МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 517.9

Тарасов Алексей Геннадьевич

СПЕКТР РЕЗОНАНСОВ ОДНОМЕРНОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Москва, 2010

Работа выполнена на кафедре математического анализа механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Степин Станислав Анатольевич
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Шафаревич Андрей Игоревич,
	кандидат физико-математических наук, Титов Василий Александрович
Ведущая организация:	Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН

Зашита диссертации состоится 26 ноября 2010 г. в 16 часов 40 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.85 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж) .

Автореферат разослан "__________ " ______________ 2010 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д 501.001.85 при МГУ
доктор физико-математических наук,
профессор

В. Н. Сорокин

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы

Метод перевала является эффективным средством исследования асимптотического поведения при $\lambda \to \infty$ интегралов вида

$$\int_\gamma \exp\bigl[\lambda S(z)\bigr] f(z)\, dz\,, \tag{$*$}$$

где γ — контур в комплексной плоскости z. Такие интегралы возникают в различных областях математики и ее приложениях. Предметом настоящей диссертации является развитие метода перевала и его применение в задаче локализации и асимптотического распределения резонансов одномерного оператора Шредингера.

Способы получения асимптотических оценок интегралов вида $(*)$ восходят к Эйлеру и Лапласу, заложившим основы подхода, впоследствии названного методом перевала.Дальнейшее развитие он получил в работах Стокса, Кельвина, Дебая и многих других авторов. Данный метод состоит из двух этапов: выбора подходящего пути интегрирования (перевального контура) и вычисления асимптотики интеграла по этому пути. Перевальный контур строится таким образом, чтобы он проходил через критические точки (точки перевала) фазовой функции $S(z)$, дающие основной вклад в асимптотику интеграла. Этот этап на практике представляет собой трудную задачу, поскольку неизвестен общий простой алгоритм построения такого контура.

Развитию и применению указанных идей посвящено большое количество работ (см. [1-5]

тенциалом V.

[1] Эрдейи А., Асимптотические разложения, М., Физматгиз, 1962.

[2] Евграфов М.А., Асимптотические оценки и целые функции, М., Физматгиз, 1962.

[3] Копсон Э., Асимптотические разложения, М., Мир, 1966.

[4] Федорюк М.В., Асимптотика: интегралы и ряды, М., Наука, 1978.

[5] Олвер Ф., Асимптотика и специальные функции. М., Наука, 1990.

Изучение распределения и локализации резонансов, в частности отыскание зон свободных от них, является важным направлением в математической теории рассеяния. Этой проблематике посвящено огромное количество работ, среди которых отметим наиболее близкие к теме диссертации: [6-10]. В случае финитного потенциала известны [11] оценки сверху считающей резонансы функции соответствующего оператора Шредингера. Применительно к этой ситуации в [8] получены асимптотические формулы полюсов матрицы рассеяния, указывающие на точность оценок из [11]. Для оператора Шредингера с супер-экспоненциально убывающим потенциалом в работе [9] изучалась локализация резонансов в терминах их угловой считающей функции. В работе [10] установлена связь между различными подходами к решению задачи о локализации и распределении резонансов. Об актуальности данной тематики свидетельствуют также исследования локализации резонансов численно-аналитическими методами (см., например, [12], где такое исследование проводится в случае гауссовского потенциала). Основные результаты диссертации уточняют и усиливают утверждения об асимптотическом распределении резонансов, полученные в [8] и [9].

Искомые резонансы являются нулями целой функции – определителя матрицы рассеяния, элементы которой (так называемые коэффициенты отражения и прохождения) представляют

---

[6] Regge T., Analytic properties of scattering matrix, Nuovo Cimento, 10, (1958), 8, 671-679.

[7] Кравицкий А.О., О двукратном разложении в ряд по собственным и присоединенным функциям одной краевой задачи, Дифф. уравнения, 4, 1 (1968), 165-177.

[8] Zworski M., Distribution of poles for scattering on the real line, J. Funct. Anal., 73, (1987), 227-296.

[9] Froese R., Asymptotic distribution of resonances in one dimension, J. Differential Equations, 137, (1997), 160-193.

[10] Simon B., Resonances in one dimension and Fredholm determinants, J. Funct. Anal. 178, (2000), 396-420.

[11] Melrose R., Polynomial bounds on the number of scattering poles, J. Funct. Anal. 53, (1983), 287-303.

[12] Abramov A.A., Aslanyan A., Davies E.B., Bounds on complex eigenvalues and resonances, J. Phys. A: Math. Gen. 34, (2001), 57-72.

собой интегралы вида ($*$). Разработанная в диссертации техника оценок таких интегралов позволяет установить, что распределение полюсов матрицы рассеяния определяется ее борновским приближением, получающимся линеаризацией относительно потенциала V. Применительно к рассматриваемому классу потенциалов, включающего гауссовский, обоснование данного факта сводится к асимптотической оценке интегралов типа ($*$) с комплексным параметром λ в показателе экспоненты и подынтегральной функцией $f(z)$, также зависящей от этого параметра.

Исходным пунктом применяемого подхода является информация об асимптотическом поведении преобразования Фурье потенциала V в комплексной плоскости. Полученные на этом пути сведения представляют самостоятельный интерес с точки зрения теории целых функций.

Цель диссертации

Разработка техники (на базе метода перевала) асимптотических оценок интегралов типа ($*$), и ее применение для исследования спектра резонансов одномерного оператора Шредингера.

Научная новизна

Все основные результаты диссертации являются новыми. В работе развита техника исследования поведения интегралов вида ($*$) при больших по модулю значениях параметра λ. С помощью данной техники детально изучено распределение резонансов одномерного оператора Шредингера.

1) В случае финитного комплекснозначного потенциала с нулями произвольных (не обязательно целых) порядков касания на концах носителя показано, что спектр резонансов состоит из двух серий, расположенных вблизи логарифмик, параметры которых определяются размером носителя потенциала и порядками нулей на его концах. Получена асимптотика резонансов с квалифицированной оценкой остатка.

2) Для класса супер-экспоненциально убывающих потенциалов, включающего гауссовский, выявлены зоны асимптотически свободные от полюсов матрицы рассеяния. В случае потенциалов вида $V(x) = e^{-x^{2m}/2m}$, $m \in \mathbb{N}$, установлено, что спектр резонансов

состоит из двух серий, расположенных вблизи лучей, угловой коэффициент которых определяется порядком роста преобразования Фурье $\widehat{V}(k)$. Выписана асимптотическая формула для полюсов матрицы рассеяния с квалифицированной оценкой остатка.

3) Дано обоснование борновского приближения в задаче о локализации и распределения полюсов матрицы рассеяния применительно к потенциалам вида $e^{-P(x)}$, где $P(x)$ — многочлен с вещественными коэффициентами, представляющий собой асимптотически знакоопределенное возмущение монома четной степени. Для таких потенциалов исследовано асимптотическое поведение преобразования Фурье в комплексной плоскости. Получены соотношения типа правил квантования, определяющие местоположение больших по модулю резонансов.

Методы исследования

В работе используются асимптотические методы, результаты комплексного анализа, техника теории возмущений.

Практическая и теоретическая ценность

Диссертация имеет теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы в спектральной теории дифференциальных операторов, в теории целых функций, а также при исследовании асимптотического поведения интегралов с большим параметром.

Апробация работы Результаты диссертации докладывались на

- заседаниях научно-исследовательских семинаров механико-математического факультета МГУ:
  - на семинаре "Математическая теория рассеяния" под руководством проф. Р.А. Минлоса (2005-2008 г.),
  - на семинаре "Негармонический анализ" под руководством проф. А.М. Седлецкого (2010 г.),
  - на семинаре "Геометрические вопросы математической физики" под руководством проф. А.И. Шафаревича (2010 г.);

- в Институте проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН (Москва, 2009);
- на конференциях
    - на Международной конференции, посвященной 105-летию академика С.М. Никольского (Москва, МГУ, 2010),
    - на Международной Добрушинской конференции (Москва, ИППИ РАН, 2009),
    - на Международной конференциях по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (Суздаль, 2008; 2010).

Поддержка

Настоящая диссертационная работа выполнена в рамках программы исследований по гранту Н.Ш.– поддержки научной школы академика В.А. Садовничего.

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1-4], их список приведен в конце автореферата. Работы [1, 2] опубликованы в журнале из списка рекомендованного ВАК.

Структура диссертации

Диссертация состоит из введения, двух глав (первая из которых содержит пять параграфов, а вторая разделена на десять параграфов) и списка литературы, насчитывающего 50 наименований. Имеется 15 иллюстраций. Общий объем диссертации – 101 страница.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во **введении** дан обзор результатов, связанных с тематикой исследования, приводятся постановки задач и сформулированы результаты диссертации.

В **первой главе** изучается спектр краевой задачи на отрезке $[a,b]$

$$\begin{aligned} -y''(x) + V(x)y(x) &= k^2 y(x)\,, && (1)\\ y'(a) + iky(a) &= y'(b) - iky(b) = 0, && (2) \end{aligned}$$

где спектральный параметр k входит в уравнение (1) и в граничные условия (2). Предполагается, что комплекснозначная непрерывная функция $V(x)$ в точках a и b имеет нули порядков α и β соответственно:

$$V(x) = (x-a)^{\alpha} q(x)(b-x)^{\beta}, \quad q(a)\cdot q(b) \neq 0.$$

Предложение 1. *В верхней полуплоскости* $\mathbb{C}_+$ *находится лишь конечное число собственных значений задачи* (1)-(2), *причем все они расположены в круге* $\left\{|k| \leqslant 3(b-a) \max\limits_{x\in[a,b]} |V(x)|\right\}$.

Точки спектра рассматриваемой задачи, лежащие в $\mathbb{C}_-$, являются резонансами заданного на всей прямой оператора Шредингера $L_V = -d^2/dx^2 + V(x)$ с потенциалом, продолженным нулем за пределы отрезка $[a,b]$. Основным результатом данной главы является

Теорема 1. *Пусть* $q \in C^{\mathcal{N}}[a,b]$, $\mathcal{N} \geqslant \max\{\alpha,\beta\} + 2$. *Тогда в полуплоскости* $\mathbb{C}_-$ *спектр резонансов оператора* L_V *состоит из двух серий* $\{k_n^{\pm}\}$ *с асимптотиками*

$$\begin{aligned} k_n^{\pm} = \pm\frac{\pi n}{b-a} - \frac{i\gamma \ln n}{2(b-a)} + \frac{i \ln \mathcal{C}}{2(b-a)} \pm \frac{\pi\gamma}{4(b-a)} - \\ - \frac{i\gamma}{2(b-a)} \ln\left(\frac{2\pi}{b-a}\right) + O\left(\frac{\ln n}{n}\right),\ n \to +\infty\,, \quad (3) \end{aligned}$$

где $\mathcal{C} = \Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)q(a)q(b)(b-a)^{\alpha+\beta}$, $\gamma = \alpha+\beta+4$.

Задача (1)-(2) в случае целых α и β исследована в статье [8], где резонансы $k_n^{\pm}$ вычислены с точностью $o(1)$ при $n \to \infty$. Сформулированная выше теорема дополняет (и в определенном смысле усиливает) основной результат работы [8], а именно она позволяет рассматривать комплексные потенциалы $V(x)$ с нулями произвольных, не обязательно целых, порядков касания в точках a и b, и для таких потенциалов выписывать асимптотику собственных значений задачи (1)-(2) с квалифицированной оценкой остатка. В [13] рассмотрена задача Редже, отличающаяся от (1)-(2) заменой первого из краевых условий (2) условием $y(a)=0$, и для нее там получены асимптотические формулы распределения точек спектра. Метод получения асимптотических формул (3) родственен подходу, используемому в [13], и существенно отличается от метода работы [8].

Спектр задачи (1)-(2) совпадает с нулями ее характеристического определителя

$$\begin{vmatrix} y_1'(a,k) + ik\, y_1(a,k) & y_2'(a,k) + ik\, y_2(a,k) \\ y_1'(b,k) - ik\, y_1(b,k) & y_2'(b,k) - ik\, y_2(b,k) \end{vmatrix},$$

который строится по фундаментальной системе решений $y_{1,2}(x,k)$ уравнения (1). В ходе доказательства теоремы 1 в качестве такой системы выбирается пара $y_1(x,k) = e^{ikx}v_1(x,k)$ и $y_2(x,k) = e^{-ikx}v_2(x,k)$, где $v_1(x,k)$ и $v_2(x,k)$ суть решения интегральных уравнений

$$\begin{aligned} v_1(x,k) &= 1 + \frac{1}{2ik}\int_a^x (1 - e^{-2ik(x-t)})V(t)v_1(t,k)\,dt, \\ v_2(x,k) &= 1 + \frac{1}{2ik}\int_x^b (1 - e^{-2ik(t-x)})V(t)v_2(t,k)\,dt. \end{aligned}$$

В результате, исследование спектра задачи (1)-(2) сводится к изучению корней уравнения

$$e^{2ik(b-a)}v_1'(b,k)v_2'(a,k) = 4k^2. \tag{4}$$

---

[13] Федорюк М.В., Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, М., Наука, 1977.

В §1 построены решения $v_1(x,k)$ и $v_2(x,k)$ указанных выше интегральных уравнений и, затем, изучено их асимптотическое поведение при больших по абсолютной величине значениях параметра $k \in \mathbb{C}_-$. На основе этой информации в §2 установлено предложение 1.

В §3 исследованы асимптотические свойства интегралов типа Лапласа

$$I(f,z) \;=\; \int_{a+\frac{1}{\mathrm{Re}\, z}}^{b} e^{-z(b-t)} f(t)\,dt$$

с подынтегральной функцией f из специального класса $(\eta|N|\theta)$, при больших по модулю значениях комплексного параметра z, лежащего в правой полуплоскости.

Определение 1. *Функция $f : (a,b) \to \mathbb{C}$ принадлежит классу $(\eta|N|\theta)$, где $\eta,\theta \in \mathbb{R}$ и $N \in \mathbb{N}$, если $f \in C^N(a,b)$ и для $\kappa \leqslant N$ и $\delta \in (a,b)$ найдется такое $c_\kappa^\delta > 0$, что*

$$|f^{(\kappa)}(x)| \;\leqslant\; c_\kappa^\delta \begin{cases} [1+(x-a)^{\eta-\kappa}]\,, & x \in (a,\delta], \\ (b-x)^{\theta-\kappa}, & x \in [\delta, b). \end{cases}$$

Утверждение 1. *Пусть $g \in (\eta|N|\theta)$, где $N = 2-[-\theta]$ и $\theta > -1$, причем $g(x)(b-x)^{-\theta} \in C^N(a,b]$. Тогда при достаточно больших значениях $\sigma = \mathrm{Re}\, z$ имеет место равенство*

$$I(g,z) \;=\; \mu\,\Gamma(\theta+1)\,z^{-\theta-1} \;+\; O(z^{-\theta-2}) \;+\; O([1+\sigma^{-\eta}]e^{-\sigma(b-a)}),$$

где $\mu = \lim\limits_{x\to b} g(x)(b-x)^{-\theta}$.

Результаты §3 применяются в §4 для исследовании поведения производных

$$v_1'(b,k) \;=\; \int_a^b e^{-2ik(b-t)} V(t) v_1(t,k)\; dt$$

и

$$v_2'(a,k) \;=\; \int_a^b e^{-2ik(t-b)} V(t) v_2(t,k)\; dt$$

при больших по модулю значениях $k \in \mathbb{C}_-$.

Утверждение 2. *В нижней полуплоскости* $\mathbb{C}_-$ *справедливы следующие асимптотические формулы*

$$
\begin{aligned}
v_1'(b,k) &= q(b)(b-a)^{\alpha}\Gamma(\beta+1)\,(2ik)^{-\beta-1} + O(k^{-\beta-2}) + O(e^{2(b-a)\mathrm{Im}\,k}),\\
v_2'(a,k) &= -q(a)(b-a)^{\beta}\Gamma(\alpha+1)\,(2ik)^{-\alpha-1} + O(k^{-\alpha-2}) + O(e^{2(b-a)\mathrm{Im}\,k}).
\end{aligned}
$$

Это утверждение является ключевым при выводе асимптотик (3). Идея его доказательства основана на использовании формулы

$$
\begin{aligned}
&\int_c^d e^{-2ik(b-x)} f(x) v_1(x,k)\,dx \;= \\
&= \frac{1}{2ik}\left(f(x)v_1(x,k)e^{-2ik(b-x)} + \int_x^b f(t)\,dt \int_a^x e^{-2ik(b-t)} p(t) v_1(t,k)\,dt \right)\Big|_c^d + \\
&\qquad + \frac{1}{2ik}\int_c^d e^{-2ik(b-x)}\, l(f)(x)\, v_1(x,k)\,dx, \quad (5)
\end{aligned}
$$

где $[c,d] \subset (a,b)$, а $l(f)(x) := -f'(x) - V(x)\int_x^b f(t)\,dt$ – интегро-дифференциальная операция, переводящая класс функций $(\eta|N|\theta)$ в класс функций $(\eta-1|N-1|\theta-1)$. Применение формулы (5) позволяет сначала "грубо" оценить производные $v_1'(b,k)$ и $v_2'(a,k)$ величиной порядка $O\big(k^{-m}\big)$, где $m = \min\{\alpha,\beta\}$, а, затем, используя утверждение 1, вывести требуемые асимптотические формулы.

Параграф 5 посвящен доказательству теоремы 1, которое проводится по следующей схеме. Сначала с помощью "грубых" оценок $v_1'(b,k)$ и $v_2'(a,k)$ выявляются зоны свободные от резонансов оператора L_V.

Предложение 2. *Существует* $\tau < 0$ *такое, что множество*

$$
G = \big\{ \mathrm{Im}\,k \leqslant \tau,\ |2k|^{\varkappa} \geqslant e^{-2\mathrm{Im}\,k(b-a)} \big\}, \quad \varkappa = \min\{\alpha,\beta\} + 2,
$$

не содержит точек спектра задачи (1)-(2), *а в полосе* $\{\tau \leqslant \mathrm{Im}\,k \leqslant 0\}$ *находится лишь конечное их число.*

Далее, из утверждения 2 вытекает, что в области $\mathbb{C}_- \setminus G$ множество корней уравнения (4) совпадает с множеством, состоящим из решений однопараметрического семейства уравнений

$$2ik - \frac{\gamma}{b-a} \ln 2ik + \delta(k) \;=\; \omega_n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

где $\omega_n = \dfrac{2\pi i n}{b-a} - \dfrac{\ln \mathcal{C}}{b-a}$ и $\delta(k) = O(k^{-1})$. Каждое уравнение из этого семейства может иметь лишь конечное число решений; более того, при достаточно больших по модулю значениях параметра n уравнение с номером n имеет единственный корень

$$k_n \;=\; -i\omega_n/2 \,-\, i\frac{\gamma}{2(b-a)} \ln \omega_n \,+\, O(\ln |n|/|n|).$$

Обоснование этого факта завершает доказательство теоремы 1.

Во **второй главе** диссертации рассматривается оператор Шредингера $L_V = -d^2/dx^2 + V$ с потенциалом $V(x)$, удовлетворяющим условию супер-экспоненциалного убывания: для любого $M > 0$ найдется $T = T(M) > 0$ такое, что при всех $x \in \mathbb{R}$

$$|\,V(x)\,| \;\leqslant\; T\, e^{-M|x|}\,.$$

Под резонансами оператора L_V понимаются полюса аналитического продолжения в нижнюю полуплоскость его матрицы рассеяния

$$\mathcal{S}(k) \;=\; \begin{pmatrix} A(k) & B(k) \\ C(k) & D(k) \end{pmatrix}.$$

Элементы этой матрицы (коэффициенты отражения и прохождения) при $k \in \mathbb{C}_+$ представимы в виде интегралов

$$\begin{aligned} B(k) \;&=\; \frac{1}{2ik} \int_{\mathbb{R}} e^{-ikx}\, V(x)\, y^{(-)}(x,k)\, dx\,, \\ C(k) \;&=\; \frac{1}{2ik} \int_{\mathbb{R}} e^{ikx}\, V(x)\, y^{(+)}(x,k)\, dx\,, \end{aligned}$$

где $y^{(\pm)}(x,k) \;=\; e^{\pm ikx} - R_V(k)\, e^{\pm ikx} V$, а $R_V(k) = (L_V - k^2 I)^{-1}$ – резольвента рассматриваемого оператора, и, соответственно,

$$
\begin{aligned}
A(k) &= 1 + \frac{1}{2ik}\int_{\mathbb{R}} e^{-ikx}\, V(x)\, y^{(+)}(x,k)\, dx\,,\\
D(k) &= 1 + \frac{1}{2ik}\int_{\mathbb{R}} e^{ikx}\, V(x)\, y^{(-)}(x,k)\, dx.
\end{aligned}
$$

Данное выше определение резонансов согласуется с определением, принятым в первой главе для финитных потенциалов. Основной целью главы 2 диссертации является изучение спектра резонансов для супер-экспоненциально убывающих потенциалов и, в частности, обоснование того факта, что асимптотически распределение полюсов матрицы рассеяния определяется ее борновским приближением.

Определение 2. *Борновским приближением матрицы рассеяния $\mathcal{S}(k)$ называется выражение*

$$
\begin{pmatrix}
1 + \dfrac{1}{2ik}\displaystyle\int V(x)\, dx & \dfrac{1}{2ik}\displaystyle\int e^{-2ik} V(x)\, dx \\
\dfrac{1}{2ik}\displaystyle\int e^{2ik} V(x)\, dx & 1 + \dfrac{1}{2ik}\displaystyle\int V(x)\, dx
\end{pmatrix}
$$

получающееся в результате линеаризации относительно потенциала V.

В работе [9] для оператора Шредингера с супер - экспоненциально убывающим потенциалом $V(x)$ дано описание асимптотического распределения резонансов в терминах их угловой считающей функции. Для потенциалов рассматриваемого там класса предполагается, что преобразование Фурье $\widehat{V}(k)$ — целая функция порядка $\rho > 1$ и вполне регулярного роста, а также выполнены некоторые дополнительные условия технического характера. В этих предположениях в [9] утверждается, что резонансы оператора Шредингера сосредоточены (концентрируются) вблизи лучей $\arg k = -\pi/2 \pm \pi/2\rho$. Эту информацию о локализации спектра резонансов подтверждают и уточняют результаты главы 2.

В §1 показано, что резонансы оператора L_V совпадают с нулями определителя $E(k) = \det \mathcal{S}(-k)$, который имеет следующий вид

$$E(k) \;=\; 1 + \; B(-k)C(-k) \,+\, O(k^{-1})\,, \quad \mathbb{C}_- \ni k \to \infty.$$

Таким образом, задача исследования распределения резонансов сведена к анализу асимптотического поведения при больших по модулю значениях параметра $k \in \mathbb{C}_-$ интегралов типа Фурье

$$I_+(k) \;:=\; -2ikB(-k) \;=\; \int_{\mathbb{R}} e^{2ikx}\, V(x) \big(1 - f_-(x,k)\big)\, dx$$

и

$$I_-(k) \;:=\; -2ikC(-k) \;=\; \int_{\mathbb{R}} e^{-2ikx}\, V(x) \big(1 - f_+(x,k)\big)\, dx\,,$$

в которых

$$f_\pm(x,k) \;=\; e^{\pm ikx}\, R_V(-k)\, e^{\mp ikx}\, V\,.$$

Предварительные оценки функций $f_\pm(x,k)$ и интегралов $I_\pm(k)$ установлены в §2, где, в частности, показано, что ограниченность преобразования Фурье $\widehat{V}(k)$ на множестве $\big\{k \in \mathbb{C}_-, |\arg(\pm k)| \leqslant \psi\big\}$ влечет и ограниченность рассматриваемых интегралов на этом множестве. Применение этих результатов в задаче о локализации и распределении резонансов позволяет выделить зоны асимптотически свободные от них (ср. [14]).

Предложение 3. *Пусть преобразование Фурье* $\widehat{V}(k)$ *ограничено на множестве* $\big\{|\arg(\pm k)| \leqslant \psi\big\}$. *Тогда в указанных секторах может содержаться лишь конечное число резонансов оператора Шредингера* $L_V = -d^2/dx^2 + V(x)$.

Далее, в §§ 3-5 для потенциалов вида $V(x) = e^{-x^{2m}/2m}$, где $m \in \mathbb{N}$, детально изучено распределение резонансов. Случай гауссовского потенциала рассмотрен отдельно в §3.

[14] Hitrik M. Bounds on scattering poles in one dimension. Commun. Math. Phys. 208, (1999), 381-411.

Теорема 2. *Множество резонансов оператора Шредингера с потенциалом $V(x) = e^{-x^2/2}$ состоит из двух серий $\{k_n^\pm\}$ с асимптотиками*

$$k_n^\pm \;=\; \pm\sqrt{\frac{\pi n}{2}}\, e^{\mp i\pi/4}\left(1 \mp i\,\frac{\ln n}{4\pi n} + \frac{1}{8n} + O\big(n^{-5/4}\big)\right), \quad n \to +\infty\,.$$

В случае $m \geqslant 2$ предварительно исследовано асимптотическое поведение интегралов $I_\pm(k)$ в секторе $K := \big\{\arg k \in (-\pi + \pi/4m, -\pi/4m)\big\}$.

Лемма 1. *При $K \ni k \to \infty$ справедливы формулы*

$$I_\pm(k) \;=\; \sqrt{\frac{2\pi}{2m-1}}\,(2ik)^{\frac{1-m}{2m-1}} \exp\left\{\frac{2m-1}{2m}\,(2ik)^{\frac{2m}{2m-1}}\right\}\left(1 + O\big(k^{\frac{1-m}{2m-1}}\big)\right).$$

В соответствии с этим уравнение $E(k) = 0$ в секторе K преобразуется к виду

$$\frac{2\pi}{2m-1}\,(2ik)^{\frac{4-6m}{2m-1}}\, \exp\left\{\frac{2m-1}{m}\,(2ik)^{\frac{2m}{2m-1}}\right\}\big(1 + O\big(k^{\frac{1-m}{2m-1}}\big)\big) \;=\; 0\,,$$

пригодному для вычисления корней с нужной точностью. Отметим, что такого же вида уравнение получается, если приравнять к нулю определитель борновского приближения матрицы рассеяния.

Теорема 3. *Множество резонансов оператора Шредингера L_V с потенциалом $V(x) = e^{-x^{2m}/2m}$, где $m \geqslant 2$, состоит из двух серий $\{k_n^\pm\}$, имеющих при $n \to +\infty$ асимптотики*

$$k_n^\pm \;=\; \pm\frac{e^{\mp i\frac{\pi}{4m}}}{2}\left(\frac{2\pi m}{2m-1}\,n\right)^{\frac{2m-1}{2m}}\Bigg[\,1 \;\mp\; i\,\frac{(3m-2)(2m-1)}{4\pi m^2}\,\frac{\ln n}{n} \;\mp$$
$$\mp\;\; i\,\frac{(2m-1)C_\pm}{4\pi m^2}\,\frac{1}{n} \;+\; O\big(n^{\frac{1-3m}{2m}}\big)\Bigg],$$

где $C_\pm \;=\; m\,\ln\dfrac{2m-1}{2\pi} \;+\; (3m-2)\left(\ln\dfrac{2\pi m}{2m-1} \pm i\,\dfrac{\pi}{2}\right).$

Исходным пунктом подхода, применяемого для вычисления асимптотик интегралов $I_\pm(k)$, является информация об асимптотическом поведении преобразования Фурье $\widehat{V}(k)$ в комплексной плоскости: функция $\widehat{V}(k)$ экспоненциально растет вне секторов $|\arg(\pm k)| \leqslant \pi/4m$ и убывает внутри этих секторов с ростом модуля аргумента (см., например, [15]). В силу предложения 3, соответствующий оператор Шредингера имеет внутри этих секторов лишь конечное множество резонансов. В секторе K с помощью метода перевала устанавливается, что асимптотика преобразования Фурье $\widehat{V}(\pm 2k)$ при $|k| \to \infty$ определяется вкладом от точки перевала $z_0(k) = (2ik)^{\frac{1}{2m-1}}$ функции $S(z,k) = 2ikz - z^{2m}/2m$, а именно

$$\widehat{V}(\pm 2k) = \frac{1}{\sqrt{P''(z_0(k))}} \exp\big(S(z_0(k),k)\big)\Big(1 + O\big(k^{\frac{-m}{2m-1}}\big)\Big) =$$

$$= \sqrt{\frac{2\pi}{2m-1}}\,(2ik)^{\frac{1-m}{2m-1}} \exp\left\{\frac{2m-1}{2m}\,(2ik)^{\frac{2m}{2m-1}}\right\}\Big(1+O\big(k^{\frac{-m}{2m-1}}\big)\Big)\,.$$

В итоге, обоснование асимптотических формул для $I_\pm(k)$ сводится к получению оценок

$$\int_{\mathbb{R}} e^{\pm 2ikx}\, V(x)\, f_\mp(x,k)\, dx = \int_{\mathbb{R}} e^{2ikx}\, V(x)\, f_-(x,k)\, dx =$$
$$= \exp\left\{\frac{2m-1}{2m}\,(2ik)^{\frac{2m}{2m-1}}\right\} O\big(k^{\frac{2-2m}{2m-1}}\big)\,,$$

которые установлены с помощью определенной модификации метода перевала. Важным элементом этой конструкции, представляющей собой одно из ключевых мест работы, является построение аналитического продолжения (по переменной z) подынтегральной функции $f_-(z,k)$ в область, содержащую перевальный контур $\mathbb{R}_- \cup [0,\, 2z_0(k)] \cup \big(2z_0(k) + \mathbb{R}_+\big)$ фазовой функции $S(z,k)$.

[15] Backhoom N. G., Asymptotic expansions of the function $F_k(x) = \int_0^\infty e^{-u^k + xu} du$. Proc. Lond. Math. Soc. 33 (2) (1933), 83-100.

Лемма 2. *При каждом фиксированном* $k \in K$, $|k| \geqslant 2\|V\|_1$, *функции* $f_-(z,k)$ *аналитически продолжаются по переменной* z *в область*

$$\big\{|\arg z| < \pi/4m\big\} \bigcap \big\{|\mathrm{Im} z| < \sin\big(\pi/4m\big)|k|/4\big\}\,,$$

где для них справедливы оценки

$$\big|\, f_-(z,k)\,\big| \;\leqslant\; \frac{\|V\|_1 + 2|\mathrm{Im} z|\big/\sin\big(\pi/4m\big)}{|k|}\,.$$

Полученные для $f_-(z,k)$ оценки свидетельствуют о том, что в секторе K интеграл $I_\pm(k)$ есть относительно малое возмущение преобразования Фурье $\sqrt{2\pi}\widehat{V}(\pm 2k)$, а матрица рассеяния $\mathcal{S}(k)$ – соответственно малое возмущение своего борновского приближения. Последнее и позволяет использовать это приближение вместо самой матрицы $\mathcal{S}(k)$ для локализации ее полюсов и вывода асимптотического закона их распределения.

В параграфах 6 - 10, описанная выше схема исследования спектра резонансов, распространена (с соответствующими изменениями) на потенциалы более широкого класса.

Теорема 4. *Для четных потенциалов вида*

$$V(x) \;=\; e^{-P(x)}\,, \quad P(x) \;=\; a_{2m}x^{2m} + a_{2n}x^{2n} \;+\; \ldots + \;a_0,$$

таких, что $a_{2m}, a_{2n} > 0$, $m > 2$, *множество резонансов оператора* $L_V \;=\; -\,d^2\big/dx^2 \;+\; V(x)$ *состоит из двух серий* $k_\nu^\pm$, *определяемых при достаточно больших* $\nu \in \mathbb{N}$ *соотношениями типа правил квантования*

$$S\big(z_0(k_\nu^\pm), k_\nu^\pm\big) \;=\; \omega_{\pm\nu} \;+\; \frac{3m-2}{2m}\,\ln\omega_{\pm\nu} \;+\; O\left(\nu^{-\min\left\{1-\frac{n}{m},\,\frac{1}{2}-\frac{1}{m}\right\}}\right),$$

где $z_0(k) \;\sim\; \Big(ik/ma_{2m}\Big)^{1/(2m-1)}$ *– точка перевала функции* $S(z,k) \,=\, 2ikz - P(z)$ *и*

$$\omega_{\pm\nu} \;=\; \pm\,\pi i\nu \;-\; \frac{3m-2}{2m}\,\ln\big((2m{-}1)a_{2m}\big) \;+\; \frac{1}{2}\,\ln\big(4m^3(2m{-}1)a_{2m}^3/\pi\big)\,.$$

Способ построения перевального контура для фазовой функции $S(z,k)$, используемого в дальнейшем при выводе асимптотик интегралов $I_\pm(k)$, описан в §§6-8. Исследование асимптотического поведения преобразования Фурье $\widehat{V}(\pm k)$ в нижней полуплоскости проведено в §9.

Предложение 4. *На множестве* $K_C := \big\{k \in \mathbb{C}_-,\ \mathrm{Re}\ S(z_0(k),k) > C\big\}$*, где* $C > 0$ *достаточно велико, имеет место асимптотическая формула*

$$\widehat{V}(\pm 2k) \;=\; \frac{1}{\sqrt{P''(z_0(k))}}\exp\Big(S\big(z_0(k),k\big)\Big)\Big[1+O\big(|k|^{\frac{-m}{2m-1}}\big)\Big].$$

В секторах $\mathbb{C}_- \setminus K$ *рассматриваемая функция ограничена по модулю величиной*

$$\max_{|\psi|\leqslant\pi/4m}\int_{\mathbb{R}}\exp\Big(-\mathrm{Re}\,P(\,e^{i\psi}t)\Big)\,dt\,.$$

На множестве $K\setminus K_C$ *имеет место оценка*

$$\widehat{V}(\pm 2k) \;=\; O\Big(|z_0(k)|\,\Big[1+\exp\Big(\mathrm{Re}\ S\big(z_0(k),k\big)\Big)\Big]\Big).$$

Из ограниченности преобразования Фурье в секторах $\mathbb{C}_-\setminus K$, в силу предложения 3, вытекает, что оператор Шредингера имеет там лишь конечное число резонансов.

Наконец, в §10 производится оценка выражений $I_\pm(k)-\sqrt{2\pi}\widehat{V}(\mp 2k)$ в секторе K, которая (в совокупности с результатами §9) приводит к формулам

$$I_\pm(k) \;=\; \left(\frac{2\pi}{P''(z_0(k))}\right)^{1/2}\exp\Big(S\big(z_0(k),k\big)\Big)\Big[1+O\big(|k|^{\frac{2-m}{2m-1}}\big)\Big], \quad K_C\ni k\to\infty,$$

и

$$I_\pm(k) \;=\; O\left(\frac{|z_0(k)|^2}{|k|}\Big[1+\exp\Big(\mathrm{Re}\,S\big(z_0(k),k\big)\Big)\Big]\right), \quad K\ni k\to\infty.$$

Применение этих формул позволяет установить, что множество $K \setminus K_C$ является асимптотически свободным от резонансов, а на множестве K_C нули $E(k)$ асимптотически тождественны нулям определителя борновского приближения матрицы рассеяния и удовлетворяют уравнению

$$\frac{P'(z_0(k))^2 P''(z_0(k))}{\pi} \;=\; \exp\Big(2S(z_0(k),k)\Big)\Big[1+O(k^{\frac{2-m}{2m-1}})\Big].$$

Последнее решается с нужной точностью, что позволяет вывести асимптотический закон распределения резонансов оператора L_V, и приводит к указанным в теореме 4 соотношениям типа правил квантования.

Автор глубоко благодарен своему научному руководителю Станиславу Анатольевичу Степину за постановку задач, внимание и помощь на протяжении всей работы над диссертацией.

Список работ автора по теме диссертации

1. С.А. Степин, А.Г. Тарасов
   Асимптотическое распределение резонансов для одномерного оператора Шредингера с финитным потенциалом. Матем. Сборник, 198:12 (2007), 87-104.

   Схема доказательства основной теоремы (в [1]) предложена С.А. Степиным. Вклад диссертанта: утверждение 2 (об оценках интегралов типа Лапласа) и утверждение 3 об асимптотическом поведении ФСР при больших значениях спектрального параметра.

2. А.Г. Тарасов
   Spectrum of resonances in one dimension. Сборник трудов Добрушинской международной конференции. Москва, ИППИ РАН, (2009), 164-166.

3. С.А. Степин, А.Г. Тарасов
   Спектр резонансов одномерного оператора Шредингера с быстроубывающим потенциалом. Матем. Сборник, 200:12 (2009), 121-156.

   Терема 2, предложения 1, 2 и утверждение 5 в [3] получены А.Г. Тарасовым в рамках предложенного С.А. Степиным подхода к исследованию локализации резонансов и выводу асимптотических формул для них.

4. А.Г. Тарасов
   Локализация полюсов матрицы рассеяния в случае нефинитного потенциала. Тезисы Международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Суздаль (2010), 183-184.