МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

Механико–математический факультет

На правах рукописи
УДК 519.21

**Ирхина Наталья Александровна**

# ПРИНЦИП ВАНГА В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ СТРАХОВАНИЯ

**01.01.05 — теория вероятностей и математическая статистика**

**АВТОРЕФЕРАТ**

**диссертации на соискание ученой степени кандидата физико–математических наук**

МОСКВА
2010

Работа выполнена на кафедре теории вероятностей механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

| | |
|---|---|
| **Научный руководитель** | кандидат физико–математических наук,<br>доцент<br>Лебедев Алексей Викторович |
| **Официальные оппоненты** | доктор физико–математических наук,<br>профессор<br>Бенинг Владимир Евгеньевич |
| | кандидат физико–математических наук<br>Куликов Александр Владимирович |
| **Ведущая организация** | Московский государственный институт<br>электроники и математики |

Защита диссертации состоится « 26 » ноября 2010 г. в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.85 при Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16–24.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан « 26 » октября 2010 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д 501.001.85 при МГУ,
доктор физико-математических наук,
профессор В.Н. Сорокин

# ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

## Актуальность темы

Тематика диссертации относится к математической теории страхования как важного раздела современной теории вероятностей и математической статистики. Одним из ключевых вопросов математической теории страхования является научно обоснованное построение принципов назначения страховых премий и изучение их свойств. С точки зрения теории вероятностей, страховые премии можно рассматривать как числовые характеристики случайных величин (рисков) и их распределений. Некоторые виды премий выражаются через более традиционные числовые характеристики (математическое ожидание, дисперсию и др.), а некоторые имеют иную структуру. Но все их можно рассматривать как функционалы $H$ на неотрицательных случайных величинах (называемых *рисками*), отображающие $X \mapsto [0, \infty)$. Поиск надежного принципа (метода, формулы, алгоритма) подсчета премии является предметом многочисленных актуарных исследований, однако вопрос о том, какой именно принцип предпочтителен, все еще не решен.

В диссертации исследуется так называемый принцип Ванга, введенный С.С.Вангом[1] в 1996 году. Для расчета премии используется интеграл от некоторой неубывающей функции (называемой *функцией искажения*), берущейся от функции дожития (хвоста распределения риска). После ряда обобщений, сделанных как самим Вангом, так и его последователями, формула подсчета премии выглядит следующим образом:

$$H_g(X) = \int_{-\infty}^{0} (g(S_X(t)) - 1)dt + \int_{0}^{\infty} g(S_X(t))dt. \qquad (Wp)$$

Было установлено, что принцип Ванга является надежной мерой риска, обладая рядом важных практических свойств[1,2,3,4]. Необходимо отметить, что принципу Ванга в страховании соответствует очень важный класс когерентных мер риска в финансовой математике — $WV@R$ (взвешенный $V@R$)[5]. Однако формула Ванга подсчета премии достаточно громоздкая, а также требует знания всей функции распределения рассматриваемого риска, что не всегда доступно в реальных условиях. Поэтому важной задачей является определить, при каких условиях данный принцип эквивалентен более удобному в применении принципу подсчета премии, например, наиболее распространенному в страховой практике методу, основанному на двух первых моментах распределения. В качестве

[1] Wang S.S., *Premium calculation by transforming the layer premium density*, ASTIN BULLETIN 1996, Vol.26, pp: 71-92.

[2] Wang J.-L., *A note on Christofides' conjecture regarding Wang's premium principle*, ASTIN BULLETIN, 2000, Vol.30, №1, pp: 13-17.

[3] Young V.R., *Optimal insurance under Wang's premium principle*, Insurance: Mathematics and Economics, 1999, Vol.25, pp: 109-122.

[4] Wu X.-Y., *The natural sets of Wang's premium principle*, ASTIN BULLETIN, 2001, Vol.31, №1, pp: 139-145.

[5] Cherny A.S., *Weighted V@R and its properties*, Finance and Stochastics, 2006, Vol.10, pp: 367-393.

такого принципа рассматривался традиционный принцип подсчета премии по среднеквадратическому отклонению или среднеквадратический принцип (SDp — Standard Deviation Premium principle):

$$\pi_\lambda^{\mathrm{SD}}(X) = \mathbf{E}X + \lambda\sqrt{\mathbf{D}X}, \quad \lambda > 0.$$

Понятие сводимости принципов для конкретной функции искажения было обобщено на классы функций, ряд работ был посвящен проблеме сводимости принципов для различных классов функций искажения, и сводимость была доказана для множества всех функций искажения[2], множества ступенчатых функций, принимающих два значения: 0 и 1[2], множества сюръективных функций[4], множества степенных функций[4].

В диссертации получено три достаточных условия сводимости Wp к SDp, применимых как к классам функций, в определенном смысле приближающих "ступеньку", так и для многих классов вогнутых функций. Полученные условия представляют собой большой шаг вперед в плане универсальности, поскольку ранее сводимость доказывалась специфическими методами в каждом частном случае.

Далее в диссертации изучаются различия между принципом Ванга и среднеквадратическим принципом, а также преимущества первого для семейств распределений рисков с нулевым средним и единичной дисперсией. Риски из таких семейств нельзя различить и упорядочить с помощью среднеквадратического принципа, в то время как для принципа Ванга это оказывается возможным. Рассматриваются верхняя и нижняя грань премии Ванга, введено понятие *чувствительности премии* как их разности. Исследуется чувствительность премии и решается задача ее максимизации для семейств распределений Парето. Рассмотрен известный пример Янг[6], опровергающий предположение Кристофидеса[7], и проведено его более глубокое изучение, чем это делалось ранее. Методами вариационного исчисления найдена верхняя грань премии Ванга на семействе всех распределений с нулевым средним и единичной дисперсией.

Практический вывод из полученных результатов заключается в том, что принцип Ванга позволяет успешно различать и упорядочивать риски с близкими моментными характеристиками.

Также в диссертации изучается вопрос непрерывности премий Ванга относительно функций искажения и распределений рисков.

В теории вероятностей широко изучается вопрос о сходимости распределения центрированных и номированных сумм независимых одинаково распределенных случайных величин к стандартному нормальному распределению. Эта сходимость описывается центральной предельной теоремой и ее различными

[6]Young V.R., *Discussion of Christofides conjecture regarding Wang's premium principle*, ASTIN BULLETIN, 1999, Vol.29, №2, pp: 191-195.

[7]Christofides S., *Pricing for risk in financial transactions*, Proceedings of the GISG/ ASTIN Joint Meeting in Glasgow, Scotland, October, 1998, pp: 62-109.

уточнениями. Она имеет большое практическое значение, в том числе, в страховании[8]. Поэтому представляет интерес сходимость премий Ванга от центрированных и нормированных сумм.

В диссертации при определенных условиях на случайную величину, а именно, конечности абсолютного момента порядка $2+\delta$, $0<\delta\leq 1$ (что является существенным усилением результата по сравнению с более традиционным требованием конечности 3-го момента), а также на функцию искажения доказан ряд предельных теорем для премий Ванга в случаях обычных и пуассоновских сумм, получены оценки скорости сходимости. Для доказательства теорем существенно использовались неравномерные оценки абсолютного отклонения распределения преобразованной суммы от стандартного нормального распределения[8,9].

С точки зрения математической статистики, важной задачей является получение оценок премий по наблюдениям. В диссертации построена эмпирическая оценка премии Ванга:

$$H_g[X]_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_{(i)} g'\left(1-\frac{i}{n+1}\right)$$

и при определенных ограничениях на случайную величину и функцию искажения были доказаны теоремы о сходимости с вероятностью 1 и об асимптотической нормальности оценки. Полученные оценки относятся к классу так называемых L-оценок, изучавшихся, например, в работах[10,11,12].

В случае масштабного семейства распределений с положительными премиями построен асимптотический доверительный интервал для премии Ванга.

В диссертации изучается вопрос об экономии от совместного страхования рисков клиентом (названной Кристофидесом[7] "synergy value"), возникающей в силу субаддитивности принципа Ванга в случае вогнутости функции искажения. Чтобы устранить эффект масштаба, рассматривается относительная экономия. Получен ряд общих свойств относительной экономии. Рассмотрены также примеры равномерного, показательного, нормального распределения рисков, распределений Лапласа и Бернулли, а также устойчивых распределений. В качестве функции искажения выбрана квадратичная функция (которая соответствует принципу Джини). Результаты приводят к выводу, что относительная экономия слабо чувствительна к типу распределения, и для ее оценки на практике можно использовать модельные распределения из числа перечисленных

[8]Королев В.Ю., Бенинг В.Е., Шоргин С.Я., *Математические основы теории риска*, Физматлит, 2007.

[9]Нефедова Ю.С., Шевцова И.Г., *О точности нормальной аппроксимации для распределений пуассоновских случайных сумм*, Информатика и ее применения (в печати).

[10]Jung J., *On linear estimates defined by a continuous weight function*, Arkiv för mathematik, 1955, 3, 15.

[11]Shao J., *Mathematical statistics (Second edition)*, Springer, 2007.

[12]Орлов Д.В., *О двух оценках одной меры риска*, Теория вероятностей и ее применения, 2008, Том 53, №1, стр: 168-172.

выше. В случае независимых рисков получены функции относительной экономии и найдены их максимумы. Рассмотрен также случай зависимых рисков, с различными видами зависимости, в том числе на основе копул Фарли-Гумбеля-Моргенштерна, Спирмена и Рафтери[13]. В страховании копулы активно используются для агрегации рисков и моделирования капитала[14,15].

### Цель работы

Целью работы является исследование свойств принципа Ванга подсчета премии, являющегося надежной мерой риска.

### Научная новизна

Основные результаты диссертации являются новыми и состоят следующем:

1. Получено три достаточных условия сводимости принципа Ванга к среднеквадратическому принципу для различных классов функций искажения. Проведено обобщение на случай бесконечной дисперсии.

2. Описано поведение чувствительности премии Ванга и решена задача ее максимизации для семейств распределений Парето. Методами вариационного исчисления найдена верхняя грань премии Ванга для класса всех распределений с нулевым средним и единичной дисперсией.

3. Доказана непрерывность премий Ванга относительно функций искажения и распределений риска (в специальных метриках). Доказан ряд предельных теорем для премий Ванга в схеме суммирования для случаев классических и пуассоновских сумм, получены оценки скорости сходимости. Построена статистическая оценка премии Ванга, доказаны теоремы о ее строгой состоятельности и асимптотической нормальности.

4. Получен ряд общих свойств относительной экономии от совместного страхования рисков в случае назначения премии согласно принципу Ванга с вогнутой фукнцией искажения. Произведены оценки относительной экономии для различных распределений в случаях независимых рисков и зависимых рисков с различными видами зависимости, в том числе на основе копул Фарли-Гумбеля-Моргенштерна, Спирмена и Рафтери.

### Методы исследования

В работе используются классические методы теории вероятностей и математической статистики, высшей алгебры, математического и функционального анализа, используется вариационное исчисление и метод копул.

---

[13]Nelsen R.B., *An Introduction to Copulas*, Springer Series in Statistics, 2nd ed. 2006.

[14]Frees E.W., Valdez E.A., *Understanding Relations Using Copulas*, North American Actuarial Journal, January 1998, Vol. 2, №1, pp. 1-25.

[15]Bisignani R., Masala G., Micocci M., *Economic Capital Management For Insurance Companies Using Conditional Value at Risk and a Copula Approach*, Economia, Societae Istituzioni, 2006, Vol.18, №3.

**Теоретическая и практическая ценность**

Результаты и методы диссертации могут быть полезными как с теоретической, так и с практической точек зрения, специалистам в области страховой и финансовой математики, актуариям.

**Апробация работы**

Результаты диссертации докладывались на Большом семинаре кафедры теории вероятностей механико-математического факультета МГУ под руководством член-корр. РАН, проф. А.Н. Ширяева (7 октября 2009 г. и 15 сентября 2010 г.), на спецсеминаре "Теория риска и смежные вопросы" кафедры математической статистики факультета ВМиК МГУ (заведующий кафедрой - академик РАН Ю.В. Прохоров) под руководством д.ф.-м.н. проф. В.Е. Бенинга и д.ф.-м.н. проф. В.Ю. Королева (3 марта 2010 г.), Воронежской зимней математической школе С.Г. Крейна (Воронеж, 26-30 января 2006 г.), на XVI и XVII Международных конференциях студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов" (МГУ, Москва, 13-18 апреля 2009 г. и 12-15 апреля 2010 г.), на XVI Всероссийской школе-коллоквиуме по стохастическим методам (Санкт-Петербург, 19-24 мая 2009 г.), а также на Научной конференции "Тихоновские чтения" факультета ВМиК МГУ (29 сентября 2010 г.).

**Публикации**

По теме диссертации опубликовано 7 работ, из них 4 в журналах из перечня ВАК, список которых приведен в конце настоящего автореферата [1-7]. Работ в соавторстве нет.

**Структура и объем диссертации**

Диссертация состоит из оглавления, введения, четырех глав и списка литературы, содержащего 61 наименования. Общий объем диссертации составляет 137 страниц.

## КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во **введении** приведен краткий обзор по тематике работы, изложены цели исследования, а также перечислены основные полученные результаты с указанием использованных методов и подходов.

В **главе 1** приводятся три достаточных условия сводимости принципа Ванга к среднеквадратическому принципу.

В параграфе 1 главы 1 даны основные определения.

**Определение 1.1** *Принцип подсчета премии по среднеквадратическому отклонению (Standard deviation premium principle)*:

$$\pi_\lambda^{\mathrm{SD}}(X) = \mathbf{E}X + \lambda\sqrt{\mathbf{D}X}, \qquad (SDp)$$

где $X$ — риск, $\lambda > 0$, $\pi_\lambda^{\mathrm{SD}}(X)$ — премия, назначаемая за риск $X$.

**Определение 1.2** *Принцип Ванга подсчета премии (Wang's premium principle)*:

$$H_g(X) = \int_{-\infty}^{0} (g(S_X(t)) - 1)dt + \int_{0}^{\infty} g(S_X(t))dt, \qquad (Wp)$$

где $S_X(t) = P(X > t)$ — функция дожития для риска $X$, $g : [0,1] \to [0,1]$ — неубывающая функция искажения.

**Определение 1.3** Если в принципе Ванга подсчета премии ограничиться случаем, когда $g(x) = x^{1/\rho}$, то получим *принцип пропорционального изменения интенсивности (Proportional hazard premium principle)*:

$$\pi_\rho^{\mathrm{PH}}(X) = \int_{-\infty}^{0} (S_X(t)^{1/\rho} - 1)dt + \int_{0}^{\infty} S_X(t)^{1/\rho}dt, \qquad (PHp)$$

где $\rho \geq 1$ — так называемый индекс неприятия риска.

Дж.-Л. Ванг ввел понятие натурального множества как множества всех распределений, на котором Wp сводится к SDp для фиксированной функции искажения.

**Определение 1.4** Пусть $\mathcal{L}_2$ — множество распределений, имеющих конечные среднее и дисперсию. *Натуральным множеством* для функции $g$ в отношении распределения $F_X \in \mathcal{L}_2$ случайной величины $X$ называется:

$$N_g(X) = \left\{ F_Y : \frac{H_g(X) - \mathbf{E}X}{\sqrt{\mathbf{D}X}} = \frac{H_g(Y) - \mathbf{E}Y}{\sqrt{\mathbf{D}Y}}, F_Y \in \mathcal{L}_2 \right\}.$$

Предполагается, что $H_g(X)$ конечно.

**Определение 1.5** Натуральным множеством для класса функций искажения $G$ называется $N_G(X) \equiv \bigcap_{g\in G} N_g(X)$. Предполагается, что в пересечение включаются только те функции $g \in G$, для которых $H_g(X)$ конечно.

Результаты данной главы позволяют производить проверку, для каких классов функций искажения натуральные множества являются сдвигово-масштабными семействами. В таких случаях говорят о сводимости принципа Ванга к среднеквадратическому принципу для заданного класса функций искажения (или о эквивалентности принципов).

Первое достаточное условие сводимости сформулировано в параграфе 2 главы 1.

**Теорема 1.2.1** *Пусть $F_X \in \mathcal{L}_2$. Если в некотором классе функций $\mathcal{A} \subset \mathcal{G}$ для любых $a$, $b$, $c$, таких, что $0 < a < b < 1$, $c > 0$, найдется функция $g$, такая, что*

$$\begin{cases} g(x) \leq c\,x, & 0 < x < a, \\ g(x) \geq 1 - c\,(1-x), & b < x < 1, \end{cases} \qquad (1)$$

*то $N_{\mathcal{A}}(X)$ является сдвигово-масштабным семейством.*

С его помощью было проведено доказательство сводимости Wp к SDp для класса возрастающих ломаных (кусочно-линейных функций) из $k$ звеньев ($k \geq 3$), класса, состоящего из склеек двух степенных функций, класса возрастающих многочленов, а также приведены контрпримеры. А именно, для некоторых классов функций искажения, не удовлетворяющих условию сводимости, построены примеры различных рисков (с нулевым средним и единичной дисперсией), для которых премии Ванга одинаковы при всех функциях искажения из данного класса.

К сожалению, первое достаточное условие имеет ограниченную сферу применимости. В параграфе 3 главы 1 предложено более общее достаточное условие, применимое, в том числе, к классам вогнутых функций (как изначально и предполагал Ванг[1]).

**Теорема 1.3.1** *Пусть $F_X \in \mathcal{L}_2$. Если задан класс функций $\mathcal{A} \subset \mathcal{G}$ и для любых $a, b, c$, таких, что $0 < a < b < 1$, $c > 0$, найдутся натуральное $n$, действительные $\lambda_1, ..., \lambda_n$ и функции $g_1, ..., g_n \in \mathcal{A}$, такие, что функция $\widetilde{g} = \lambda_1 g_1 + ... + \lambda_n g_n$ принимает значения в отрезке $[0,1]$ и верно:*

$$\begin{cases} \widetilde{g}(x) \leq c\,x, & 0 < x < a, \\ \widetilde{g}(x) \geq 1 - c\,(1-x), & b < x < 1, \end{cases} \tag{2}$$

*то $N_{\mathcal{A}}(X)$ является сдвигово-масштабным семейством.*

С помощью второго достаточного условия проводится доказательство сводимости Wp к SDp для класса возрастающих вогнутых ломаных из двух звеньев, класса многочленов вида $1-(1-x)^n$, классов функций $\{x^{a_n}\}$ и $\{1-(1-x)^{a_n}\}$, где $1 \leq a_1 < a_2 < ...$ и $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/a_n = +\infty$ и других специальных классов функций искажения (например, вида $g_r(x) = f(rx)/f(r)$, $r \in I \subseteq (0, +\infty)$, где $f(x)$ — аналитическая функция, обладающая определенными свойствами), в том числе, рассмотренных в работе Ванга[1]. В доказательствах используется известная теорема Мюнца.

В страховании могут наблюдаться распределения данных с конечными средними, но бесконечными дисперсиями, в частности, при изучении катастрофических рисков. Например, в работе Резника[16] обсуждаются данные о страховых потерях от пожаров в Дании, где показатель степенного хвоста распределения $\alpha$ оказывается около 1,4. В параграфе 3 главы 1 диссертации рассказано о том, как можно обобщить результаты о сводимости на такие случаи, используя второе достаточное условие.

Предположим, что распределение $F_X$ риска $X$ не принадлежит $\mathcal{L}_2$, но можно подобрать такое $p \in [1, 2)$, что $F_X \in \mathcal{L}_p$ (т.е. имеет конечный момент порядка $p$). По аналогии со среднеквадратическим отклонением определим среднее $p$-ическое отклонение:

$$\sigma^{(p)}(X) = (\mathbf{E}|X - \mathbf{E}X|^p)^{1/p}.$$

[16] Resnick S.I., *Discussion of the Danish data on large fire insurance losses*, ASTIN BULLETIN, 1997, Vol.27, №1, pp: 139-152.

Введем премии

$$\pi_\lambda^{(p)} = \mathbf{E}X + \lambda\sigma^{(p)}, \quad \lambda > 0,$$

и соответственно обобщим определение натуральных множеств для $\mathcal{L}_p$:

$$N_g^{(p)}(X) = \left\{ F_Y : \frac{H_g(X) - \mathbf{E}X}{\sigma^{(p)}(X)} = \frac{H_g(Y) - \mathbf{E}Y}{\sigma^{(p)}(Y)}, F_Y \in \mathcal{L}_p \right\}$$

для функции $g$ в отношении распределения риска $X$ и

$$N_G^{(p)}(X) = \bigcap_{g \in G} N_g^{(p)}(X)$$

для класса функций искажения $G$.

В данном случае также можно говорить о сводимости, когда $N_G^{(p)}(X)$ является сдвигово-масштабным семейством. Поэтому можно получить аналог теоремы 1.3.1.

**Теорема 1.3.2** *Пусть $F_X \in \mathcal{L}_p$. Если задан класс функций $\mathcal{A} \subset \mathcal{G}$ и для любых $a$, $b$, $c$ таких, что $0 < a < b < 1$, $c > 0$, найдутся натуральное $n$, действительные $\lambda_1, ..., \lambda_n$ и функции $g_1, ..., g_n \in \mathcal{A}$ такие, что функция $\widetilde{g} = \lambda_1 g_1 + ... + \lambda_n g_n$ принимает значения в отрезке $[0,1]$ и верно:*

$$\begin{cases} \widetilde{g}(x) \le c\,x, & 0 < x < a, \\ \widetilde{g}(x) \ge 1 - c\,(1-x), & b < x < 1, \end{cases}$$

*то $N_{\mathcal{A}}^{(p)}(X)$ является сдвигово-масштабным семейством.*

Второе достаточное условие хотя и является менее ограничительным, чем первое, однако неприменимо, например, к PHp. В параграфе 4 главы 1 предложено более общее достаточное условие сводимости принципа Ванга к среднеквадратическому принципу.

**Теорема 1.4.1** *Пусть $F_X \in \mathcal{L}_2$. Если задан класс функций $\mathcal{A} \subset \mathcal{G}$ и для любых $a$, $b$, $c$, таких, что $0 < a < b < 1$, $c > 0$, найдутся натуральное $n$, действительные $\lambda_1, ..., \lambda_n$ и функции $g_1, ..., g_n \in \mathcal{A}$ такие, что функция $\widehat{g} = \lambda_1 g_1 + ... + \lambda_n g_n$ принимает значения в отрезке $[0,1]$ и для некоторых $\alpha, \beta > 1/2$ верно:*

$$\begin{cases} \widehat{g}(x) \le c\,x^\alpha, & 0 < x < a, \\ \widehat{g}(x) \ge 1 - c\,(1-x)^\beta, & b < x < 1, \end{cases} \tag{3}$$

*то $N_{\mathcal{A}}(X)$ является сдвигово-масштабным семейством.*

Отметим, что с помощью третьего достаточного условия удается доказать сводимость PHp к SDp без дополнительных ограничений на распределения, введенных Ву[4], а именно, непрерывности функции дожития случайной величины и выпуклости ее носителя.

**Глава 2** посвящена, главным образом, различиям между среднеквадратическим принципом и принципом Ванга, а также преимуществам последнего.

В параграфе 1 главы 2 изложены определения и мотивация исследований.

При изучении различий между принципом Ванга и среднеквадратическим принципом естественно рассматривать характеристику

$$\frac{H_g(X) - \mathbf{E}X}{\sqrt{\mathbf{D}X}},$$

т.е. центрированную и нормированную премию. В случае, если для данной функции искажения эта характеристика остается постоянной (и равной, например, некоторому $\lambda$) на некотором семействе рисков, это означает, что на данном семействе рисков имеет место сводимость принципа Ванга к среднеквадратическому, т.е.

$$H_g(X) = \pi_\lambda^{\mathrm{SD}}(X) = \mathbf{E}X + \lambda\sqrt{\mathbf{D}X}.$$

В случае же, если указанная характеристика принимает различные значения, сводимости нет. При этом представляет интерес разброс этих значений.

Заметим, что в силу сдвигово-масштабной инвариантности принципа Ванга

$$\frac{H_g(X) - \mathbf{E}X}{\sqrt{\mathbf{D}X}} = H_g\left(\frac{X - \mathbf{E}X}{\sqrt{\mathbf{D}X}}\right),$$

т.е. вместо того, чтобы центрировать и нормировать премии для некоторого семейства рисков, мы можем сначала центрировать и нормировать сами риски, а потом рассматривать премии для них.

Таким образом, возникает задача изучения премий Ванга на семействах рисков с нулевым средним и единичной дисперсией. Понятно, что с помощью среднеквадратического принципа такие риски нельзя ни различить, ни упорядочить. А с помощью принципа Ванга это оказывается возможным. В качестве меры того, насколько хорошо это получается, предлагается использовать разность между верхней и нижней гранями премии Ванга с данной функцией искажения на данном семействе. Эта разность названа абсолютной чувствительностью премии.

**Определение 2.1.1** *Абсолютной чувствительностью премии $H(X)$ для класса рисков (случайных величин) $R$* назовем разность:

$$\eta(R, H) = \sup_{X \in R} H(X) - \inf_{X \in R} H(X).$$

**Определение 2.1.3** Премию назовем *биективной* на классе рисков, если разным рискам из этого класса она ставит в соответствие разные значения.

Таким образом, если премия биективна, то все риски в классе можно различить и строго упорядочить (по величине премии).

В параграфе 2 главы 2 рассмотрены классы центрированных и нормированных рисков, распределенных по Парето: $R(\alpha_1) = \{Y_\alpha, \alpha \geq \alpha_1\}$, где $\alpha_1 > 2$, т.е.

$$Y_\alpha := \sqrt{\frac{\alpha-2}{\alpha}}\left(\frac{\alpha-1}{\beta}X_{\alpha,\beta}-1\right),$$

где $X_{\alpha,\beta}$ — случайная величина, распределенная по Парето с параметрами $(\alpha,\beta)$ $(\alpha>2)$. Тогда $\mathbf{E}Y_\alpha=0$, $\mathbf{D}Y_\alpha=1$ и по свойству инвариантности принципа Ванга относительно сдвигово-масштабных преобразований

$$\pi_\rho^{\mathrm{PH}}(Y_\alpha)=\begin{cases}\sqrt{\alpha(\alpha-2)}\frac{\rho-1}{\alpha-\rho}, & \rho<\alpha,\\ \infty, & \rho\geq\alpha.\end{cases}$$

Обозначим

$$\rho_1^*=\alpha_1-\sqrt{\alpha_1(\alpha_1-2)},\ \rho_2^*=\frac{\alpha_1}{\alpha_1-1}.$$

Данные точки будут критическими для индекса неприятия риска $\rho$ в свете рассмариваемой задачи.

Следующая теорема описывает поведение чувствительности.

**Теорема 2.2.1** *Для класса рисков $R(\alpha_1)$ чувствительность PH-премии вычисляется по следующей формуле:*

$$\eta(\rho)=\begin{cases}(\rho-1)\left(\frac{1}{\sqrt{\rho(2-\rho)}}-\frac{\sqrt{\alpha_1(\alpha_1-2)}}{\alpha_1-\rho}\right), & 1\leq\rho<\rho_1^*,\\ (\rho-1)\left(\frac{1}{\sqrt{\rho(2-\rho)}}-1\right), & \rho_1^*\leq\rho<\rho_2^*,\\ (\rho-1)\left(\frac{\sqrt{\alpha_1(\alpha_1-2)}}{\alpha_1-\rho}-1\right), & \rho_2^*\leq\rho\end{cases}$$

*PH-премия оказывается биективна при $\rho\geq\rho_2^*$.*

Задача максимизации чувствительности решена с помощью следствия 2.2.3.

**Следствие 2.2.3** *Пусть параметр $\rho$ ограничен отрезком $[\rho_1,\rho_2]\subset(1,\alpha_1)$. Если $\alpha_1\leq\alpha^*$, то максимум чувствительности достигается в точке $\rho_2$ вне зависимости от положения точки $\rho_1$. Если $\alpha_1>\alpha^*$, то максимум чувствительности достигается в точке $\rho_2$ при $\rho_2<\widetilde{\rho}$ или $\rho_2\geq\widehat{\rho}$, в точке $\widetilde{\rho}$ при $1\leq\rho_1\leq\widetilde{\rho}\leq\rho_2<\widehat{\rho}$, в точке $\rho_1$ при $\widetilde{\rho}\leq\rho_1<\rho_2<\rho_1^*$. Если же $\widetilde{\rho}\leq\rho_1\leq\rho_1^*\leq\rho_2<\widehat{\rho}$, то максимум чувствительности достигается либо в $\rho_1$, либо в $\rho_2$, в зависимости от того, где $\eta(\rho)$ больше.*

В параграфе 3 главы 2 изучается пример Янг и его обобщения.

Еще в 1998 году при изучении принципа пропорционального изменения интенсивности Кристофидес предположил, что для любых параметрических семейств распределений с постоянной асимметрией PHp эквивалентен SDp[7].

**Определение 2.3.1** *Асимметрия* случайной величины $X$:

$$\operatorname{Skew}X=\frac{\mathbf{E}(X-\mathbf{E}X)^3}{\sqrt{(\mathbf{D}X)^3}}.$$

Янг удалось опровергнуть предположение Кристофидеса в общей его форме, предложив контрпример[6]: двустороннее показательное распределение $(\alpha, \beta, w), \alpha, \beta > 0, 0 < w < 1$. Функция дожития имеет следующий вид:

$$S_X(t) = \begin{cases} w + (1-w)(1-e^{\beta t}), & t < 0, \\ we^{-\alpha t}, & t \geq 0. \end{cases}$$

Как показала Янг, если взять $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, $\beta_1 = 4$, $\beta_2 = 2,27466$, $w_1 = 0,9$, $w_2 = 0,1$, $g(x) = \sqrt{x}$, то у случайных величин $X_1$ и $X_2$ асимметрии равны: $\mathrm{Skew}\, X_1 = \mathrm{Skew}\, X_2 = 1,84166$, однако

$$\frac{H_g(X_1) - \mathbf{E}X_1}{\sqrt{\mathbf{D}X_1}} = 0,98684, \quad \frac{H_g(X_2) - \mathbf{E}X_2}{\sqrt{\mathbf{D}X_2}} = 1,02386,$$

т.е. принцип Ванга и среднеквадратический принцип не эквивалентны.

В параграфе 3 главы 2 без ограничения общности было положено $\beta = 1 - \alpha$ и $\alpha \in (0,1)$. Тогда все рассмотренные величины можно изучать в единичном квадрате (по $w$ и по $\alpha$).

Были получены следующие результаты.

1. Нижняя грань премии по квадрату равна 0, а верхняя грань равна $\sqrt{(2\ln 2 - 1)^2 + 2}$.

2. На линиях уровня асимметрии в отрезке от $-2$ до 2 предел премии на нижнем конце равен $2\ln 2 - 1$, на верхнем — 1.

3. На линиях уровня асимметрии, большей 2, предел премии на нижнем конце равен $2\ln 2 - 1$, а на верхнем — некоторому числу в интервале от 1 до $\sqrt{2}$, которое можно найти численно по приведенным формулам для данного значения асимметрии.

4. На линиях уровня асимметрии, меньшей $-2$, предел премии на верхнем конце равен 1, а на нижнем — некоторому числу в интервале от 0 до $2\ln 2 - 1$, которое можно найти численно по приведенным формулам для данного значения асимметрии.

С учетом этого, можно оценить нижнюю и верхнюю грани премии на любой линии уровня. Понятно, что нижняя грань не больше наименьшего из предельных значений на концах, а верхняя грань — не меньше наибольшего из этих значений. Было бы хорошо, если бы значения премии на концах были экстремумами, но это не так: численное моделирование показывает, что максимумы могут достигаться не на концах линий, а внутри квадрата.

В общем случае, абсолютная чувствительность премии на подсемействах постоянной асимметрии составляет не менее $2 - 2\ln 2 \approx 0,614$, что приблизительно равно 42% от абсолютной чувствительности премии по всему семейству распределений, равной $\sqrt{(2\ln 2 - 1)^2 + 2} \approx 1,466$.

В параграфе 4 главы 2 рассмотрен класс случайных величин

$$CN = \{X : EX = 0, DX = 1\}$$

и получены следующие основные результаты.

**Утверждение 2.4.1** *При любой вогнутой функции искажения, имеющей производную в точке 1, нижняя граница премии Ванга по классу $CN$ равна нулю.*

**Теорема 2.4.1** *Пусть функция искажения $g$ возрастающая, вогнутая на [0,1], имеющая непрерывную производную на (0,1). Пусть $G = \int_0^1 (g'(u))^2 du < \infty$. Тогда $\max_{X \in CN} H_g(X) = \sqrt{G-1}$.*

В **главе 3** диссертации изучается вопрос непрерывности премий Ванга относительно функций искажения и распределений рисков.

В параграфе 1 главы 3 рассмотрена следующая метрика, определенная на множестве функций искажения (таких, что указанное выражение конечно):

$$\rho_q(g_1, g_2) = \sup_{0<t<1} \left| \frac{g_1(t) - g_2(t)}{q(t)} \right|,$$

где $q(t) \geq 0$, $q(0) = q(1) = 0$. Обозначим $I_q(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} q(S_X(t))dt$.

Тогда имеет место следующая теорема о непрерывности премий Ванга относительно функций искажения.

**Теорема 3.1.1** *Рассмотрим класс функций $g_r(x)$, непрерывных в точке $r_0$ в метрике $\rho_q$, т.е. $\rho_q(g_r, g_{r_0}) \to 0$, $r \to r_0$. Пусть $I_q(X) < \infty$. Тогда $H_{g_r}(X) \to H_{g_{r_0}}(X)$ при $r \to r_0$.*

В параграфе 2 главы 3 приводятся предельные теоремы для классических и пуассоновских сумм.

Пусть $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — н.о.р.с.в.: $\mathbf{E}\xi_1 = \mu, \mathbf{D}\xi_1 = \sigma^2$. Обозначим

$$X_n = \frac{\xi_1 + ... + \xi_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}.$$

Тогда $X_n \xrightarrow{d} \widetilde{X}, n \to \infty$, где $\widetilde{X}$ имеет стандартное нормальное распределение.

**Теорема 3.2.1** *Если $\mathbf{E}|\xi_1|^{2+\delta} < \infty$, $0 < \delta \leq 1$, функция искажения $g$ вогнута и $g'(0) < \infty$, то*

$$\left| H_g(X_n) - H_g(\widetilde{X}) \right| \leq \frac{K_1}{n^{\delta/2}}, \quad \textit{где}$$

$$K_1 = \frac{2}{2+\delta} B\left(\frac{1}{2+\delta}, 1 - \frac{1}{2+\delta}\right) \frac{\mathbf{E}|\xi_1 - \mu|^{2+\delta}}{\sigma^{2+\delta}} g'(0) C(\delta),$$

*$B(a,b)$ — бета-функция, $C(\delta)$ — абсолютная постоянная*[8].

**Теорема 3.2.2** *Если $\mathbf{E}|\xi_1|^{2+\delta} < \infty$, $0 < \delta \leq 1$, функция искажения $g$ вогнута и $g'(0) = \infty$, но $g(x) \leq Ax^{\alpha}$, $1/(2+\delta) < \alpha < 1$, $A > 0$, то*

$$\left| H_g(X_n) - H_g(\widetilde{X}) \right| \leq \frac{K_2}{n^{\alpha\delta/2}}, \quad \textit{где}$$

$$K_2 = \frac{2A}{2+\delta} B\left(\frac{1}{2+\delta}, \alpha - \frac{1}{2+\delta}\right)\left(\frac{C^\alpha(\delta)\mathbf{E}|\xi_1-\mu|^{2+\delta}}{\sigma^{2+\delta}}\right)^\alpha .$$

Рассмотрим

$$X_\lambda = \frac{\sum_{n=1}^N \xi_n - \lambda\mu}{\sqrt{\lambda(\mu^2+\sigma^2)}},$$

где $N$ — с.в., имеющая распределение Пуассона с параметром $\lambda$, не зависящая от $\xi_n$, $n \geq 1$.

**Теорема 3.2.3** *Если* $\boldsymbol{E}|\xi_1|^{2+\delta} < \infty$, $0 < \delta \leq 1$, *функция искажения* $g$ *вогнута и* $g'(0) < \infty$, *то*

$$\left|H_g(X_\lambda) - H_g(\widetilde{X})\right| \leq \frac{K_3}{\lambda^{\delta/2}}, \quad \textit{где}$$

$$K_3 = \frac{2}{2+\delta} \cdot \frac{K(\delta)\mathbf{E}|\xi_1|^{2+\delta}}{(\mu^2+\sigma^2)^{(2+\delta)/2}} B\left(\frac{1}{2+\delta}, 1 - \frac{1}{2+\delta}\right),$$

$K(\delta)$ — *абсолютная постоянная*[9].

**Теорема 3.2.4** *Если* $\boldsymbol{E}|\xi_1|^{2+\delta} < \infty$, $0 < \delta \leq 1$, *функция искажения* $g$ *вогнута и* $g'(0) = \infty$, *но* $g(x) \leq Ax^\alpha$, $1/3 < \alpha < 1$, *то*

$$\left|H_g(X_\lambda) - H_g(\widetilde{X})\right| \leq \frac{K_4}{\lambda^{\delta\alpha/2}}, \quad \textit{где}$$

$$K_4 = \frac{2}{2+\delta} \cdot \frac{AK(\delta)^\alpha(\mathbf{E}|\xi_1|^{2+\delta})^\alpha}{(\mu^2+\sigma^2)^{(2+\delta)\alpha/2}} B\left(\frac{1}{2+\delta}, \alpha - \frac{1}{2+\delta}\right).$$

В параграфе 3 главы 3 предлагается некоторая эмпирическая оценка премии Ванга.

Доказаны следующие теоремы о состоятельности и асимптотической нормальности построенной оценки.

**Теорема 3.3.1** *Пусть* $X_1, ..., X_n$ — *случайная выборка из распределения* $F$ *такого, что* $\boldsymbol{E}|X|^r < \infty$ *для некоторого* $r > 0$. *Рассмотрим эмпирическую оценку премии Ванга:*

$$H_g[X]_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_{(i)} g'\left(1 - \frac{i}{n+1}\right),$$

*где* $X_{(i)}$ — $i$*-ая порядковая статистика. Предположим, что*

$$|g'(t)| \leq M(t(1-t))^{-1+1/r+\delta},\ 0 < t < 1$$

*для некоторого* $\delta > 0$, *где* $g'$ *непрерывна за исключением, быть может, конечного числа точек. Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} H_g[X]_n = H_g(X) \textit{ с вероятностью 1.}$$

**Теорема 3.3.2** *Пусть* $X_1, ..., X_n$ *— случайная выборка из распределения* $F$*, такого что* $\boldsymbol{E}|X|^r < \infty$ *для некоторого* $r > 0$*. Рассмотрим эмпирическую оценку премии Ванга:*

$$H_g[X]_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_{(i)} g'\left(1 - \frac{i}{n+1}\right),$$

*где* $X_{(i)}$ *—* $i$*-ая порядковая статистика. Предположим, что* $g''$ *существует и непрерывна на* $(0,1)$ *и выполнено условие:*

$$|g''(t)| \leq M(t(1-t))^{-3/2+1/r+\delta}, 0 < t < 1$$

*для некоторого* $\delta > 0$*. Тогда*

$$\sqrt{n}\left(H_g[X]_n - H_g(X)\right) \xrightarrow{d} N(0,\sigma^2), n \to \infty, \quad \textit{где}$$

$$\sigma^2 = \int_0^1\int_0^1 (s \wedge t - st) g'(1-s) g'(1-t) dF^{-1}(s) dF^{-1}(t).$$

В следующей теореме строится асимптотический доверительный интервал для премии Ванга.

**Теорема 3.3.3** *Пусть* $X_1, ..., X_n$ *— случайная выборка из распределения* $F$ *из некоторого масштабного семейства, такого что* $\boldsymbol{E}|X|^r < \infty$ *для некоторого* $r > 0$*,* $X = cX_0$ *(*$c > 0$*) и существуют конечные* $H_g(X_0) > 0$ *и* $\sigma^2(X_0)$*. Предположим, что* $g''$ *существует и непрерывна на* $(0,1)$ *и выполнено условие:*

$$|g''(t)| \leq M(t(1-t))^{-3/2+1/r+\delta}, 0 < t < 1.$$

*Тогда асимптотический доверительный интервал для премии* $H_g(X)$ *может быть построен следующим образом:*

$$H_g[X]_n - \frac{H_g[X]_n}{H_g(X_0)} \cdot \frac{\sigma(X_0)}{\sqrt{n}} u_\gamma < H_g(X) < H_g[X]_n + \frac{H_g[X]_n}{H_g(X_0)} \cdot \frac{\sigma(X_0)}{\sqrt{n}} u_\gamma,$$

*где* $u_\gamma$ *определяется из соотношения* $\Phi_0(u_\gamma) = \gamma/2$*,* $\Phi_0$ *— функция стандартного нормального распределения.*

**Глава 4** посвящена проблеме совместного страхования рисков.

В параграфе 1 главы 4 изложены определения и постановка задачи.

Одним из важных свойств принципа Ванга является его суббаддитивность в случае вогнутости функции искажения. Проще говоря, премия от суммы случайных величин не больше суммы премий от каждой случайной величины. При этом равенство достигается только в случае комонотонности случайных величин, т.е. когда каждая выражается как непрерывная возрастающая функция от другой[1]. Интересно выяснить, несколько велика разность между правой и левой частями неравенства в остальных случаях. С практической точки зрения, эта величина показывает, сколько может сэкономить клиент, имеющий два риска $X$ и $Y$, если застрахует их вместе, а не по отдельности (при условиии, что страховая компания руководствуется принципом Ванга при назначении премий). Далее везде полагаем функцию искажения вогнутой.

**Определение 4.2** Назовем величину:

$$\delta_g = \frac{(H_g(X) + H_g(Y)) - H_g(X+Y)}{(H_g(X) - \mathbf{E}X) + (H_g(Y) - \mathbf{E}Y)}$$

*относительной экономией* (от совместного страхования рисков по сравнению с раздельным).

Предполагается, что распределения рисков $X$ и $Y$ принадлежат некоторым сдвигово-масштабным семействам. Тогда легко заметить, что экономия не зависит от параметров сдвига. Более того, она не зависит и от самих параметров масштаба распределений $X$ и $Y$, а только от соотношения между ними. Поэтому целесообразным представляется следующая параметризация случайных величин: $X = \alpha X_0$, $Y = (1-\alpha)Y_0$, где $X_0$, $Y_0$ имеют стандартные распределения (в своих семействах), а $\alpha$ пробегает значения от 0 до 1. Таким образом, интерес представляет исследование зависимости $\delta_g(\alpha)$ от параметра $\alpha$:

$$\delta_g(\alpha) = \frac{(\alpha H_g(X_0) + (1-\alpha)H_g(Y_0)) - H_g(\alpha X_0 + (1-\alpha)Y_0)}{\alpha(H_g(X_0) - \mathbf{E}X_0) + (1-\alpha)(H_g(Y_0) - \mathbf{E}Y_0)}.$$

Здесь и далее будем предполагать, что $\mathbf{E}X_0$, $\mathbf{E}Y_0$, $H_g(X_0)$, $H_g(Y_0)$, $H_g(X_0 - Y_0)$, $H_g(Y_0 - X_0)$ конечны.

В параграфе 2 главы 4 получены общие свойства относительной экономии.

**Теорема 4.2.1** *Относительная экономия является непрерывной функцией, удовлетворяющей условию Гельдера 1-й степени.*

**Теорема 4.2.2** *В случае, когда $X_0$ и $Y_0$ имеют одинаковое распределение, относительная экономия является вогнутой функцией.*

**Теорема 4.2.3 (о симметрии).** *Если $(X_0, Y_0)$ распределено как $(Y_0, X_0)$, то $\delta(\alpha) = \delta(1-\alpha)$.*

**Следствие 4.2.2** *Если $(X_0, Y_0)$ распределено как $(Y_0, X_0)$, то относительная экономия достигает максимума в точке 1/2.*

В параграфе 3 главы 4 рассмотрен случай независимых рисков. Поскольку вычисление относительной экономии в явном виде для большинства случаев либо невозможно, либо затруднительно, то были рассмотрены примеры равномерного, показательного, нормального распределения рисков, распределений Лапласа и Бернулли, а также устойчивых распределений. В качестве функции искажения рассмотрена квадратичная функция $g(t) = 1 - (1-t)^2$ (в соответствии с принципом Джини).

Графики относительных экономий представлены на рисунке 1 (для распределения Бернулли принято $p = 1/2$, для строго устойчивого распределения — $A = 3/2$).

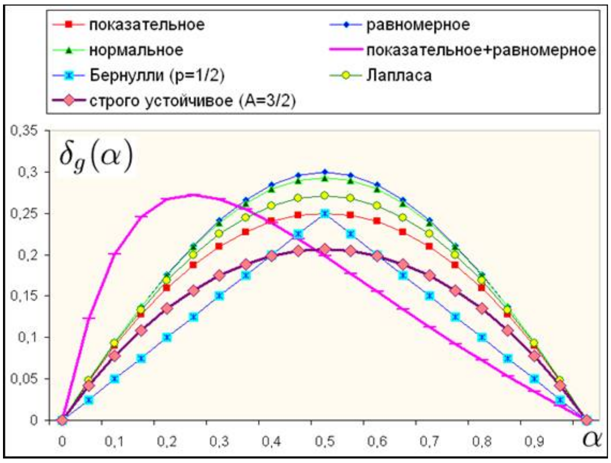


Рис. 1: Графики относительных экономий для независимых рисков

Результаты приводят к выводу, что относительная экономия слабо чувствительна к типу распределения, и для ее оценки на практике можно использовать модельные распределения из числа перечисленных выше. В случае независимых рисков получены функции относительной экономии и найдены их максимумы.

В параграфе 4 главы 4 рассмотрен случай зависимых рисков. Сначала рассмотрена традиционная корреляционная зависимость (с коэффициентом корреляции $\rho$) для двумерного нормального распределения и нормальных масштабных смесей. Получен замечательный факт, что относительная экономия не зависит в этих случаях от выбора функции искажения и равна

$$\delta_g(\alpha, \rho) = 1 - \sqrt{1 - 2\alpha(1-\alpha)(1-\rho)},$$

$$\max_{\alpha} \delta_g(\alpha, \rho) = 1 - \sqrt{\frac{1+\rho}{2}}.$$

Отметим, что одномерные масштабные нормальные смеси подробно изучались в главе 12 книги Королева, Бенинга, Шоргина[8], а многомерные масштабные нормальные смеси — в книге МакНейла, Фрея, Эмбрехтса[17].

Здесь, однако, необходимо отметить, что большинство данных на практике (в том числе, страховые и финансовые риски) имеют формы зависимости, сильно отличающиеся от гауссовской, и ее использование в расчетах может привести к серьезным ошибкам. Наиболее полной и при этом свободной от влияния частных распределений характеристикой зависимости случайных величин является копула[13].

Были проведены оценки относительной экономии для копул Фарли-Гумбеля-Моргенштерна, Спирмена и Рафтери в случае показательного распределения рисков и квадратичной функции искажения.

[17] McNeil A.J., Frey R., Embrechts P., *Quantitative Risk Management*, Princeton University Press, 2005.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю, кандидату физико–математических наук, доценту А.В. Лебедеву за постановку задач, внимание и помощь в работе, а также докторам физико–математических наук, профессору Е.В. Булинской и профессору Ю.В. Королеву за полезные замечания и советы.

## Работы автора по теме диссертации

[1] Ирхина Н.А., *Обобщение достаточного критерия сводимости принципа Ванга*, Обозрение прикладной и промышленной математики, 2009, Том 16, выпуск 4, стр. 594-606.

[2] Ирхина Н.А., *Об одном достаточном условии сводимости для принципа Ванга*, Теория вероятностей и ее применения, 2010, Том 55, выпуск 1, стр. 148-156.

[3] Ирхина Н.А., *Максимизация чувствительности PHp-премии для семейств рисков, распределенных по Парето*, Вестник МГУ, Сер. 1. Математика. Механика, 2010, выпуск 4, стр. 28-33.

[4] Ирхина Н.А., *Принцип Ванга подсчета премии в страховании и некоторые критерии сводимости*, Обозрение прикладной и промышленной математики, 2009, Том 16, выпуск 2, стр. 262-263.

[5] Ирхина Н.А., *Принцип Ванга подсчета премии и проблема сводимости в теории страхования*, Тезисы докладов секции "Математика и механика" Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов-2009", 2009, стр. 28-29.

[6] Ирхина Н.А., *Экономия от совместного страхования рисков по принципу Ванга*, Деп. в ВИНИТИ № 549-В2010, 35 стр.

[7] Ирхина Н.А., *Предельные теоремы и оценки для премий Ванга*, Деп. в ВИНИТИ № 550-В2010, 25 стр.