Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова
Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 512.774.42

Цыганков Владимир Игоревич

Автоморфизмы расслоений на коники

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2010

Работа выполнена на кафедре высшей алгебры Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Прохоров Юрий Геннадьевич
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Куликов Виктор Степанович
	кандидат физико-математических наук, доцент Степанов Дмитрий Анатольевич
Ведущая организация:	Ярославский государственный педагогический университет им. К. Д. Ушинского

Защита диссертации состоится 26 ноября 2010 г. в 16 ч. 45 м. на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 при Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д.1, МГУ, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж)

Автореферат разослан 26 октября 2010 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д.501.001.84 при МГУ
доктор физико-математических наук,
профессор

А.О. Иванов

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Изучение группы бирациональных автоморфизмов алгебраического многообразия является фундаментальной и наиболее важной задачей алгебраической геометрии. Эта задача на протяжении длительного времени привлекала внимание многих математиков. В настоящее время она привела к появлению программы Мори – одного из основных инструментов современной бирациональной геометрии. Изучение групп бирациональных автоморфизмов было естественно начато с наиболее простейшего класса алгебраических многообразий, многообразий являющихся рациональными.

Рассмотрим проективное пространство $\mathbb{P}^n$ над произвольным полем K. Группой Кремоны $\mathrm{Cr}_n(K)$ называется группа его бирациональных автоморфизмов. Название было дано в честь великого итальянского математика Луиджи Кремоны, который первым стал изучать эту группу.

Группа $\mathrm{Cr}_1(K)$ устроена довольно просто и была изучена еще в XIX веке. Действительно, пусть X – неособая проективная кривая и $\mathrm{Aut}(X)$ – группа автоморфизмов X. Тогда любое бирациональное отображение $f \in \mathrm{Bir}(X)$ продолжается до автоморфизма $\tilde{f} \in \mathrm{Aut}(X)$. Таким образом, $\mathrm{Cr}_1(K) \simeq \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1) \simeq PGL(2, K)$.

Группы $\mathrm{Cr}_n(K)$ при $n \geq 2$ устроены гораздо сложнее. В настоящее время наиболее полно изучен лишь случай $n = 2$. В диссертации рассматривается группа $\mathrm{Cr}_2(K)$ и ее подгруппы. Историю вопроса следует начинать с работы М.Нетера[1]. Было доказано, что группа $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{C})$ порождена подгруппой $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^2) \simeq PGL(3, \mathbb{C})$ и стандартной квадратичной инволюцией τ, записываемой в однородных координатах в виде

$$\tau : (x_0 : x_1 : x_2) \mapsto \left(\frac{1}{x_0} : \frac{1}{x_1} : \frac{1}{x_2}\right).$$

Заметим, что полное доказательство этого результата было получено только в работе Кастельнуово[2]. Соотношения между образующими группы $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{C})$ были получены М.Х. Гизатуллиным[3].

Несмотря на то, что множество порождающих группы $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{C})$ оказалось простым, ее алгебраическая структура оказалась очень сложной. Напри-

---

[1] Noether M., *Über Flächen, welche Shaaren rationaler Curven besitzen*, Math. Ann., vol. 3, pp. 161-227 (1871).

[2] Castelnuovo G., *Le transformazioni generatrici del gruppo Cremoniano nel piano.*, Torino Atti., Vol. 36, pp. 861–874 (1996).

[3] Гизатуллин М. Х., *Определяющие соотношения для кремоновой группы плоскости*, Изв. АН СССР. Сер. матем., Т. 298, № 5, С. 909–970 (1982).

мер, только совсем недавно в работе[4] было доказано, что группа $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{C})$ не является простой, а простота группы $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{C})$, рассматриваемой как проалгебраическая группа, была доказана Д. Бланком[5].

Перейдем к рассмотрению проблемы классификации конечных подгрупп $G \subset \mathrm{Cr}_2(\mathbb{C})$ с точностью до сопряженности.

История проблемы началась с работы Бертини[6], где были классифицированы классы сопряженности подгрупп порядка 2 в группе $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{C})$. Были выделены три класса сопряженности, в настоящее время известные как инволюции де Жонкьера, Гейзера и Бертини. Однако доказательство классификационных результатов не было строгим. Только совсем недавно в работе[7] было получено полное и короткое доказательство.

В 1895 году Кантор[8] и Виман[9] привели описание конечных подгрупп в группе $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{C})$. Список был достаточно исчерпывающим. Однако он не был точным в следующих отношениях. Во-первых, для заданной конечной подгруппы по этому списку нельзя было определить содержится она в группе Кремоны или нет. Во-вторых, вопрос о сопряженности между подгруппами не рассматривался.

Современный подход к этой проблеме был начат в работе Ю.И.Манина[10]. В этой работе указывается явная связь классификации классов сопряженности конечных подгрупп в группе Кремоны с классификацией G-минимальных рациональных многообразий (X, G) и G-эквивариантных бирациональных отображений между ними. Было установлено взаимно однозначное соответствие между вложениями конечной группы G в группу $\mathrm{Cr}_n(K)$ и классами рациональных многообразий с точностью до G-эвивариантных бирациональных изоморфизмов. Пусть поле K алгебраически замкнуто характеристики 0. Возьмем неособое рациональное многообразие X, регуляризирующее действие подгруппы $G \subset \mathrm{Cr}_n(K)$. Применим к паре (X, G) G-минимальную программу Мори при $n \leq 4$ (в произвольной размерности эта программа в настоящее время

---

[4] Cantat S., Lamy S., *Normal subgroups in the Cremona group.*, preprint, (2010).

[5] Blanc J., *Groupes de Cremona, connexité et simplicité*, Ann. Sci. Ec. Norm. Super., 43, fascicule 2 (2010), pp. 357–364.

[6] Bertini E., *Ricerche sulle trasformazioni univoche involutorie nel piano*, Annali di Mat. Pura Appl., Vol. 8, pp. 254–287 (1877).

[7] Bayle L., Beauville A., *Birational involutions of* $\mathbf{P}^2$, Asian J. Math., Vol. 4, no. 1, pp. 11–17 (2000).

[8] Kantor S., *Theorie der endlichen Gruppen von eindeutigen Transformationen in der Ebene*, Berlin. Mayer & Müller. 111 S. gr. 8° (1895).

[9] Wiman A., *Zur Theorie der endlichen Gruppen von birationalen Transformationen in der Ebene*, Math. Ann., Vol. 48, no. 1-2, pp. 195–240 (1896).

[10] Манин Ю. И., *Рациональные поверхности над совершенными полями. II*, Матем. сб., Т. 72(114), № 2, С. 161–192 (1967).

доказана при некоторых дополнительных условиях[11],[12]). Получим, что действие группы G регуляризуется на минимальном G-многообразии $X_{\min}$ с $G\mathbb{Q}$-факториальными терминальными особенностями (неособом при $n = 2$).

Пусть поле K алгебраически замкнуто характеристики 0, и $G \subset \mathrm{Cr}_n(K)$, $n \leq 4$. В этом случае с помощью G-эквивариантной минимальной программы Мори изучение классов G-эвивариантных бирациональных изоморфизмов рациональных многообразий X может быть сведено к изучению классов G-эвивариантных бирациональных изоморфизмов G-минимальных рациональных многообразий $X_{\min}$. Если $n = 2$, то имеют место следующие два случая.

- Случай $X_{\min}$ – поверхность Дель Пеццо с $\mathrm{Pic}(X_{\min})^G \simeq \mathbb{Z}$.
- Случай $\phi : X_{\min} \to \mathbb{P}^1$ – расслоение на коники с $\mathrm{Pic}(X_{\min})^G \simeq \mathbb{Z}^2$.

Вернемся к случаю $K = \mathbb{C}$ и $n = 2$. Исследование конечных подгрупп $G \subset \mathrm{Cr}_2(\mathbb{C})$ продолжилось в работах В.А.Исковских[13],[14],[15], [16] и в работах М.К.Гизатуллина[17],[18]. Основными результатами работ В.А.Исковских были вкратце следующие. Пусть S – G-минимальное расслоение коники $\phi : S \to \mathbb{P}^1$. Если $K_S^2 \leq 0$, то расслоение на коники ϕ является бирационально сверхжестким. Если $K_S^2 > 0$, то расслоение на коники ϕ G-минимально только при $K_S = 1, 2, 4$. Также были изучены основные свойства G-минимальных поверхностей Дель Пеццо. Было получено описание разложений бирациональных отображений между G-минимальными рациональными поверхностями на элементарные линки.

В 2000 году Л. Бэйль и А. Бовиль в статье[7] классифицировали элементы второго порядка в группе $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{C})$ с точностью до сопряженности. В

---

[11] Шокуров В. В., *Prelimiting flips*, Тр. мат. ин–та АН СССР. им. В. А. Стеклова, Т. 240, С. 82–219 (2003)

[12] Birkar C., Cascini P., Hacon C. D., McKernan J., *Existence of minimal models for varieties of log general type*, J. Amer. Math. Soc. 23 (2010), № 2, pp. 405-468.

[13] Исковских В. А., *Рациональные поверхности с пучком рациональных кривых*, Матем. сб., Т. 74(116), №. 4, С. 608–638 (1967).

[14] Исковских В. А., *Рациональные поверхности с пучком рациональных кривых и с положительным квадратом канонического класса*, Матем. сб., Т. 83(125), № 1(9), С. 90–119 (1970)

[15] Исковских В. А., *Минимальные модели рациональных поверхностей над произвольными полями*, Изв. АН СССР. Сер. матем., Т. 43, № 1, С. 19–43 (1979)

[16] Исковских В. А., *Факторизация бирациональных отображений рациональных поверхностей с точки зрения теории Мори*, УМН, Т. 51, № 4(310), С. 3–72 (1996)

[17] Гизатуллин М. Х., *Рациональные G-поверхности*, Изв. АН СССР. Сер. матем., Т. 44, № 1 С. 110–144 (1980).

[18] Гизатуллин М. Х., *Определяющие соотношения для кремоновой группы плоскости*, Изв. АН СССР. Сер. матем., Т. 298, № 5, С. 909–970 (1982).

этой работе впервые было получено точное и ясное описание числа классов сопряженности, параметризованных классами изоморфизмов кривых. Для заданных двух подгрупп второго порядка по этой классификации можно точно определить сопряжены они или нет. Техника этой статьи была обобщена де Фернексом в статье[19] на изучение циклических групп простого порядка. Классификация была достаточно точной за исключением двух случаев подгрупп пятого порядка, для которых не был решен вопрос об их сопряженности. Полная классификация была получена в статье[20]. В частности был доказан следующий результат. Циклическая подгруппа $G \subset \mathrm{Cr}_2(\mathbb{C})$ простого порядка сопряжена линейному автоморфизму плоскости тогда и только тогда, когда G не фиксирует поточечно кривую положительного рода.

А. Бовиль в дальнейшем классифицировал p-элементарные максимальные подгруппы с точностью до сопряженности[21]. Отметим, что классы сопряженности подгрупп $G \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$ хорошо описаны в группе де Жонкьера. Однако осталось неясным, когда две подгруппы, не сопряженные в группе де Жонкьера, сопряжены в группе $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{C})$.

Совсем недавно И.В. Долгачев и В.А. Исковских[22] доработали список Кантора и Вимана, используя современную теорию G-поверхностей, теорию элементарных линков В.А. Исковских и теорию классов сопряженности в группе Вейля. Отметим также недавнюю работу Д.Бланка[23], где классифицируются конечные абелевы подгруппы $G \subset \mathrm{Cr}_2(\mathbb{C})$ с точностью до сопряженности.

В настоящее время известно очень мало о группах $\mathrm{Cr}_n(\mathbb{C})$ при $n > 2$. В этом направлении следует отметить лишь работы Ю.Г. Прохорова[24],[25], где были классифицированы простые и p-элементарные подгруппы в группе $\mathrm{Cr}_3(\mathbb{C})$.

---

[19] de Fernex T., *On planar Cremona maps of prime order*, Nagoya Math. J., Vol. 174, pp. 1–28, (2004).

[20] Beauville A., Blanc J., *On Cremona transformations of prime order*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, Vol. 339, no. 4, pp. 257–259 (2004).

[21] Beauville A., *p-elementary subgroups of the Cremona group*, J. Algebra, Vol. 314, no. 2, pp. 553–564 (2007).

[22] Dolgachev I. V., Iskovskikh V. A., *Finite subgroups of the plane Cremona group*, "Algebra, Arithmetic, and Geometry in Honor of Yu. I. Manin", Progr. Math., 269 (2009).

[23] Blanc J., *Finite abelian subgroups of the Cremona group of the plane*, Thesis, Univ. of Geneva, 2006.

[24] Prokhorov Y., *Simple finite subgroups of the Cremona group of rank* 3, Preprint arXiv:math/0908.0678

[25] Prokhorov Y., *p-elementary subgroups of the Cremona group of rank 3*, to appear in Proc. Conf. "Classification of Algebraic Varieties", Schiermonnikoog, 2009, European Math. Soc.

Цель работы

- Построить метод задания уравнениями во взвешенных проективных пространствах G-минимальных расслоений на коники (S, G) с произвольным числом вырожденных слоев.
- Исследовать G-минимальные расслоения на коники (S, G) с $K_S^2 = 1, 2, 4$. Провести их полную классификацию с заданием уравнений во взвешенных проективных пространствах расслоений на коники S и явным указанием действия групп G.

Научная новизна

1. Построен метод задания уравнениями во взвешенных проективных пространствах G-минимальных расслоений на коники (S, G) с произвольным числом вырожденных слоев. Для заданного числа вырожденных слоев этот метод позволяет полностью классифицировать G-минимальные расслоения на коники (S, G) с заданием уравнений расслоений на коники S и явным указанием действия групп G.
2. Исследованы G-минимальные расслоения на коники (S, G) с $K_S^2 = 1, 2, 4$. Проведена их полная классификация с заданием уравнений во взвешенных проективных пространствах расслоений на коники S и явным указанием действия групп G.

Основные методы исследования

В работе применяются методы алгебраической геометрии (бирациональные перестройки)[26], теории особенностей алгебраических многообразий[27], теории G-минимальных расслоений на коники[22].

Теоретическая и практическая ценность работы

Диссертация имеет теоретический характер. Полученные в диссертации результаты могут найти применение в алгебраической геометрии, топологии и математической физике.

---

[26] Хартсхорн Р., *Алгебраическая геометрия*, ИО НФМИ (2000).

[27] Прохоров Ю. Г., *Особенности алгебраических многообразий*, Москва, издательство МЦНМО, (2009).

Апробация работы

Результаты диссертации докладывались:

- неоднократно на семинаре «Геометрия алгебраических многообразий» кафедры высшей алгебры МГУ, 2008 – 2009 гг.;
- на XVII международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов», Москва, МГУ, 2010 г.

Публикации

Результаты автора по теме диссертации опубликованы в 3 работах, из них 1 в журналах из перечня ВАК. Список данных работ приводится в конце автореферата [1–3].

Структура и объем диссертации

Диссертационная работа состоит из 6 глав (первая из которых является вводной). Список литературы включает 48 наименований. Общий объем диссертации составляет 88 страниц.

Краткое содержание работы

Первая глава— введение. Здесь обсуждаются история изучаемых вопросов, дается обзор ранее известных результатов и формулируются основные утверждения, доказанные в диссертации.

Во **второй главе** мы напоминаем, необходимые для доказательства основных результатов диссертации, известные понятия и утверждения, принадлежащие другим авторам, из теории группы Кремоны ранга 2, теории G-минимальных расслоений на коники. Также мы устанавливаем соглашения относительно обозначений и понятий, используемых в диссертации.

В **третьей главе** мы описываем метод исследования. Он позволяет получить уравнения G-минимальных расслоений на коники с произвольным числом вырожденных слоев. Вкратце он состоит в следующем. Рассмотрим G-минимальное расслоение на коники $\phi : S \to \mathbb{P}^1$. Пусть

$$\alpha : G \to O(\mathrm{Pic}(S))$$

— естественное представление группы G в группе автоморфизмов решетки $\mathrm{Pic}(S)$. Если $\mathrm{Ker}(\alpha)$ нетривиально, то согласно результату Долгачева и Исковских (см. теорему 2.1.1) поверхность S имеет структуру *исключительного расслоения на коники* и представляется явным уравнением (см. (1.2)). Поэтому мы можем считать, что группа $\mathrm{Ker}(\alpha)$ тривиальна. Расслоение на коники $\phi : S \to \mathbb{P}^1$ индуцирует гомоморфизм групп

$$\phi_* : G \to \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1).$$

Положим $G_K = \mathrm{Ker}(\phi_*)$. По теореме Долгачева и Исковских (см. теорему 2.1.3) мы имеем $G_K \simeq 2$ или 2^2.

Предположим, что факторповерхность $S/\mathrm{Ker}(\phi_*)$ неособа. Тогда она является рациональной линейчатой поверхностью и мы говорим, что выполнены условия *первой конструкции*. В этом случае достаточно просто получить уравнения S и вычислить явное действие группы G (см. раздел 1). В противном случае применяем *вторую конструкцию*. Здесь расслоение на коники $\phi : S \to \mathbb{P}^1$ оказывается G-эквивариантно бирационально изоморфно другому, особому расслоению на коники $\phi' : S' \to \mathbb{P}^1$ с условием, что фактор $S'/\mathrm{Ker}(\phi'_*)$ изоморфен рациональной линейчатой поверхности. Поверхность S' имеет дювалевские особенности типа A_1. Аналогично, получаем уравнения поверхности S' и вычисляем явное действие группы G (см. раздел 2).

В **главе 4** описывается случай, когда $K_S^2 = 4$. Здесь имеют место две возможности. В первом случае (см. раздел 1) поверхность S является поверхностью Дель Пеццо. Расслоение на коники (S, G) минимально тогда и только тогда, когда группа G содержит инволюцию де Жонкьера ι.

Теорема (см. теорему 4.1.1). *Пусть (S, G, ϕ) – G-минимальное расслоение на коники с $K_S^2 = 4$. Предположим, что дивизор $-K_S$ обилен, и выполнены условия первой конструкции. Тогда поверхность S представляется в виде G-эквивариантного двулистного накрытия $\pi : S \to S/\iota = \mathbb{F}_0$, где $\iota \in G_K$ – инволюция, переставляющая компоненты всех вырожденных слоев. Также поверхность S задается следующими уравнениями в $\mathbb{P}^4$:*

$$\begin{cases} u^2 + F(x, y, z, w) = 0, \\ xw = yz. \end{cases} \tag{1}$$

Морфизм ϕ задается формулой

$$\phi : (u : x : y : z : w) \mapsto \begin{cases} (x : y), & \text{если } (x : y) \neq (0 : 0), \\ (z : w), & \text{если } (z : w) \neq (0 : 0). \end{cases}$$

Инволюция ι действует по формуле $u \mapsto -u$. Группа G является любой подгруппой группы $\mathrm{Aut}(S, \phi)$, содержащей инволюцию ι.

Во втором случае (см. раздел 3 теорема 4.3.7) поверхность S является слабой поверхностью Дель Пеццо (т.е. антиканоннический дивизор $-K_S$ численно эффективен и объемен) и обладает структурой исключительного расслоения на коники.

В **главе 5** описывается случай $K_S^2 = 2$. В разделе 1.2 (теорема 5.1.10), а также в разделе 2.2.1 (теорема 5.2.16) поверхность S является поверхностью Дель Пеццо.

Теорема (см. теорему 5.1.10). *Пусть (S, G, ϕ) – G-минимальное расслоение на коники с $K_S^2 = 2$ и $G_K \simeq 2^2$. Предположим, что дивизор $-K_S$ численно эффективен и не существует инволюции $\iota \in G_K$, переставляющей компоненты всех вырожденных слоев. Тогда дивизор $-K_S$ обилен, т.е. S является поверхностью Дель Пеццо. Поверхность S представляется следующим уравнением в $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$:*

$$p_0(t_0, t_1)x_0^2 + p_1(t_0, t_1)x_1^2 + p_2(t_0, t_1)x_2^2 = 0,$$

где $p_i(t_0, t_1)$, $i = 1, 2, 3$ – бинарные формы степени 2 без кратных и попарно общих множителей. Морфизм ϕ задается формулой

$$\phi : \ (x_0 : x_1 : x_2, t_0 : t_1) \mapsto (t_0 : t_1).$$

Группа G_K изоморфна группе 2×2 и порождена отображениями:

$$\begin{aligned} g_1 : \ (x_0 : x_1 : x_0, t_0 : t_1) &\mapsto (-x_0 : x_1 : x_2, t_0 : t_1), \\ g_2 : \ (x_0 : x_1 : x_0, t_0 : t_1) &\mapsto (x_0 : -x_1 : x_2, t_0 : t_1). \end{aligned} \tag{2}$$

Группа G является любой подгруппой группы $\mathrm{Aut}(S, \phi)$, содержащей отображения (2).

Теорема (см. теорему 5.2.16). *Пусть (S, G, ϕ) – G-минимальное расслоение на коники с $K_S^2 = 2$. Предположим, что выполнены условия второй конструкции, группа G_K переставляет компоненты в четырех вырожденных слоях расслоения ϕ, и S'/G_K – рациональная линейчатая поверхность с инвариантом 0. Тогда дивизор $-K_S$ обилен, т.е. S является поверхностью Дель Пеццо. Поверхность S' представляется следующими уравнениями во взвешенном проективном пространстве $\mathbb{P}(2^2, 1^4)$ с координатами v, s, x, y, z, w:*

$$\begin{aligned} &v^2 = Q_2(x, y)F(x, y, z, w), \\ &s^2 = Q_2(z, w)F(x, y, z, w), \\ &vz = sx, \\ &vw = sy, \\ &xw = yz, \end{aligned}$$

где Q_2 – *бинарная форма степени 2, а* F – *однородный полином степени* 2. *Морфизм* $\phi' : S' \to \mathbb{P}^1$ *задается формулой:*

$$\phi' : (v : s : x : y : z : w) \mapsto \begin{cases} (x : y), \text{ \textit{если} } (x : y) \neq (0 : 0), \\ (z : w), \text{ \textit{если} } (z : w) \neq (0 : 0). \end{cases}$$

Группа G_K *порождена инволюцией* ι, *действующей по формуле*

$$\iota : (v : s : x : y : z : w) \mapsto (-v : -s : x : y : z : w).$$

Возможности для форм F *и действие групп* G *описаны в диссертации.*

В разделе 1.1 (теорема 5.1.4) и в разделе 2.2.2 (теорема 5.2.19) поверхность S является слабой поверхностью Дель Пеццо. Инволюция Гейзера сохраняет структуру расслоения на коники $\phi : S \to \mathbb{P}^1$ и действует перестановкой всех вырожденных слоев.

Теорема (см. теорему 5.1.4). *Пусть* (S, G, ϕ) – G-*минимальное расслоение на коники с* $K_S^2 = 2$. *Предположим, что дивизор* $-K_S$ *численно эффективен, и существует инволюция* $\iota \in G_K$, *переставляющая компоненты всех вырожденных слоев. Тогда на поверхности* S *существует либо* G-*инвариантная рациональная* (-2)-*кривая, либо* G-*инвариантная пара рациональных* (-2)-*кривых, пересекающихся в одной точке. Пусть* $\psi' : (S, G, \phi) \to (S', G, \phi')$ – *стягивание этих кривых, где отображение* $\phi' : S' \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ *индуцировано морфизмом* ϕ. *Поверхность* S' *представляется уравнением во взвешенном проективном пространстве* $\mathbb{P}(2, 1^3)$ *с координатами* u, x, t_0, t_1:

$$u^2 + F(x, t_0, t_1) = 0.$$

Отображение ϕ' *является проекцией:*

$$\phi' : (u : x : t_0 : t_1) \mapsto (t_0 : t_1).$$

Инволюция ι *совпадает с инволюцией Гейзера и действует по формуле* $u \mapsto -u$. *Группа* G *является любой подгруппой группы* $\mathrm{Aut}(S', \phi')$, *содержащей инволюцию* ι.

Теорема (см. теорему 5.2.19). *Пусть* (S, G, ϕ) – G-*минимальное расслоение на коники с* $K_S^2 = 2$. *Предположим, что выполнены условия второй конструкции, группа* G_K *переставляет компоненты в четырех вырожденных слоях расслоения* ϕ, *и* S'/G_K – *рациональная линейчатая поверхность с инвариантом* 2. *Тогда поверхность* S *содержит* G-*эквивариантную рациональную* (-2)-*кривую. Пусть* $(S, G, \phi) \to (\bar{S}, G, \bar{\phi})$ – *стягивание этой кривой, где отображение* $\bar{\phi} : \bar{S} \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ *индуцировано* *морфизмом ϕ. Поверхность $\bar{S}$ представляется во взвешенном проективном пространстве $\mathbb{P}(2,1^3)$ с координатами u, x, t_0, t_1 уравнением вида*

$$u^2 + t_0 t_1 x^2 + t_0^4 + b t_0^2 t_1^2 + t_1^4 = 0,\ b \in \mathbb{C}.$$

Отображение $\bar{\phi}$ является проекцией

$$\bar{\phi} : (u : x : t_0 : t_1) \mapsto (t_0 : t_1).$$

Группа G_K порождается инволюцией ι, действующей по формуле $x \mapsto -x$. Инволюция Гейзера действует по формуле $\tau : u \mapsto -u$. Группа G не содержит τ. Возможности для групп G описаны в диссертации.

Если дивизор $-K_S$ не является численно эффективным, то поверхность S имеет структуру исключительного расслоения на коники (см. раздел 3 теорема 5.3.20).

В **главе 6** описывается случай, когда $K_S^2 = 1$. В разделе 3.3.1 теорема 6.3.8 поверхность S является поверхностью Дель Пеццо.

Теорема (см. теорему 6.3.8). *Пусть (S, G, ϕ) – G-минимальное расслоение на коники с $K_S^2 = 1$. Предположим, что выполнены условия второй конструкции, группа G_K переставляет компоненты в шести вырожденных слоях расслоения ϕ, и S'/G_K – рациональная линейчатая поверхность с инвариантом 0. Тогда дивизор $-K_S$ обилен, т.е. S является поверхностью Дель Пеццо. Поверхность S' представляется следующими уравнениями во взвешенном проективном пространстве $\mathbb{P}(2^2, 1^4)$ с координатами v, s, x, y, z, w*

$$\begin{aligned} v^2 &= E_0(x, y, z, w), \\ s^2 &= E_1(x, y, z, w), \\ vz &= sx, \\ vw &= sy, \\ xw &= yz. \end{aligned}$$

Морфизм $\phi' : S' \to \mathbb{P}^1$ задается формулой:

$$\phi' : (v : s : x : y : z : w) \mapsto \begin{cases} (x : y), & \text{если } (x : y) \neq (0 : 0), \\ (z : w), & \text{если } (z : w) \neq (0 : 0). \end{cases}$$

Полиномы $E_0(x, y, z, w)$, $E_1(x, y, z, w)$ и действие групп G описаны в диссертации. Инволюция ι действует по формуле

$$(v : s : x : y : z : w) \mapsto (-v : -s : x : y : z : w).$$

В оставшихся случаях (см. раздел 1.1 (теорема 6.1.1), раздел 3.1 (теорема 6.3.5) и раздел 3.3.2 (теорема 6.3.12)) дивизор $-K_S$ не является численно эффективным.

Теорема (см. теорему 6.1.1). *Пусть* (S, G, ϕ) – G*-минимальное расслоение на коники степени* $K_S^2 = 1$*. Предположим, что выполнены условия первой конструкции. Тогда поверхность* S *содержит единственную* G*-инвариантную рациональную* (-3)*-кривую. Пусть* $\psi' : (S, G, \phi) \to (S', G, \phi')$ – *стягивание этой кривой, где отображение* $\phi' : S' \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ *индуцируется морфизмом* ϕ*. Морфизм* ψ' *является* G*-эквивариантным, и на поверхности* S' *группа* G *действует эффективно. Поверхность* S' *представляется следующими уравнениями во взвешенном проективном пространстве* $\mathbb{P}(2^2, 3, 1^2)$ *с координатами* u, v, x, t_0, t_1*:*

$$u^2 + xl_1(t_0, t_1) + P_4(t_0, t_1) = 0,$$
$$v^2 + xl_2(t_0, t_1) + Q_4(t_0, t_1) = 0,$$

где $l_i(t_0, t_1)$, $i = 1, 2$ – *взаимно простые бинарные формы степени* 1*, а* $P_4(t_0, t_1)$ *и* $Q_4(t_0, t_1)$ – *бинарные формы степени* 4*. Отображение* ϕ' *является проекцией*

$$\phi' : (u : v : x : t_0 : t_1) \mapsto (t_0 : t_1).$$

Группа G_K *порождена отображениями:*

$$(u : v : x : t_0 : t_1) \mapsto (-u : v : x : t_0 : t_1),$$
$$(u : v : x : t_0 : t_1) \mapsto (u : -v : x : t_0 : t_1).$$

Группа G *является любой подгруппой группы* $\mathrm{Aut}(S', \phi')$*, содержащей эти отображения.*

Теорема (см. теорему 6.3.5). *Пусть* (S, G, ϕ) – G*-минимальное расслоение на коники с* $K_S^2 = 1$*. Предположим, что выполнены условия второй конструкции, и группа* G_K *переставляет компоненты в двух вырожденных слоях. Тогда дивизор* $-K_S$ *не является численно эффективным. Поверхность* S' *представляется следующими уравнениями во взвешенном проективном пространстве* $\mathbb{P}(3^2, 1^4)$ *с координатами* v, s, x, y, z, w

$$\begin{aligned} &v^2 = (x^5 - y^5)x + (x^4z - y^4w)w,\\ &s^2 = (z^4x - w^4y)x + (z^5 - w^5)w,\\ &vz^2 = sx^2,\\ &vzw = sxy,\\ &vw^2 = sy^2,\\ &xw = yz. \end{aligned}$$

Морфизм $\phi' : S' \to \mathbb{P}^1$ *задается формулой*

$$\phi' : (v : s : x : y : z : w) \mapsto \begin{cases} (x : y), \text{ если } (x : y) \neq (0 : 0), \\ (z : w), \text{ если } (z : w) \neq (0 : 0). \end{cases}$$

Группа G *изоморфна* $2.D_5$ *и порождена отображениями*

$$(v : s : x : y : z : w) \mapsto (\varepsilon_4 s : \varepsilon_4 v : w : z : y : x),$$
$$(v : s : x : y : z : w) \mapsto (\varepsilon_5^4 v : s : \varepsilon_5^3 x : \varepsilon_5^2 y : \varepsilon_5 z : w).$$

Группа G_K *порождена инволюцией* ι, *действующей по формуле*

$$\iota : (v : s : x : y : z : w) \mapsto (-v : -s : x : y : z : w).$$

Теорема (см. теорему 6.3.12). *Пусть* (S, G, ϕ) – G*-минимальное расслоение на коники с* $K_S^2 = 1$. *Предположим, что выполнены условия второй конструкции, группа* G_K *переставляет компоненты в шести вырожденных слоях расслоения* ϕ, *и* S'/G_K – *рациональная линейчатая поверхность с инвариантом* 2. *Тогда поверхность* S' *содержит* G*-эквивариантную рациональную* (-4)*-кривую. Пусть* $(S', G, \phi') \to (S'', G, \phi'')$ – *стягивание этой кривой, где отображение* $\phi'' : S'' \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ *индуцировано морфизмом* ϕ'. *Поверхность* S'' *представляется во взвешенном проективном пространстве* $\mathbb{P}(3, 2, 1, 1) = \mathbb{P}(u, x, t_0, t_1)$ *уравнением вида*

$$u^2 + F(x, t_0, t_1)Q_1(t_0, t_1) = 0.$$

Отображение ϕ'' *является проекцией*

$$\phi'' : (u : x : t_0 : t_1) \mapsto (t_0 : t_1).$$

Формы F, Q_1 *и действие групп* G *описано в диссертации. Группа* G_K *порождается инволюцией* ι, *действующей по формуле* $\iota : u \mapsto -u$.

Благодарности

Автор благодарен своим научным руководителям члену-корреспонденту РАН $\boxed{\text{В.А. Исковских}}$ и д.ф.-м.н., профессору Ю.Г. Прохорову за постановку задачи и постоянное внимание к работе, а также профессору Д. Бланку и аспиранту А.Л. Фомину за полезные обсуждения.

Автор благодарит участников семинара «Геометрия алгебраических многообразий» и всех сотрудников кафедры за обсуждение результатов диссертации и творческую атмосферу, которая способствовала научной работе.

Работы автора по теме диссертации

[1] В.И. Цыганков, *Уравнения G-минимальных расслоений на коники степени 4*, Вестн. Моск. ун-та, Сер. 1, Математика. Механика, № 2, стр. 39–42 (2010).

[2] В.И. Цыганков, *Уравнения G-минимальных расслоений на коники*, Депонировано в ВИНИТИ 10.06.10, № 359-В2010, С. 1-52.

[3] В.И. Цыганков, *Уравнения G-минимальных расслоений на коники*, Тезисы докладов XVII международной научной конференции Ломоносов - 2010. Секция „Математика и механика“, Москва 2010, С. 71.