать, например, $\boldsymbol{\Sigma}_I$ — тензор напряжений Ильюшина, $\boldsymbol{\mathcal{E}}_I$ — тензор деформаций Коши-Грина и $\dot{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_I$ — его производную. Согласно второму подходу, можно взять, например, \mathbf{S} — тензор истинных напряжений Коши, \mathbf{E}_I — тензор деформаций Альманзи и его объективную производную $\mathbf{D}_I[\mathbf{E}_I] = \mathbf{A}^{-1T} \cdot (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{E}_I \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{A}^{-1}$.

Пары мер конечных деформаций и напряжений, как правило, подбираются таким образом, чтобы выполнялось условие их энергетической сопряженности:

$$W = \mathbf{S} : \mathbf{V} = \Sigma_{\mathbf{I}} : \dot{\mathbf{E}}_{\mathbf{I}} = \mathbf{S} : D_{\mathbf{I}}[\mathbf{E}_{\mathbf{I}}].$$

Для обобщения моделей на область конечных деформаций в настоящей работе рассматриваются меры из предложенного Г.Л. Бровко параметрического семейства голономных энергетически сопряженных тензорных мер напряжений и конечных деформаций, которое включает в себя как частные случаи меры деформаций Грина и Альманзи, тензоры напряжений Коши и Ильюшина.

Правые меры конечных деформаций \mathcal{E}_c из рассматриваемого семейства задаются следующим образом:

$$\mathcal{E}_c = (\mathbf{X} - \mathbf{X}^{-1}) \cdot ((1 + c)\mathbf{X} + (1 - c)\mathbf{X}^{-1})^{-1},$$

где $c \in [-1, 1]$ — параметр, \mathbf{X} — симметричный тензор растяжений из правого полярного разложения аффинора деформаций \mathbf{A} .

Соответствующие им правые меры напряжений задаются формулой:

$$\Sigma_c = \frac{1}{4} ((1 + c)\mathbf{X} + (1 - c)\mathbf{X}^{-1}) \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q} \cdot ((1 + c)\mathbf{X} + (1 - c)\mathbf{X}^{-1}),$$

где \mathbf{Q} — ортогональный тензор поворота из полярного разложения аффинора деформаций \mathbf{A} , \mathbf{S} — тензор истинных напряжений Коши.

Левые меры деформаций выражаются формулой:

$$\mathbf{E}_c = \frac{1}{4} (\mathbf{Y} - \mathbf{Y}^{-1}) \cdot ((1 + c)\mathbf{Y} + (1 - c)\mathbf{Y}^{-1}), \quad (4)$$

где \mathbf{Y} — симметричный тензор растяжений из левого полярного разложения аффинора деформаций \mathbf{A} .

Левой мерой напряжений служит тензор истинных напряжений Коши \mathbf{S} .

В параграфе II.3 приводятся примеры обобщения известных соотношений, справедливых при малых деформациях, на область конечных дефор-

маций. В качестве тестовой решается задача о простом сдвиге с использованием четырех обобщенных моделей: упругого тела, вязкоупругого тела, упруго-пластического тела и модели А.А. Мовчана материала с памятью формы.

Для каждой из моделей используются правый и левый формальные подходы к построению определяющих соотношений при конечных деформациях и пары мер из рассматриваемого семейства, соответствующие значениям параметра $c = \pm 1$, $c = \pm \frac{1}{2}$, $c = \pm \frac{1}{4}$, $c = 0$.

На основе полученных решений демонстрируются различия в свойствах обобщенных моделей в зависимости от выбранной пары мер. Отмечено существенное влияние параметра c на направление и степень проявления эффектов Кельвина и Пойнтинга. Проводится сравнение свойств построенных здесь обобщений модели А.А. Мовчана со свойствами аналогичного обобщения, предложенного самим автором в одной из своих работ, в котором используется пространственный формальный подход, мера Генки в качестве меры деформаций и производная Яуманна в качестве объективной производной.

Для модели материала с памятью формы, обобщенной на область конечных деформаций, решается тестовая задача, в которой проявляется эффект монотонной памяти формы. Влияние на свойства обобщенной модели выбранной пары мер заметно уже при деформациях порядка 5 – 7% (рисунок 4).

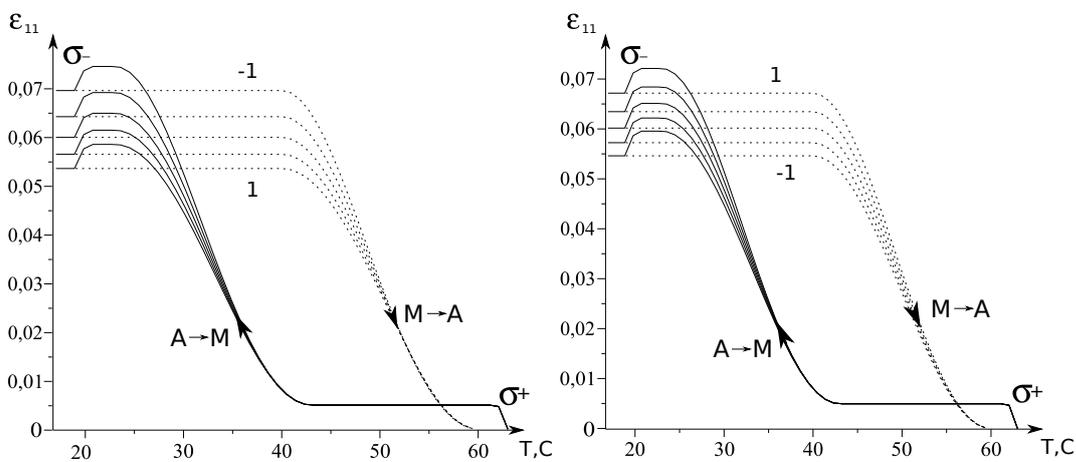


Рис. 4. Эффект монотонной памяти формы. Пространственный (слева) и материальный (справа) подходы ($c = 0$, $c = \pm \frac{1}{2}$, $c = \pm 1$).

На численном примере показано приближенное совпадение результатов расчетов, построенных по авторскому обобщению модели А.А. Мовчана, с результатами одного из вариантов обобщений из предлагаемого в настоящей работе семейства.

Третья глава посвящена вопросам идентификации моделей материалов с памятью формы.

В параграфе III.1 перечислены некоторые используемые в настоящее время способы определения характеристических температур материалов с памятью формы.

В параграфе III.2 предлагается полный набор базовых экспериментов, пригодный для идентификации моделей материалов с памятью формы. Оптимальным для нахождения всех констант моделей видится набор опытов, основанных на проявлении основных эффектов, присущих этим материалам:

- 1) Механическая спектроскопия. Под действием небольших по амплитуде колебаний растягивающего напряжения производится охлаждение и нагрев образца. Измеряется внутреннее трение в интервалах фазовых превращений.
- 2) Растяжение и разгрузка образца при постоянной температуре. Наблюдается явление фазовой текучести.
- 3) Охлаждение и нагрев нагруженной постоянным крутящим моментом тонкостенной трубки. Наблюдаются эффект «пластичности превращения» и эффект памяти формы.
- 4) Охлаждение и нагрев тонкостенной трубки с разгрузкой в середине прямого мартенситного превращения. Наблюдается эффект «ориентированного превращения».

В параграфе III.3 подробно описывается алгоритм нахождения всех констант модели Мовчана по данным четырех базовых экспериментов.

В этой модели предполагается аддитивное разложение приращения тензора деформаций на независимые компоненты:

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^T + d\varepsilon_{ij}^{\text{ph}},$$

где $d\varepsilon_{ij}^e$ отвечает за упругую деформацию, $d\varepsilon_{ij}^T$ — за температурную, а $d\varepsilon_{ij}^{\text{ph}}$ — за фазовую. Случаи возникновения пластической деформации не рассматриваются.

Упругая составляющая деформации вычисляется согласно закону Гука:

$$\varepsilon_{kk}^e = \frac{\sigma_{kk}}{3K}, \quad \varepsilon_{ij}^{e'} = \frac{\sigma'_{ij}}{2G},$$

где ε_{kk}^e и σ_{kk} — следы тензора упругой деформации и тензора напряжений, $\varepsilon_{ij}^{e'}$ и σ'_{ij} — компоненты девиаторов тензора упругой деформации и тензора напряжений. K и G — упругие модули, которые вообще говоря существенно зависят от объемной доли мартенсита q . Один из возможных вариантов представления этой зависимости следующий:

$$\frac{1}{K} = \frac{q}{K_M} + \frac{1-q}{K_A}, \quad \frac{1}{G} = \frac{q}{G_M} + \frac{1-q}{G_A},$$

где K_M, K_A, G_M, G_A — соответствующие постоянные значения упругих модулей материала в чисто мартенситном (с индексом M) и чисто аустенитном (с индексом A) состояниях.

Температурная составляющая деформации вычисляется по закону:

$$\varepsilon_{ij}^T = \alpha(T - T_0)\delta_{ij},$$

где T_0 — температура, при которой температурная компонента деформации равна 0, α — коэффициент теплового расширения, который, как и упругие модули, зависит от объемной доли мартенсита следующим образом:

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{q}{\alpha_M} + \frac{1-q}{\alpha_A}$$

Объемная доля мартенсита полагается зависящей от температуры T и интенсивности тензора напряжений σ_u :

$$\begin{aligned} q &= f_1(T - k\sigma_u) && \text{— при прямом превращении,} \\ q &= f_2(T - k\sigma_u) && \text{— при обратном превращении,} \end{aligned}$$

где k — материальная постоянная, σ_u — текущее значение интенсивности напряжений. Гипотеза о том, что зависимость объемной доли мартенсита

от температуры и компонент тензора напряжений сводится к зависимости от представленной комбинации $T - k\sigma_u$ достаточно хорошо согласуется с экспериментальными данными и в свою очередь сильно упрощает расчеты.

Функции f_1 и f_2 в общем случае можно считать материальными функциями среды. На практике используются различные их алгебраические аппроксимации: линейные, степенные или тригонометрические. Важен тот факт, что функции f_1, f_2 должны быть монотонно убывающими по своему аргументу.

Приращение фазовой составляющей деформации предлагается вычислять по-разному в зависимости от направления мартенситного превращения. А именно, для прямого превращения:

$$d\varepsilon_{ij}^{\text{ph}} = \left(\beta\delta_{ij} + c_0\sigma'_{ij}(1 - a_0q) + a_0\varepsilon_{ij}^{\text{ph}'} \right) dq,$$

где a_0, c_0, β — положительные константы материала, причем $a_0 \leq 1$, $\varepsilon_{ij}^{\text{ph}'}$ — текущее значение компонент девиатора тензора фазовых деформаций, σ'_{ij} — текущее значение компонент девиатора напряжений.

В случае обратного мартенситного превращения идет процесс исчезновения кристаллов мартенсита, который значительно проще процесса их зарождения, поэтому и соотношение будет простым:

$$d\varepsilon_{ij}^{\text{ph}} = \frac{\varepsilon_{ij}^{\text{ph}}}{q} dq$$

Из эксперимента на механическую спектроскопию находятся константы: M_s, M_f, A_s, A_f — характеристические температуры материала, которые используются практически во всех моделях; K_M, K_A, G_M, G_A — упругие модули (с индексом M — в мартенситном состоянии, с индексом A — в аустенитном); α_M, α_A — коэффициенты температурного расширения для мартенсита и аустенита соответственно. Определение характерных температур материала основано на том факте, что во время мартенситных превращений, в материале резко возрастает величина внутреннего трения.

Эксперимент на растяжение образца при постоянной температуре T_Σ позволяет найти константу k , а также проверить гипотезу зависимости доли мартенсита от комбинации $T - k\sigma_u$. Для этого достаточно записать

для точек начала и конца прямого превращения следующие соотношения:

$$\begin{aligned} T_{\Theta} - k\sigma_s^{\text{ph}} &= M_s, \\ T_{\Theta} - k\sigma_{M_f} &= M_f, \end{aligned}$$

где σ_s^{ph} — напряжение, при котором начинается превращение, а σ_{M_f} — напряжение, при котором превращение заканчивается.

Из опыта на кручение тонкостенного цилиндра под действием постоянного момента находится константа c_0 :

$$c_0 = \frac{2\pi Rh\varepsilon_{12}^{\text{ph}}(M_f)}{M},$$

где R — радиус цилиндра, h — толщина цилиндра, $\varepsilon_{12}^{\text{ph}}(M_f)$ — значение сдвиговой компоненты тензора фазовых деформаций в конце прямого превращения, M — крутящий момент.

Константа a_0 определяется в опыте на эффект «ориентированного превращения»:

$$a_0 = \frac{\ln\left(\frac{\varepsilon_{12}^{\text{ph}}(M_f)}{\varepsilon_{12}^{\text{ph}}\left(\frac{M_s - M_f}{2}\right)}\right)}{1 - \frac{\varepsilon_{12}^{\text{ph}}\left(\frac{M_s - M_f}{2}\right)2\pi Rh}{c_0 M}},$$

где $\varepsilon_{12}^{\text{ph}}(M_f)$ — значение сдвиговой компоненты тензора фазовых деформаций в конце прямого превращения, $\varepsilon_{12}^{\text{ph}}\left(\frac{M_s - M_f}{2}\right)$ — значение сдвиговой компоненты тензора фазовых деформаций после разгрузки примерно в середине прямого мартенситного перехода.

В параграфе III.4 на основе данных тех же четырех экспериментов находятся материальные константы модели Танаки.

В параграфе III.5 описан алгоритм численного нахождения специфических констант a_0 , c_0 модели Мовчана, обобщенной на область конечных деформаций, и параметра обобщения s . Расчет производится с помощью программы Maple по данным эксперимента на эффект «ориентированного превращения».

Общий алгоритм численного поиска материальных констант следующий:

- 1) В характерном для материалов с памятью формы эксперименте зада-

ются или измеряются усилия, перемещения и температура как функции от времени.

- 2) По заданным и измеренным величинам находятся значения $\mathbf{S}_\Theta(t)$ — тензора истинных напряжений Коши, $\mathbf{A}_\Theta(t)$ — аффинора деформаций и $T_\Theta(t)$ — температуры как экспериментальных функций от времени.
- 3) По значениям $\mathbf{S}_\Theta(t)$, $\mathbf{A}_\Theta(t)$, $T_\Theta(t)$ вычисляются используемые в обобщении тензоры напряжений, конечных деформаций и скоростей деформаций. Например, в случае материального формального обобщения и выборе мер деформаций и напряжений из семейства голономных тензорных мер, приведенного в параграфе II.2, это будут $\Sigma_{c\Theta}(t)$, $\mathcal{E}_{c\Theta}(t)$, $\dot{\mathcal{E}}_{c\Theta}(t)$, $T_\Theta(t)$. В случае же пространственного подхода — $\mathbf{S}_\Theta(t)$, $\mathbf{E}_{c\Theta}(t)$, $\mathbf{D}_c[\mathbf{E}_{c\Theta}(t)]$, $T_\Theta(t)$.
- 4) Экспериментальные значения мер напряжений и конечных деформаций подставляются в обобщенные определяющие соотношения. Для удовлетворения определяющих соотношений в них добавляются слабые невязки. Константы модели подбираются так, чтобы в совокупности минимизировать невязки.

В общем случае задача минимизации квадратичной суммы ошибок в зависимости от трех констант — задача достаточно сложная. Специфика опыта на эффект «ориентированного превращения» позволяет отдельно находить константы a_0 и c_0 , что и используется в работе.

Построенный алгоритм проверяется на исходных данных, рассчитанных по самой модели, затем на аналогичных данных, но с добавлением произвольных ошибок измерения, и, наконец, на серии реальных экспериментов. Идентификация по реальным данным производится по одному из шести опытов, проведенных с одним материалом. Затем найденные константы используются для описания остальных пяти опытов (см. рисунок 5).

Определение наилучшей пары тензорных мер напряжений и конечных деформаций также происходит в рамках предложенного алгоритма на основе экспериментальных данных.

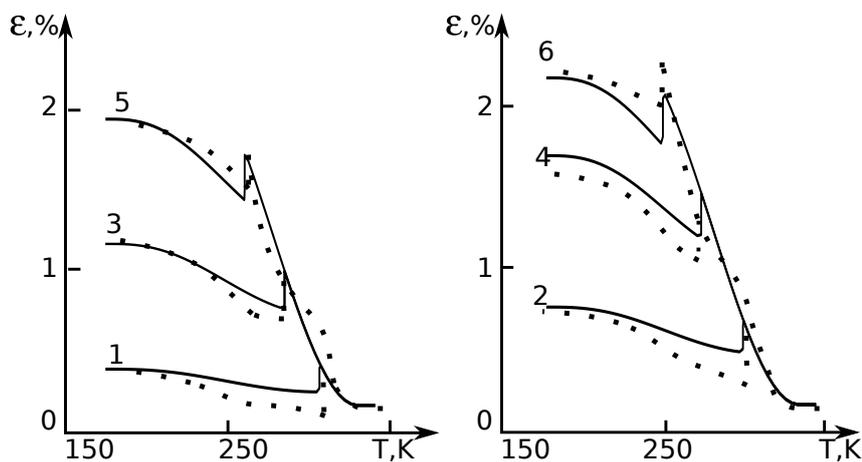


Рис. 5. Сравнение полученных решений с экспериментальными данными. Точками обозначены экспериментальные зависимости, линиями — решения, построенные с использованием найденных по алгоритму констант.

Основные результаты и выводы

- 1) Выполнено сравнение моделей материалов с памятью формы. Выделена модель Мовчана, лучшим образом описывающая основные эффекты материалов с памятью формы.
- 2) Реализован метод обобщения модели Мовчана на область конечных деформаций. Продемонстрировано заметное влияние выбора пары мер напряжений и деформаций на свойства обобщенной модели. Существенные различия в поведении моделей с разными мерами напряжений и деформаций расширяют возможности удовлетворения экспериментальных данных за счет варьирования используемых в определяющих соотношениях тензорных мер.
- 3) Построен и апробирован на виртуальных и реальных экспериментальных данных алгоритм идентификации модели материалов с памятью формы как при малых, так и при конечных деформациях. Для проверки устойчивости алгоритма к ошибкам измерения идентификация модели проводилась также по возмущенным данным виртуального эксперимента. Достаточно точное описание реальных опытов с помощью идентифицируемой модели говорит о пригодности самой модели и алгоритма ее идентификации к практическому применению.

Список публикаций по теме работы

- 1) *Шуткин А.С.* Расчет простейших элементов конструкций из материалов с ЭПФ // Труды конференции-конкурса молодых ученых. Т78 12-17 октября 2005 г./ Под редакцией академика РАН Г.Г. Черного, профессора В.А. Самсонова. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2006. С 276-281.
- 2) *Шуткин А.С.* Сравнение моделей, описывающих свойства материалов с эффектами памяти формы // Труды конференции-конкурса молодых ученых. Т78 11-16 октября 2006 г./ Под редакцией академика РАН Г.Г. Черного, профессора В.А. Самсонова. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2007. С 295-305.
- 3) ***Шуткин А.С., Башурова Ю.В.* Об идентификации моделей, описывающих поведение материалов с памятью формы // Известия Тульского государственного университета. Серия: Естественные науки. 2008. № 1. С. 95-110.**
- 4) *Бровко Г.Л., Шуткин А.С.* Варианты выбора тензорных мер напряжений и конечных деформаций для описания поведения материалов с памятью формы // Ломоносовские чтения. Тезисы докладов научной конференции. Секция механики. 16-25 апреля 2009, Москва, МГУ. М.: Изд-во МГУ, 2009. с. 30.
- 5) *Шуткин А.С.* Некоторые методы обобщения определяющих соотношений материалов с памятью формы на случай конечных деформаций // Материалы международной научной конференции «Современные проблемы математики, механики, информатики». Тула: Изд-во ТулГУ, 2009. С 309-310.
- 6) ***Шуткин А.С.* Подходы к обобщению определяющих соотношений деформируемых твердых тел на область конечных деформаций // Механика композиционных материалов и конструкций. 2010. Т. 16. № 2. С. 166-180.**
- 7) *Бровко Г.Л., Шуткин А.С.* Построение и идентификация моделей материалов с памятью формы при конечных деформациях // Материалы международной научной конференции «Современные проблемы математики, механики, информатики». Тула: Изд-во ТулГУ, 2010. С 105-109.