На правах рукописи

Полянских Сергей Валерьевич

Электрогидродинамическая устойчивость некоторых микротечений с концентрационной поляризацией

01.02.05 – механика жидкости, газа и плазмы

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико–математических наук

Москва – 2010

Работа выполнена на кафедре ЭММиМ Государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Кубанский государственный университет»

Научный руководитель: д–р. физ.–мат. наук
Е.А. Демёхин

Официальные оппоненты: д–р. физ.–мат. наук, профессор
В.А. Полянский
д–р. физ.–мат. наук
А.А. Шутов

Ведущая организация: Южный федеральный университет

Защита состоится 3 декабря 2010 года в 15 часов 00 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.89 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: 119991, г. Москва, Ленинские горы, д. 1, Главное здание МГУ, механико–математический факультет, аудитория 16–24.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико–математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова.

Автореферат разослан «____» октября 2010 года.

Учёный секретарь
диссертационного совета,
д–р. физ.–мат. наук А.Н. Осипцов

Общая характеристика работы

Актуальность работы. Современный интерес к электрогидродинамике и, в частности, к микротечениям, движимым внешним электрическим полем, связан, прежде всего, с конкретными прикладными задачами и требованием времени – постоянной тенденцией к миниатюризации приборов и устройств. Задачи электрогидродинамики микро– и наномасштабов привлекают большое внимание исследователей в связи с широкой областью их применения, в основном, в нано– и биотехнологиях. Кроме практического имеется также и чисто теоретический интерес к микротечениям в условиях концентрационной поляризации, которые могут порождать когерентные структуры, а также демонстрировать хаотическую динамику в этих масштабах.

Несмотря на обилие экспериментальных и теоретических исследований по данной тематике, внедрение как классических, так и новых приложений электрогидродинамики тормозится недостатком знаний о физических механизмах динамики жидкости во внешнем электрическом поле. Новыми являются задачи электрогидродинамики малых масштабов. В этих задачах доминирующими становятся электрокинетические эффекты и эффекты концентрационной поляризации.

В настоящей работе рассматриваются две задачи современной электрогидродинамики малых масштабов: 1) задача об электроконвекции в ионообменных мембранах; 2) задача о динамике капиллярной струи во внешнем переменном электрическом поле. В обеих задачах решающую роль играют эффекты концентрационной поляризации. Предлагаемые модели дадут качественную картину механизмов потери гидродинамической устойчивости в рассматриваемых задачах, а также позволят теоретически получить необходимые для приложений численные значения параметров смены устойчивости без проведения дорогостоящих экспериментов.

Основной целью диссертационного исследования является теоретическое исследование некоторых появившихся в последнее время вопросов течения и устойчивости жидкости в микромасштабах под действием постоянного и переменного электрического поля в условиях концентрационной поляризации ионов в растворе жидкости.

Для достижения указанной цели необходимо **решить следующие задачи**:

1. Вывести асимптотическую систему уравнений, описывающую двумерную электроконвекцию в ионообменных мембранах.

2. Выявить существование и описать электроконвективную неустойчивость в ионообменных мембранах на нестационарной стадии развития процесса.

3. Вывести асимптотическую систему уравнений, описывающую среднюю динамику капиллярной микроструи в продольном сильноосциллирующем электрическом поле.

4. Теоретически исследовать неустойчивость и распад капиллярной микроструи в продольном сильноосциллирующем электрическом поле.

Научная новизна. При решении поставленных в диссертационной работе задач получены следующие новые результаты, которые **выносятся на защиту:**

1. Вывод асимптотической системы уравнений, описывающей двумерную электроконвекцию в ионообменных мембранах в пределе малого числа Дебая.

2. Вывод промежуточной асимптотики одномерного нестационарного решения задачи об электроконвекции в ионообменных мембранах.

3. Доказательство и исследование неустойчивости этого решения как сценария перехода к электроконвекции в ионообменных мембранах.

4. Исследование неустойчивости и распада капиллярной микроструи в переменном электрическом поле.

Практическое значение. Полученные результаты и выводы об устойчивости исследуемых микротечений, во–первых, помогут определить новые подходы к технологии проектирования и использования полупроницаемых ионообменных мембран и, во–вторых, могут быть использованы в технологиях создания устойчивых микроструй и монодисперсных капель.

Достоверность полученных результатов обусловлена применением классических математических и надёжных численных методов, сопоставлением полученных теоретических результатов с прямым численным счётом, работами других авторов и экспериментами, где это возможно.

Апробация работы. Результаты диссертационного исследования представлялись на девяти научных конференциях:

- Международная конференция "Нелинейные задачи теории гидродинамической устойчивости и турбулентность" ("НеЗаТеГиУс и турбулентность"), г. Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова, 24 февраля–2 марта 2008 г.
- Международная конференция "Microfluidics 2008", г. Болонья (Италия), Болонский университет, 10–12 декабря 2008 г.
- Международная конференция "Современные проблемы математики, механики и их приложений", г. Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова, 30 марта–2 апреля 2009 г.
- Международная конференция "Современные проблемы электрофизики и электрогидродинамики жидкостей", г. Санкт–Петербург, СПбГУ, 22−26 июня 2009 г.
- Международная конференция "Two–phase systems for ground and space applications", г. Новосибирск, Институт теплофизики СО РАН, 6–8 сентября 2009 г.
- XXXIX Уральский семинар "Механика и процессы управления", г. Екатеринбург, УрО РАН, 22–24 декабря 2009 г.
- Международная конференция "Нелинейные задачи теории гидродинамической устойчивости и турбулентность" ("НеЗаТеГиУс и турбулентность"), г. Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова, 28 февраля–7 марта 2010 г.
- XIV Международная конференция "Современные проблемы механики сплошной среды", г. Ростов–на–Дону, г. Азов, ЮФУ, 19–24 июня 2010 г.
- XVI школа–семинар "Современные проблемы аэрогидродинамики", г. Сочи, "Буревестник" МГУ им. М.В. Ломоносова, 6–16 сентября 2010 г.,

а также докладывались и обсуждались на научных семинарах:

- Семинар кафедры аэромеханики и газовой динамики механико–математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова под руководством академика Г.Г. Черного, 18 марта 2010 г.

- Семинар по аэромеханике в НИИ механики МГУ им. М.В. Ломоносова под руководством академика Г.Г. Чёрного, 19 мая 2010 г.

- Семинар лаборатории физико–химической гидродинамики НИИ механики МГУ им. М.В. Ломоносова под руководством доктора физ.–мат. наук, профессора В.А. Полянского, 11 октября 2010 г.

Проведённые исследования были поддержаны научными фондами:

- Российский фонд фундаментальных исследований, грант на участие в конференции “Microfluidics 2008”, проект № 08-01-09309-моб_з (руководитель), 2008–2009 г.

- Российский фонд фундаментальных исследований, грант “Неустойчивость и распыливание жидких капель и струй в переменном электрическом поле”, проект № 08-01-00005-а (исполнитель), 2008–2010 гг.

Доклад на международной конференции “НеЗаТеГиУс и турбулентность” 2008 г. удостоен медали имени академика Г.И. Петрова за лучшую работу конкурса молодых учёных в области гидродинамической устойчивости и турбулентности (регистрационный № 2008–9).

На программный комплекс “Расчёт основных характеристик устойчивости электроконвективного течения в плоских катионообменных мембранах” получено авторское свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2010611247 от 12.02.10.

Публикации и личный вклад автора. Основное содержание и результаты диссертационного исследования изложены в восемнадцати работах [1 – 18], в том числе в четырёх статьях [1 – 4] в рекомендованных ВАК журналах. Работы [5, 8 – 10] выполнены соискателем лично. В работах [1 – 4], написанных в соавторстве, автору диссертации принадлежит вывод основных соотношений, формул и построение основных алгоритмов решения задачи, а в работах [6, 7, 11 – 18] – составление комплексов программ, получение и анализ результатов. Все положения, выносимые на защиту, отражены в работах [1 – 18] и получены лично соискателем.

Структура и объём работы. Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения, списка цитируемой литературы (147 наименований) и пяти приложений. Общий объём диссертации 153 страницы, включая 36 рисунков и три таблицы.

Содержание работы

Во введении кратко описаны основные проблемы, обосновывается их актуальность, формулируется цель работы и научная новизна, дана информация об апробации работы, публикациях и личном вкладе автора.

В первой главе описывается модель бинарного ионного раствора, принятая в работе в качестве основной, представлен обзор теоретических и экспериментальных работ в изучаемой области.

В п. 1.1 формулируются основные уравнения, описывающие динамику ионной жидкости, помещённой во внешнее электрическое поле. Жидкость предполагается вязкой ньютоновской. С физико–химической точки зрения жидкость предполагается раствором простого бинарного электролита (коэффициенты диффузии отрицательных и положительных ионов равны, зарядовые числа по модулю равны единице) в случае полной диссоциации при отсутствии химических реакций и эффектов ионной рекомбинации. Электродинамическая часть задачи описывается двумя уравнениями переноса ионов для ионных концентраций и уравнением Пуассона для потенциала электрического поля. Динамика жидкости описывается уравнениями Навье–Стокса и неразрывности. Указанная система уравнений используется в работе в качестве основной как в задаче об электроконвекции, так и в задаче о динамике капиллярной струи. Различия возникают только в постановках краевых условий и выборе характерных масштабов.

В п. 1.2 приводится краткий обзор исследований, касающихся задачи об электроконвекции в ионообменных мембранах. Указаны работы, в которых теоретически и экспериментально исследуется электрогидродинамический сценарий возникновения сверхпредельных токов в мембранах. Приводится краткое описание основных методов и идей, позволивших Рубинштейну и соавт. теоретически исследовать сценарий возникновения электроконвекции как неустойчивости стационарного одномерного решения задачи. Приведены недавние работы H.–C. Chang и соавт., в которых экспериментально наблюдался новый класс одномерных нестационарных решений, теряющих устойчивость.

В п. 1.3 даётся обзор экспериментальных и теоретических работ, посвящённых динамике капиллярных струй во внешнем электрическом поле. В подавляющем большинстве работ рассматривается случай посто-

янного поля. В недавних немногочисленных экспериментах H.–C. Chang, G. Gneist, F. Malloggi и соавт. отмечен ряд преимуществ переменного высокочастотного поля перед постоянным: 1) наличие нового контрольного параметра – частоты колебаний; 2) электронейтральность образующихся при распылении капель жидкости; 3) отсутствие при достаточно больших частотах колебания (более 10 кГц) нежелательных химических реакций, сопровождающих процесс. Отсутствие соответствующих теоретических исследований в некоторой степени восполняется настоящей работой.

Вторая глава посвящена исследованию нового класса одномерных нестационарных решений задачи об электроконвекции в ионообменных мембранах. Выявляется промежуточная асимптотика решений нестационарной одномерной задачи на промежуточных временах. Приводится численное обоснование промежуточной асимптотики и приближённое решение одномерной задачи на промежуточных временах.

До сих пор теоретически исследовалось только стационарное одномерное равновесие, которое, согласно проведённому численному счёту, устанавливается через несколько минут реального времени после включения разности потенциалов $\Delta\tilde{V}$ между мембранами. Тем не менее, согласно недавним экспериментам, достичь установления одномерному решению мешает электрогидродинамическая неустойчивость, возникающая уже через несколько секунд и разрушающая одномерное решение (см. рис. 1). Таким образом, неустойчивость наступает задолго установления во времени одномерного решения задачи, что указывает на важность рассмотрения одномерной задачи, изучения свойств её решений и их устойчивости в полной нестационарной постановке.

В п. 2.1 приводится полная постановка задачи об электроконвекции в ионообменных мембранах, включающая основные уравнения п. 1.1, дополненные соответствующими краевыми условиями на стенках и начальными условиями. Уравнения Навье–Стокса берутся в стоксовском приближении. На поверхностях мембран задаётся концентрация положительных ионов, условие непроницаемости для отрицательных ионов, разность потенциалов и условие прилипания для скорости жидкости. Приводятся характерные значения параметров задачи.

В п. 2.2 описан диапазон времён, в котором решается задача. В результате эффектов концентрационной поляризации в окрестностях электродов ионы быстро формируют тонкие пограничные заряженные

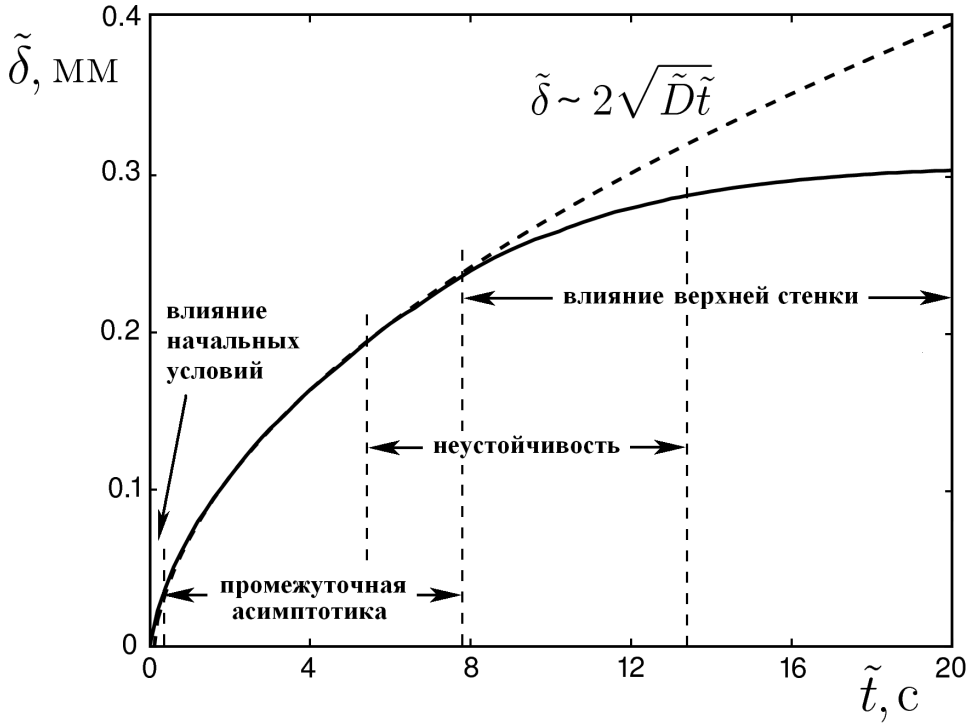


Рис. 1. Типичная эволюция толщины диффузионного слоя $\tilde{\delta}$: сплошным изображён численный расчёт одномерной задачи

слои. Известно, что изначально стационарное распределение ионных концентраций в жидкости при включении разности потенциалов становится нестационарным по времени. В рассматриваемом случае предельных и сверхпредельных токов диффузионный слой около катода, $\tilde{y}=0$, расширяется с течением времени, пока не почувствует влияние анода, $\tilde{y}=1$, либо не разрушится из–за возникающей гидродинамической неустойчивости раствора (см. рис. 1). Задача рассматривается на промежуточных временах,

$$\tilde{\lambda}_d^2/(4\tilde{D}) \ll \tilde{t} \ll \tilde{L}^2/(4\tilde{D}), \qquad (1)$$

где $\tilde{\lambda}_d = (\tilde{\epsilon}\tilde{R}\tilde{T}/(\tilde{F}^2\tilde{c}_\infty))^{1/2}$ – дебаевская толщина, $\tilde{\epsilon}$ – диэлектрическая проницаемость раствора, $\tilde{R}$ – газовая постоянная, $\tilde{F}$ – постоянная Фарадея, $\tilde{T}$ – абсолютная температура, $\tilde{D}$ – коэффициент диффузии ионов, $\tilde{L}$ – расстояние между мембранами. На временно́м интервале (1) влияние начальных условий уже не существенно, а влияние анода ещё пренебрежимо мало. Задача обезразмеривается с помощью теплового потенциала, $\tilde{\Phi}_e = \tilde{R}\tilde{T}/\tilde{F}$, характерной ионной концентрации, $\tilde{c}_\infty$, и некоторого характерного времени, $\tilde{t}_0$.

В п. 2.3 показано, что решения одномерной нестационарной задачи на исследуемом временно́м интервале (1) допускают промежуточную

асимптотику, попадая на двухпараметрическое семейство решений упрощённой задачи (параметры: число Дебая ε и безразмерная эффективная разность потенциалов $\Delta\Phi$) (см. рис. 2). Последняя получается из исходной постановки переходом к переменным

$$\tau = t, \quad \eta = \frac{\tilde{y}}{\tilde{\delta}}, \quad \varepsilon = \frac{\tilde{\lambda}_d}{\tilde{\delta}}, \quad \Delta\Phi = \Delta V - \frac{j}{2}$$

и отбрасыванием производных по τ. Здесь $\tilde{\delta} = 2\sqrt{\tilde{D}\tilde{t}}$ – характерная толщина нестационарного диффузионного слоя, $j = \tilde{j}\tilde{L}/(\tilde{D}\tilde{F}\tilde{c}_\infty)$ – безразмерный электрический ток через мембрану, $\tilde{j}$ – размерный ток, $\Delta V = \Delta\tilde{V}/\tilde{\Phi}_e$.

Приближённое решение упрощённой промежуточно–асимптотической задачи получено в **п. 2.4** в явном виде в пределе малого числа Дебая с помощью обобщения метода декомпозиции, что позволило сократить число параметров задачи до одного. Таким образом, в пределе $\varepsilon \ll 1$ на промежуточных временах (1) решения одномерной нестационарной задачи полностью описываются асимптотической универсальной вольтамперной характеристикой

$$J \operatorname{erfc}\left[\left(\frac{9\Delta F^2}{8J}\right)^{1/3}\right] = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \exp\left[-\left(\frac{9\Delta F^2}{8J}\right)^{2/3}\right], \tag{2}$$

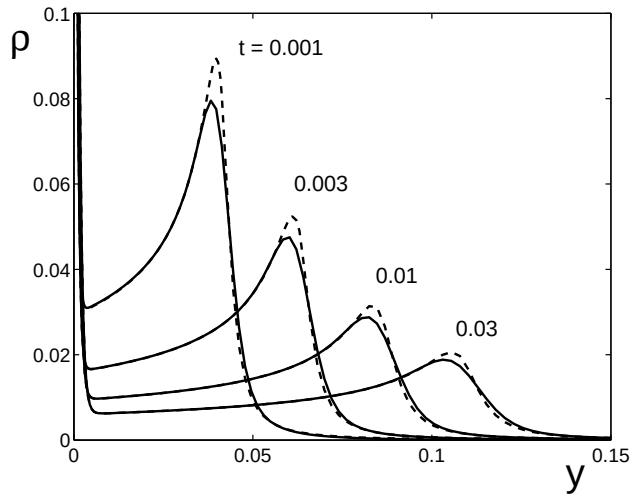
где $J = \tilde{j}\tilde{\delta}/(\tilde{D}\tilde{F}\tilde{c}_\infty)$ – электрический ток в новых переменных, $\Delta F = \varepsilon\Delta\Phi$ (см. рис. 3).

Третья глава посвящена выводу приближённой системы уравнений, описывающей двумерную электроконвекцию в ионообменных мембранах в пределе малого числа Дебая ε, а также исследованию с её помощью устойчивости полученного одномерного решения задачи на промежуточных временах.

В п. 3.1 асимптотический метод декомпозиции обобщается на нестационарную двумерную задачу в пределе малого числа Дебая. Характерные величины продольной и поперечной координат, соответствующих компонент скорости и давления принимаются равными

$$\tilde{l}_0 = \frac{1}{\tilde{\alpha}_0}, \quad \tilde{\delta} = 2\sqrt{\tilde{D}\tilde{t}}, \quad \tilde{U}_0 = \frac{\tilde{D}}{\tilde{l}_0}, \quad \tilde{V}_0 = \frac{\tilde{D}\tilde{\delta}}{\tilde{l}_0^2}, \quad \tilde{P}_0 = \frac{\tilde{D}\tilde{\mu}}{\tilde{\delta}^2}$$

соответственно, где $\tilde{\alpha}_0$ – характерное волновое число возмущения $\tilde{\mu}$ – динамическая вязкость жидкости. Время $\tilde{t}$, концентрации $\tilde{c}^{\pm}$ и электрический



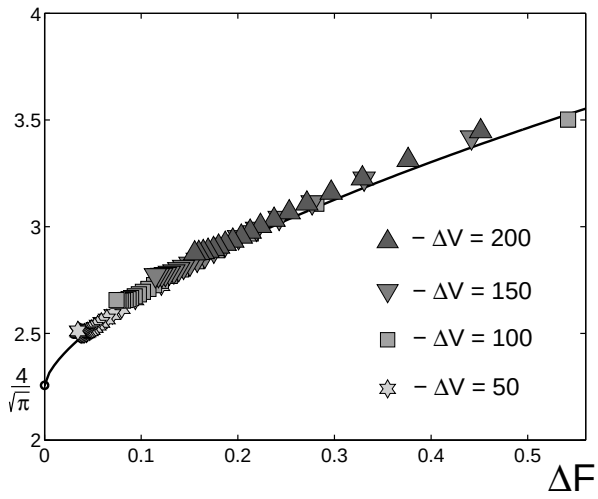


Рис. 2. Профили плотности заряда $\rho = c^+ - c^-$ в различные моменты времени: сравнение численного решения (сплошные линии) с промежуточной асимптотикой (пунктир)

Рис. 3. Универсальная асимптотическая ВАХ (2) (сплошная линия) и численный счёт ВАХ полной задачи по времени (маркеры) на промежуточных временах

потенциал $\tilde{\Phi}$, как и в одномерном случае, относятся к $\tilde{t}_0$, $\tilde{c}_\infty$ и $\tilde{\Phi}_e$ соответственно. Вводятся новые переменные

$$\tau = t, \quad \xi = x, \quad \eta = \frac{\tilde{y}}{\tilde{\delta}}$$

и зависящие от времени волновое число $\alpha = \tilde{\delta}\tilde{\alpha}_0$ и число Дебая $\varepsilon = \tilde{\lambda}_d/\tilde{\delta}$. Вводится функция тока, $U = \partial\Psi/\partial\eta$, $V = -\partial\Psi/\partial x$, и новые переменные

$$K = c^+ + c^-, \qquad F = \varepsilon\left(\Phi - \frac{J\eta}{2}\right), \qquad H = \frac{dF}{d\eta}.$$

В обозначениях

$$\frac{D}{Dt} = 4t\frac{\partial}{\partial t} - 2\eta\frac{\partial}{\partial\eta} + \alpha^2\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\eta}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial\Psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\eta}\right),$$

$$\nabla = \left(\alpha\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial\eta}\right), \qquad \nabla' = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial\eta}\right)$$

декомпозиция полной системы уравнений в области пространственного заряда приводит к уравнениям

$$\begin{gathered} K \equiv 0, \qquad \nabla\cdot\left(\nabla^2 F\nabla F\right) = 0, \qquad \nabla^4\Psi = \frac{\varkappa}{\varepsilon^2}\nabla'\times\left(\nabla^2 F\nabla' F\right), \\ \eta = 0: \quad \Psi = \frac{\partial\Psi}{\partial\eta} = 0, \quad F = 0. \end{gathered} \tag{3}$$

Декомпозиция системы в диффузионном электронейтральном слое приводит к уравнениям

$$F \equiv \Delta F, \qquad H \equiv 0, \qquad \frac{DK}{Dt} = \nabla^2 K, \qquad \nabla^4 \Psi = 0,$$
$$\eta \to \infty : \quad \Psi \to 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \to 0, \quad K \to 2. \tag{4}$$

Здесь $\varkappa = \tilde{\epsilon}\tilde{\Phi}_e^2/(\tilde{\mu}\tilde{D})$ – постоянная, описывающая физические свойства раствора. Для расчётов бралось $\varkappa = 0.2$ (раствор NaCl в воде).

На границе $\eta = \eta_m$ зоны пространственного заряда используются условия непрерывности неизвестных задачи вместе с несколькими первыми производными.

Уравнения (3)–(4) представляют собой упрощённую асимптотическую систему уравнений, описывающую двумерную электроконвекцию в пределе малого ε. Показано, что выведенная модель справедлива в квазиодномерном приближении при $\alpha \lesssim \eta_m^{-1}$, $\left(\varepsilon \ln \varepsilon^{-1}\right)^{2/3} \ll \eta_m \ll \varepsilon^{2/7}$.

П. 3.2 посвящён исследованию линейной устойчивости найденной промежуточной асимптотики одномерного решения задачи. На одномерное решение накладываются двумерные, периодические по продольной координате x малые возмущения, растущие по времени степенным образом как τ^λ. Задача линеаризовывается, давая уравнения на возмущения неизвестных в области пространственного заряда и основную спектральную задачу в диффузионном электронейтральном слое.

Задача на возмущения неизвестных в области пространственного заряда полностью разрешается в терминах рядов Тейлора по переменной $\zeta = \alpha\,(\eta_m - \eta)$. Это, в частности, приводит к универсальности зависимости компонент скоростей проскальзывания от внешних параметров:

$$\hat{V}_m = \frac{2\varkappa}{\varepsilon^2 \alpha^4}\, G\,(r)\, v\,(r)\, \hat{J}, \quad \hat{U}_m = -\frac{2i\varkappa}{\varepsilon^2 \alpha^3}\, G\,(r)\, u\,(r)\, \hat{J}, \tag{5}$$

где G, u, v – некоторые универсальные затабулированные функции, зависящие только от $r = \alpha\eta_m$, $\hat{J}$ – возмущение тока J, $i = \sqrt{-1}$. Соотношение (5) даёт обобщение известной формулы Духина–Рубинштейна для скорости проскальзывания, справедливое не только в длинноволновом приближении по отношению к толщине зоны пространственного заряда.

Гидродинамическая часть линеаризованной задачи может быть решена во всём полупространстве $\eta > 0$ сразу после решения задачи в области заряда. Линии тока жидкости, определяемые как линии уровня функции Ψ,

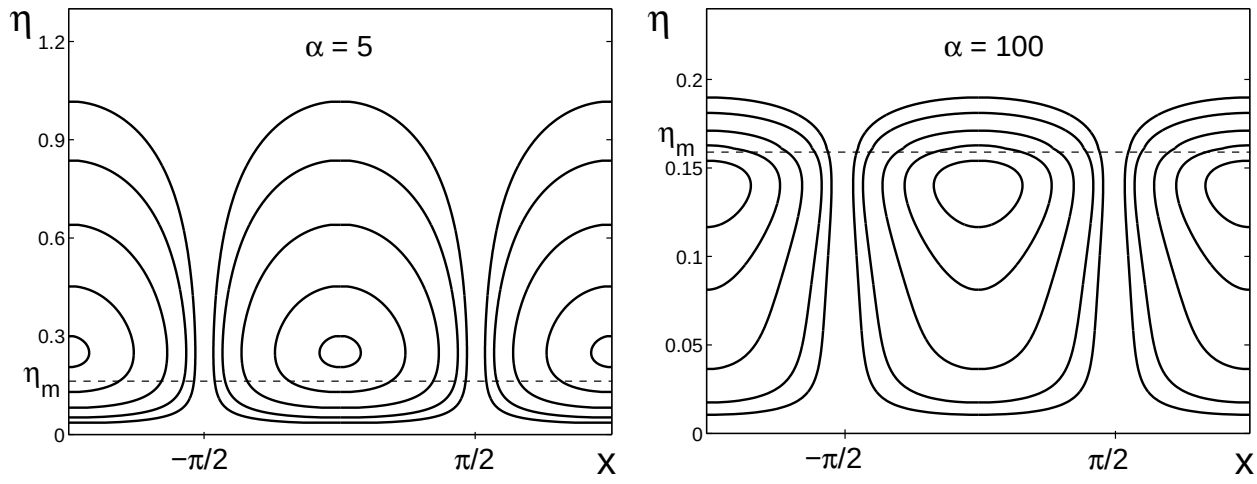
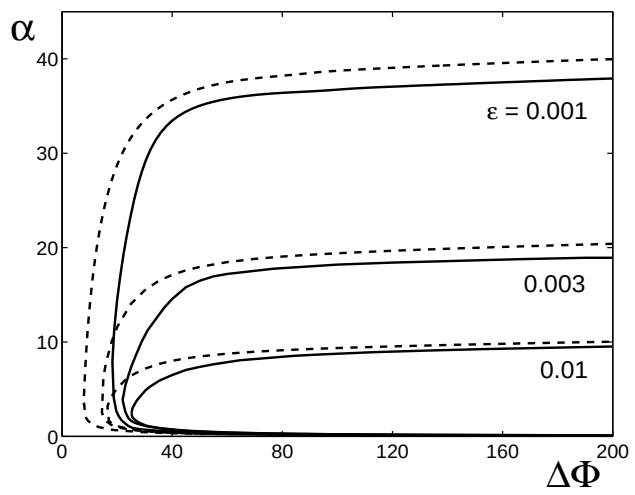


Рис. 4. Электроконвективные вихри

предсказывают появление конвективных ячеек в случае развития неустойчивых возмущений (см. рис. 4).

Численное интегрирование главной спектральной задачи в диффузионной области методом стрельбы дало кривые нейтральной устойчивости (см. рис. 5). Ошибка теории особенно видна в окрестности носика нейтральной кривой, соответствующего переходным процессам между первым и вторым родом, где предложенная асимптотика не точна. Вдали от носика относительная ошибка стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$.

Тот факт, что коэффициенты спектральной задачи зависят от времени, в корне меняет саму интерпретацию кривых нейтральной устойчивости. Отношение $k = \alpha/\varepsilon^{-1} = \tilde{\alpha}_0\tilde{\lambda}_d$ не зависит от времени, следовательно, каждая прямая линия в плоскости параметров $(\varepsilon^{-1}, \alpha)$, выходящая из нуля с наклоном k, характеризует отдельный сценарий эволюции во времени наложенного возмущения с размерным (постоянным!) волновым числом $\tilde{\alpha}_0$. В зависимости от соответствующего возмущению наклона k возможны два качественно различных сценария эволюции: 1) устойчивый, когда возмущение неограниченно затухает; 2) неустойчивый, когда возмущение сначала затухает, затем, войдя в неустойчивую область, возрастает и, наконец, выйдя и неустойчивой области, снова начинает затухать (см. рис. 6). В действительности же на данном этапе эволюции возмущений начинают играть роль нелинейные эффекты, не дающие возмущению исчезнуть. Предложенная теория позволяет, в частности, оценить время пребывания неустойчивых возмущений в области неустойчивости: $\Delta\tilde{t} \sim (k^4Q^6 - R^2)/(4\tilde{\alpha}_0^2\tilde{D})$, где Q, R – затабулированные величины, зависящие только от $\Delta\Phi$.



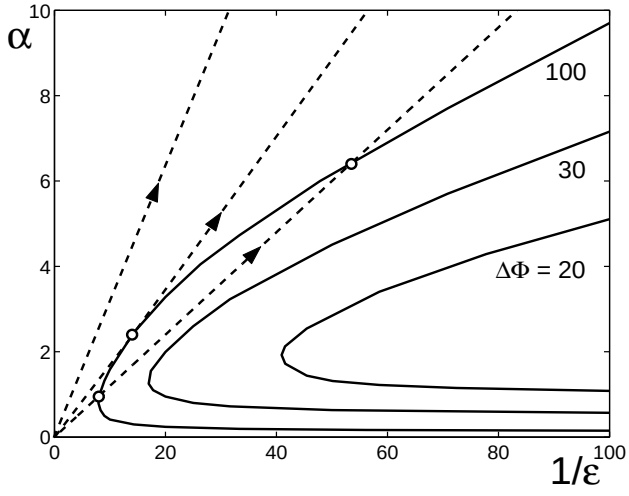


Рис. 5. Кривые нейтральной устойчивости: сравнение асимптотики (пунктир) с численным решением (сплошные линии)

Рис. 6. Кривые нейтральной устойчивости (сплошные линии) и прямые эволюции возмущений (пунктир)

Четвёртая глава посвящена исследованию устойчивости и распада капиллярной струи, находящейся во внешнем переменном электрическом поле. Вдали от жидкости поле предполагается ориентированным по оси невозмущённой струи.

В п. 4.1 приводится осесимметричная постановка задачи, включающая основные уравнения из п. 1.1 в жидкой фазе и уравнение Лапласа для электрического потенциала в газе (газ предполагается идеальным диэлектриком, а жидкость – раствором простого бинарного электролита). Замыкают постановку соответствующие начальные условия и краевые условия на границе раздела и в бесконечности. На свободной поверхности задаются условия отсутствия тока, условие непрерывности электрического потенциала и скачка его нормальной производной из–за разностей диэлектрических проницаемостей фаз, условия баланса касательных и нормальных напряжений и кинематическое условие. Вдали от струи задаются простые гармонические колебания внешнего электрического поля. Система приводится к безразмерному виду отнесением длин, концентраций, электрического потенциала, скоростей, времени и давления к величинам

$$\tilde{r}_0, \quad \tilde{c}_\infty, \quad \tilde{\Phi}_e = \frac{\tilde{R}\tilde{T}}{\tilde{F}}, \quad \tilde{U}_0 = \left(\frac{\tilde{\gamma}}{\tilde{\rho}\tilde{r}_0}\right)^{1/2}, \quad \tilde{t}_0 = \frac{\tilde{r}_0}{\tilde{U}_0}, \quad \tilde{P}_0 = \tilde{\rho}\tilde{U}_0^2$$

соответственно, где $\tilde{r}_0$ – радиус невозмущённой струи, $\tilde{c}_\infty$ – равновесная концентрация ионов в невозмущённой струе, $\tilde{\rho}$ – плотность жидкости, $\tilde{\gamma}$ – коэффициент поверхностного натяжения.

Задача описывается семью безразмерными параметрами

$$\mathrm{Pe} = \frac{\tilde{U}_0\tilde{r}_0}{\tilde{D}}, \quad \mathrm{Re} = \frac{\tilde{\rho}\tilde{r}_0\tilde{U}_0}{\tilde{\mu}}, \quad \mathrm{Bo} = \frac{\tilde{\Phi}_e^2}{\tilde{\Phi}_c^2}, \quad \varepsilon = \frac{\tilde{\lambda}_d}{\tilde{r}_0}, \quad \delta = \frac{\tilde{\epsilon}_g}{\tilde{\epsilon}},$$
$$E'_\infty = \frac{\tilde{r}_0\tilde{E}_\infty}{\tilde{\Phi}_e}, \quad \omega = \tilde{\omega}\tilde{t}_0,$$

где Pe – число Пекле, Re – число Рейнольдса, Bo – электрическое число Бонда, $\tilde{\Phi}_c = (\tilde{\gamma}\tilde{r}_0/\tilde{\epsilon})^{1/2}$ – характерный "капиллярный потенциал".

Для асимптотического упрощения задачи используются основные предположения

$$\varepsilon \ll 1, \quad \varepsilon^2\mathrm{Pe} \ll 1, \tag{6}$$

означающие соответственно малость числа Дебая, основанного на радиусе струи, и малость характерного электрического времени релаксации по сравнению с внешним гидродинамическим характерным временем: $\varepsilon^2\mathrm{Pe} = 2\tilde{t}_e/\tilde{t}_0$, $\tilde{t}_e = \tilde{\epsilon}/\tilde{\kappa} = \tilde{\lambda}_d^2/(2\tilde{D})$ ($\tilde{\kappa}$ – средняя удельная электрическая проводимость раствора). Эти факты естественны для микроструй и обычно имеют место в экспериментах. Предположения (6) позволяют заменить решение задачи в двойном ионном слое некоторыми интегральными соотношениями на границе раздела, выражающими закон сохранения поверхностного электрического заряда и связь между величинами заряда, потенциала и его производными на границе раздела и за двойным ионным слоем.

Окончательная постановка асимптотически упрощённой задачи включает в себя уравнения Навье–Стокса без внешней движущей силы, уравнение неразрывности, уравнение Лапласа для электрического потенциала внутри и вне струи и граничные соотношения. Таким образом, внешнее электрическое поле влияет на динамику струи только посредством создания дополнительных напряжений на её свободной поверхности. Стоит особо отметить, что предложенная постановка не требует задание извне поверхностного заряда σ, который предполагается индуцированным внешнем полем и малыми возмущениями струи и находится в процессе решения задачи.

Особое внимание в работе уделено случаю высокочастотных колебаний, имеющему первостепенное значение для приложений. В задаче существует два характерных времени: гидродинамическое $\tilde{t}_0 = (\tilde{\rho}\tilde{\gamma}^{-1}\tilde{r}_0^3)^{1/2}$

(медленное время), введённое выше в качестве базисного, и электрическое время релаксации $\tilde{t}_e = \tilde{\epsilon}/\tilde{\kappa}$ (быстрое время). Соответственно этому возникают два безразмерных параметра, полученные отнесением размерной частоты к этим временам: $\omega = \tilde{\omega}\tilde{t}_0$ – основная (быстрая) и $\Omega = \tilde{\omega}\tilde{t}_e$ – модифицированная (медленная) частота колебаний. Для высокочастотных колебаний принимается, что размерная частота имеет порядок величины, обратной характерному времени электрической релаксации, $\tilde{\omega} = O(1/\tilde{t}_e)$, что составляет порядка 1−1000 кГц и полностью согласуется с известными экспериментами. В безразмерном виде с учётом (6) это условие примет вид

$$\Omega = O(1), \qquad \omega = O\left(\frac{1}{\varepsilon^2 \mathrm{Pe}}\right) \gg 1.$$

Для асимптотического упрощения задачи в случае высокочастотных колебаний используется метод усреднения, основанный на гипотезе о разделении механического движения на медленное среднее и малое по амплитуде быстрое колебательное,

$$r = \langle r \rangle + \mathcal{R}e\left(\widetilde{r} e^{i\omega t}\right).$$

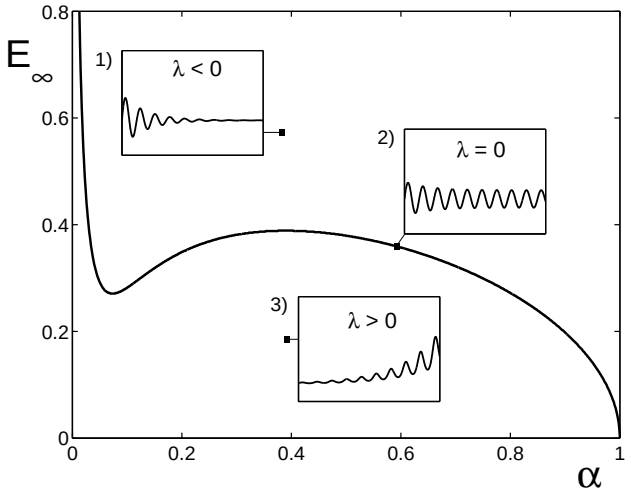
В случае колебаний внешнего поля с произвольной частотой электрические и механические величины, вообще говоря, содержат как колебательную, так и среднюю составляющую. Для высокочастотных колебаний, $\omega \gg 1$, колебательная часть механических величин, равно как и средняя часть электрических, исчезает как $O(1/\omega)$. При этом средние части механических величин порождаются наложением электрических вибрационных полей из–за нелинейности в нормальных и касательных электрических напряжениях:

$$\begin{gathered} \langle P_e \rangle = \left(\frac{1}{\delta} - 1 + \frac{1}{\delta\Omega^2}\right)\left|\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial n}\right|^2 + (1-\delta)\left|\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial s}\right|^2, \\ \langle S_e \rangle = \frac{2}{\Omega}\mathcal{I}m\left(\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial n}\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial s}^*\right). \end{gathered} \tag{7}$$

Выделение колебательной части в граничных соотношениях, связывающих плотность электрического заряда σ с потенциалом Φ и его производными, приводит к явным соотношениям, связывающим их комплексные амплитуды

$$y = h: \quad \widetilde{\sigma} = \frac{i}{\Omega}\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial n}, \quad \left(1 - \frac{i}{\Omega}\right)\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial n} = \delta\frac{\partial\widetilde{\Phi}_g}{\partial n}, \quad \widetilde{\Phi} = \widetilde{\Phi}_g, \tag{8}$$

где $\widetilde{\Phi}_g$ – значение комплексной амплитуды колебаний электрического потенциала в газовой фазе. Уравнения гидродинамики для средних компонент



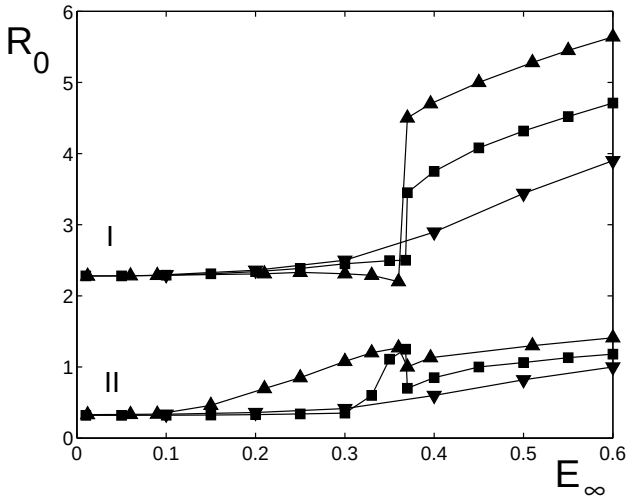


Рис. 7. Характерная кривая нейтральной устойчивости (сплошная линия) и характерные временны́е зависимости возмущений (на вставках): 1) устойчивый; 2) нейтрально устойчивый; 3) неустойчивый случаи

Рис. 8. Скачок радиуса образующихся главных капель (I) и капель–сателлитов (II) согласно прямому численному счёту для $\mathrm{Re}=1$, $1/\delta=24$: ▲ – $\Omega=0.3$; ■ – $\Omega=0.5$; ▼ – $\Omega=1$

скоростей жидкости, уравнения Лапласа для комплексных амплитуд колебаний электрического потенциала и соотношения (7)–(8) составляют новую модель, описывающую среднюю динамику капиллярной струи в сильноосциллирующем электрическом поле.

П. 4.2 посвящён исследованию устойчивости одномерного решения задачи по отношению к двумерным, периодическим по осевой координате x малым возмущениям капиллярной струи. Анализ устойчивости проводится как для случая высокочастотных колебаний, так и для полной постановки осесимметричной задачи. Для обоих случаев выведены дисперсионные соотношения, дающие зависимость коэффициента линейного роста от волнового числа возмущения и остальных параметров задачи.

В п. 4.3 обсуждаются результаты линейной теории, построенной в п. 4.2, а также приводится прямой численный счёт нелинейной стадии эволюции неустойчивого возмущения вплоть до схлопывания струи. В случае высокочастотных колебаний задача линейной устойчивости описывается четырьмя внешними безразмерными параметрами: Re, $E_\infty=\tilde{r}_0\tilde{E}_\infty/\tilde{\Phi}_c$, Ω, δ и одним внутренним – волновым числом возмущения α. Параметр δ берётся равным $1/24$, что соответствует 95% этанолу, чаще всего использующемуся в экспериментах. Числа Рейнольдса предполагаются малыми, $\mathrm{Re}=10^{-3}$–1,

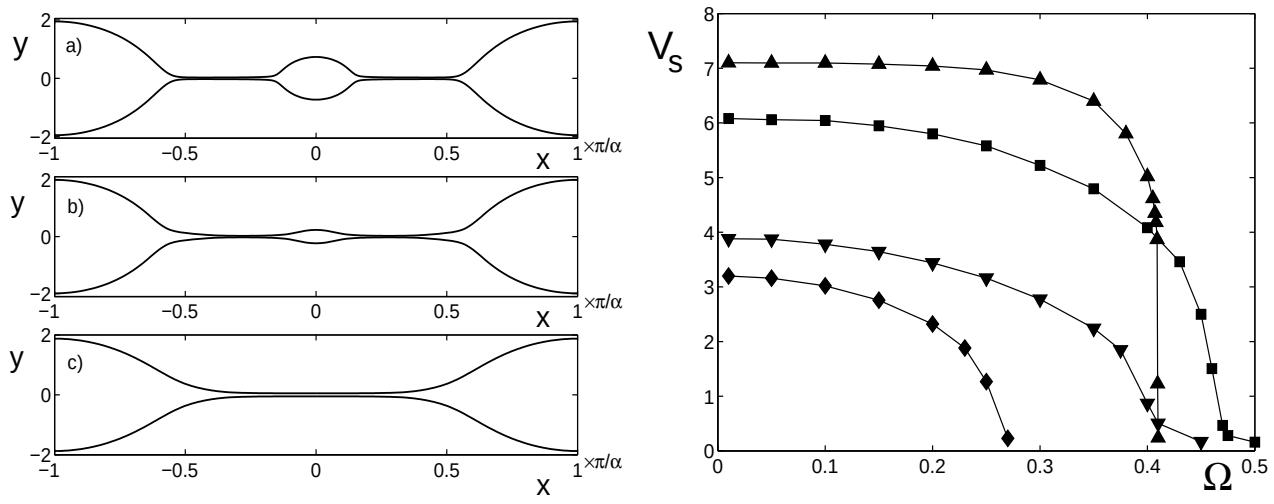


Рис. 9. Профили струи незадолго до схлопывания при $\mathrm{Re}=1$, $E_\infty=0.3$, $1/\delta=24$, $\alpha=0.5$: a) $\Omega=0.1$; b) $\Omega=0.39$; c) $\Omega=1$

Рис. 10. Рассчитанная численно зависимость объёма капли–сателлита от модифицированной частоты при $1/\delta=24$: ▲ – $\mathrm{Re}=0.5$, $E_\infty=0.3$; ■ – $\mathrm{Re}=1$, $E_\infty=0.3$; ▼ – $\mathrm{Re}=1$, $E_\infty=0.25$; ♦ – $\mathrm{Re}=0.5$, $E_\infty=0.2$

что характерно для микроструй. Задача нейтральной устойчивости, $\lambda=0$, от Re не зависит (см. рис. 7).

Имеется довольно нетривиальная зависимость параметров устойчивости от модифицированной частоты Ω. Существует три критических значения Ω_0, Ω_1 и Ω_2, при переходе через которые происходит качественная перестройка кривых нейтральной устойчивости и кривых максимального роста. В частности, в некотором диапазоне Ω наблюдаются наличие двух интервалов неустойчивости по волновому числу возмущения: рэлеевского и нового длинноволнового, примыкающего к $\alpha=0$. Новый интервал неустойчивости в отличие от рэлеевского не может быть полностью подавлен, но может быть сколь угодно уменьшен (вместе с соответствующими коэффициентами роста) увеличением амплитуды колебаний. Для основных характеристик новой неустойчивости (правой границы интервала неустойчивости, наиболее опасного волнового числа возмущения и соответствующего ему коэффициента роста) получены удобные асимптотические формулы.

В некотором диапазоне частот наблюдается конкуренция двух максимумов коэффициентов роста, сопровождающаяся скачком наиболее опасного волнового числа возмущения. Последний порождает скачок образующихся в результате распада струи капель, что подтвердил численный эксперимент (см. рис. 8).

Численный счёт также показал, что размер капель–сателлитов (вторичных капель, образующихся между главными) может быть значительно уменьшен регулированием модифицированной частоты Ω (см. рис. 9 и 10). Так, для значений Re и E_∞, приведённых на рис. 10, объём сателлитов может быть уменьшен в 15−40 раз при подходящем выборе Ω. Таким образом, дополнительный контрольный параметр задачи – частота колебаний – позволяет уменьшить дисперсность капель по размеру до 40 раз.

В п. 5 перечислены основные результаты диссертации согласно пунктам, выносимым на защиту.

В Приложении приводятся некоторые дополнения, разъяснения и обоснования по задаче об электроконвекции в ионообменных мембранах и задаче о динамике капиллярной струи в переменном электрическом поле. В приложении A приводятся подробности полуэмпирического обобщения на двумерный случай метода декомпозиции, обсуждаются границы его применимости. В приложениях B и C приводятся длинноволновые и коротковолновые асимптотики электроконвекции. В приложении D доказывается устойчивость капиллярной струи в переменном электрическом поле по отношению к неосесимметричным возмущениям. Приложение E посвящено описанию квазиодномерной модели динамики капиллярной струи, использовавшейся для численного анализа задачи и вывода упрощённых дисперсионных соотношений в длинноволновом приближении.

Основные выводы и результаты работы

1. С помощью обобщения метода “декомпозиции” на нестационарный многомерный случай выведена асимптотическая система уравнений, описывающая двумерную электроконвекцию в ионообменных мембранах в пределе малого числа Дебая.

2. Впервые объяснена и описана промежуточная асимптотика одномерного нестационарного решения задачи об электроконвекции в ионообменных мембранах.

3. Впервые показано, что потеря устойчивости одномерного решения и переход к режиму электроконвекции происходит на нестационарном этапе действия промежуточной асимптотики.

4. Впервые выведена приближённая система уравнений, описывающих среднюю динамику капиллярной микроструи в высокочастотном тангенциальном электрическом поле. Исследована линейная устойчивость и распад струи:

   4.1 показано, что при увеличении напряжённости переменного электрического поля происходит неполная стабилизация струи: в окрестности малых волновых чисел возмущения всегда остаётся интервал неустойчивых волновых чисел;

   4.2 установлено, что возможно одновременное существование двух наиболее опасных длин возмущения; при электрораспылении они могут приводить к двум совершенно разным размерам образующихся капель, отличающимся более, чем в 10 раз;

   4.3 показано, что размер капель–сателлитов может быть значительно уменьшен (вплоть до 40 раз) по отношению к размеру главных капель регулированием частоты колебаний поля.

Список работ, опубликованных по теме диссертации

1. ***Демёхин Е.А., Полянских С.В.*** **Неустойчивость струи жидкости в переменном электрическом поле высокой частоты // Прикладная механика и техническая физика. 2009. Т. 50. № 5. С. 56–66.**

2. ***Демёхин Е.А., Полянских С.В.*** **Устойчивость струи вязкой жидкости в переменном электрическом поле высокой частоты // Прикладная механика и техническая физика. 2010. Т. 51. № 1. С. 39–53.**

3. ***Демёхин Е.А., Полянских С.В.*** **Устойчивость микроструи вязкой жидкости в постоянном и переменном электрическом поле // Известия РАН. МЖГ. 2010. № 5. С. 49–65.**

4. ***Калайдин Е.Н., Полянских С.В., Демёхин Е.А.*** **Автомодельные решения в ионообменных мембранах и их устойчивость // Доклады РАН. 2010. Т. 434. № 4. С. 476–480.**

5. *Полянских С.В.* Бифуркация валов и гексагональных структур при электроконвекции // Международная конференция “Нелинейные задачи теории гидродинамической устойчивости и турбулентность”. Тезисы докладов. М.: Изд–во Московского университета, 2008. С. 126.

6. *Polyanskikh S.V., Demekhin E.A., Shapar E.M.* Jet instability in high–frequency alternating electric fields // 1st European Conference on Microfluidics “Microfluidics 2008”. Book of abstracts. Bologna (Italy), 2008. P. 100.

7. *Polyanskikh S.V., Demekhin E.A.* Stability of non–axisymmetric electrolyte jet in high–frequency AC electric field // 4th International Topical Team Workshop “Two–phase systems for ground and space applications”. Book of abstracts. Novosibirsk, 2009. P. 124.

8. *Полянских С.В.* Неустойчивость и бифуркации в задаче о распаде струи вязкой жидкости в переменном электрическом поле // IX международная конференция “Современные проблемы электрофизики и электрогидродинамики жидкостей”. Сборник докладов. СПб.: Изд–во СПбГУ, 2009. С. 154–157.

9. *Полянских С.В.* Коротковолновая асимптотика в задаче об электроконвекции в плоских катионообменных мембранах // XXXIX Уральский семинар “Механика и процессы управления”. Сборник научных трудов. Екатеринбург: УрО РАН, 2009. С. 172–179.

10. *Полянских С.В.* Влияние амплитуды и частоты колебаний внешнего электрического поля на устойчивость жидкой струи // Международная конференция “Современные проблемы математики, механики и их приложений”. Тезисы докладов. М.: Изд–во Московского университета, 2009. С. 294–295.

11. *Polyanskikh S.V., Demekhin E.A.* Stability of non–axisymmetric electrolyte jet in high–frequency AC electric field // Microgravity Sci. Technol. 2009. V. 21. Supplementary Issue № 1. P. 325–329.

12. *Demekhin E.A., Polyanskikh S.V.* Instability of slender liquid jet in AC electric field of arbitrary frequency // Microgravity Sci. Technol. 2010. V. 22. № 3. P. 369–375.

13. *Гусарчук А.Н., Полянских С.В., Демёхин Е.А.* Об электроконвективной неустойчивости // Международная конференция “Нелинейные задачи теории гидродинамической устойчивости и турбулентность”. Тезисы докладов. М.: Изд–во Московского университета, 2010. С. 59–60.

14. *Полянских С.В., Демёхин Е.А.* Устойчивость струи электролита в переменном электрическом поле произвольной частоты // Международная конференция “Нелинейные задачи теории гидродинамической устойчивости и турбулентность”. Тезисы докладов. М.: Изд–во Московского университета, 2010. С. 151–152.

15. *Demekhin E.A., Polyanskikh S.V., Shtemler Yu.M.* Electroconvective instability of self–similar equilibria // Cornell University open access e–prints [Electronic resource]. 2010. Mode of access: http://arxiv.org/pdf/1001.4502v1.

16. *Полянских С.В., Демёхин Е.А.* К задаче об устойчивости вязкой микроструи в постоянном электрическом поле // Вестник Армавирского государственного педагогического университета. Естественные и технические науки. 2010. № 4. С. 34–39.

17. *Полянских С.В., Гусарчук А.Н., Демёхин Е.А.* Автомодельный сценарий перехода к электроконвекции в ионообменных мембранах // Международная конференция “Современные проблемы механики сплошной среды”. Сборник докладов. Ростов–на–Дону: Изд–во ЮФУ, 2010. С. 275–279.

18. *Гусарчук А.Н., Демёхин Е.А., Полянских С.В.* Гидродинамическая устойчивость автомодельного решения задачи об электроконвекции // XVI школа–семинар “Современные проблемы аэрогидродинамики”. Тезисы докладов. М.: Изд–во Московского университета, 2010. С. 42–43.