Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова
Механико-математический факультет

На правах рукописи

УДК 512.743+512.66

Парфенов Петр Глебович

ТЕНЗОРНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ ОРБИТ

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва, 2010

Работа выполнена на кафедре высшей алгебры Механико-математического факультета Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор Э.Б. Винберг.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор П.И. Кацыло, кандидат физико-математических наук Д.А. Шмелькин

Ведущая организация: Ярославский государственный университет имени П. Г. Демидова

Защита диссертации состоится 26 ноября 2010 г. в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: РФ, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, МГУ, Механико-математический факультет, аудитория 14–08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета МГУ (главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 26 октября 2010 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д.501.001.84 при МГУ,
доктор физико-математических
наук, профессор А.О. Иванов

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Хорошо известно, что проблема классификации орбит произвольного линейного представления алгебраической группы в общем случае, на данном этапе развития математики, неразрешима, то есть не имеет решения, которое можно описать за разумное время. Поэтому решение данной проблемы идет путем выделения классов действий, для которых это возможно, так как они обладают так называемыми хорошими свойствами. Примерами хороших свойств является конечность числа орбит, а также конечность числа орбит, имеющих в своем замыкании ноль. Если рассмотреть естественные действия прямых произведений $GL_{n_1}(\mathbb{C}) \times \dots \times GL_{n_r}(\mathbb{C})$ полных линейных групп на тензорных произведениях $\mathbb{C}^{n_1} \otimes \dots \otimes \mathbb{C}^{n_r}$ соответствующих векторных пространств, то используя, например, работу Каца [1] можно определить, список наборов $(n_1, \dots, n_r)$, для которых эти действия будут иметь конечное число орбит. Это лишь следующие наборы с точностью до перестановки чисел в каждом из них: $(n), (n, m), (2, 2, n), (2, 3, n)$.

История исследований естественных действий $GL_2(\mathbb{C}) \times GL_m(\mathbb{C}) \times GL_n(\mathbb{C})$ в $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^n$ восходит к классической теории Кронекера-Вейерштрасса [2], где определены критерии $GL_m(\mathbb{C}) \times GL_n(\mathbb{C})$-эквивалентности элементов пространства $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^n$, которые называются пучками матриц.

Однако исследование действий алгебраических групп не ограничивается только классификацией орбит. Для многих приложений необходимо еще знать, как устроены замыкания орбит, то есть знать цепочки вырождений орбит.

Для естественных действий групп $GL_m(\mathbb{C}) \times GL_n(\mathbb{C})$ в пространствах $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^n$ более чем через сто лет после классификации орбит Pokrzywa [3] и, независимо от него, Hinrichsen и O'Halloran [4] получили критерии принадлежности одной орбиты к замыканию другой.

---

[1] Kac V. G. *Some remarks on nilpotent orbits.* J. Algebra–1980–64, p. 190–213.

[2] Гантмахер Ф. Р. *Теория матриц.* М.: Наука, 1966.

[3] Pokrzywa A. *On Perturbations and the Equivalence Orbit of a Matrix Pencl.* Lin. Alg. Appl., 82:99–121, 1986.

[4] Hinrichsen D., O'Halloran J. *Orbit closures of singular matrix pencils.* Journal of Pure and Applied Algebra 81 (1992) p. 117-137.

В истории похожих исследований следует отметить работы Нурмиева [5,6] и Первушина [7,8,9], где они решили задачи классификации инвариантов, орбит и замыканий орбит для естественных представлений групп, соответственно, $SL_3(\mathbb{C}) \times SL_3(\mathbb{C}) \times SL_3(\mathbb{C})$ в $\mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^3$ и $SL_2(\mathbb{C}) \times SL_4(\mathbb{C}) \times SL_4(\mathbb{C})$ в $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^4 \otimes \mathbb{C}^4$, а Первушин дополнительно сформулировал набор комбинаторных правил, позволяющих классифицировать орбиты и их замыкания для групп $GL_2(\mathbb{C}) \times GL_m(\mathbb{C}) \times GL_n(\mathbb{C})$ и $SL_2(\mathbb{C}) \times SL_m(\mathbb{C}) \times SL_n(\mathbb{C})$, действующих в пространствах $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^n$.

Важно здесь отметить метод [10,11,12], позволяющий во многих "хороших"случаях эффективно классифицировать орбиты и дающий, кроме этого, информацию о многих важных свойствах их геометрии.

Суть его состоит в том, что некоторые алгебраические группы можно интерпретировать как присоединенные группы полупростой градуированной алгебры Ли. Таким способом Винбергом и Элашвили [13] была получена классификация тривекторов девятимерного пространства. В упомянутых выше работах Нурмиева и Первушина, также, в основном использовался данный метод. В диссертации данный метод используется при рассмотрении стандартного представления группы $SL_2(\mathbb{C}) \times SL_3(\mathbb{C}) \times SL_3(\mathbb{C})$.

Поскольку большинство методов теории инвариантов и классификации орбит "работают"только над алгебраически замкнутыми

---

[5] Нурмиев А. Г. *Орбиты и инварианты кубических матриц третьего порядка.* Матем. сб. 2000, 191 ,5 с. 101–108

[6] Нурмиев А. Г. *Замыкания нильпотентных орбит кубических матриц порядка три.* УМН, 2000, 55, 2(332), с. 143–144

[7] Первушин Д. Д. *Инварианты и орбиты стандартного* $(\mathrm{SL}_4(\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}_4(\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}))$*-модуля.* Изв. РАН. Сер. матем., 2000, 64:5, с. 133–146

[8] Первушин Д. Д. *О примыканиях нильпотентных орбит пучков матриц четвертого порядка.* Изв. РАН. Сер. матем., 2002, 66:5, с. 183–192

[9] Pervouchine D. D. *Invariants and orbits of square matrix pencils.* Депонент ВИНИТИ РАН № 446-В2002, Март 12, 2002

[10] Винберг Э. Б. *Классификация однородных нильпотентных элементов полупростой градуированной алгебры Ли.* Труды семинара по векторному и тензорному анализу, 1979, выпуск 19, с. 155–177

[11] Винберг Э. Б., Попов В. Л. *Теория инвариантов.* Итоги науки и техники, современные проблемы математики, фундаментальные направления, том 55, 1989, с. 137–315

[12] Винберг Э. Б. *Группа Вейля градуированной алгебры Ли.* Изв. АН СССР. Сер. матем. 1976. Т. 40. №3. С. 489-525

[13] Винберг Э.Б., Элашвили А. Г. *Классификация тривекторов 9-мерного пространства.* Труды семинара по векторному и тензорному анализу. М.: Изд-воМГУ, 1978. Вып. 18. № 2. С. 197-233

полями, то встает вопрос: как классифицировать орбиты над произвольными полями? С развитием гомологической алгебры ответ на данный вопрос был сформулирован еще Серром [14] и сводится к тому, что, если известна классификация орбит алгебраической группы над алгебраически замкнутым полем K, то при определенных условиях можно получить классификацию орбит над его подполем k, рассматривая некоторые множества одномерных когомологий групп Галуа расширений поля k.

Так классификация тривекторов 6-мерного пространства над произвольным полем была получена Revoy [15] методом рассмотрения когомологий Галуа, также классификация тривекторов 8-мерного пространства над полем действительных чисел была получена Docovic [16] с использованием метода когомологий Галуа.

Хотя данный метод на наш взгляд является чрезвычайно продуктивным, но надо сказать, что он используется редко для классификации орбит алгебраических групп над незамкнутыми полями.

В диссертации для любого алгебраически замкнутого поля K нулевой характеристики определяется список наборов $(n_1, \dots, n_r)$, для которых естественные действия групп $GL_{n_1}(K) \times \cdots \times GL_{n_r}(K)$ в пространствах $K^{n_1} \otimes \cdots \otimes K^{n_r}$ имеют лишь конечное число орбит. Это лишь следующие наборы с точностью до перестановки чисел в каждом из них: $(n), (n, m), (2, 2, n), (2, 3, n)$. Для действий, соответствующих всем таким нетривиальным наборам $(2, 2, n)$ и $(2, 3, n)$ классифицируются орбиты над любым полем нулевой характеристики и, в комплексном случае, описывается иерархия их замыканий. Причем классификация орбит проводится сначала над алгебраически замкнутым полем нулевой характеристики, а, затем, используя полученную классификацию, через рассмотрение когомологий Галуа, классифицируются орбиты над произвольным полем нулевой характеристики. Также, необходимо отметить, что случай вещественных чисел уже подробно рассмотрен Docovic и Tingley [17], где на основании опубликованных результатов автора диссертации, с привлечением различных дополнительных соображений и вычислений, но без

[14] Серр Ж.-П. *Когомологии Галуа.* 1968, изд. Мир, Москва.

[15] Revoy Ph. *Trivecteurs de rang 6.* Bull. Soc. Math. France. Memoire 59 (1979). 131-155.

[16] Docovic D. Z. *Classification of trivectors of an eight-dimensional real vector space.* Linear and Multilinear Algebra, 1563-5139, Volume 13, Issue 1, 1983, Pages 3 – 39

[17] Docovic D. Z., Tingley P. W. *Natural group actions on tensor products of three real vector spaces with finitely many orbits.*. The Electronic Journal of Linear Algebra Society–2001, vol. 8, pp. 60-82

использования когомологий Галуа, найдены представители орбит и описана иерархия замыканий орбит.

Дополнительно, в диссертации найдены образующие алгебры инвариантов и проведена классификация орбит для естественных действий групп $SL_2(K) \times SL_2(K) \times SL_n(K)$ и $SL_2(K) \times SL_3(K) \times SL_n(K)$ в соответствующих пространствах над алгебраически замкнутым полем.

Цель работы. Над алгебраически замкнутым полем K нулевой характеристики определить список наборов $(n_1, \dots, n_r)$, для которых естественные действия групп $GL_{n_1}(K) \times \dots \times GL_{n_r}(K)$ в пространствах $K^{n_1} \otimes \dots \otimes K^{n_r}$ имеют лишь конечное число орбит. Во всех этих случаях провести классификацию орбит и описать иерархию их замыканий. В тех же случаях найти образующие алгебры инвариантов и провести классификацию орбит для действий групп $SL_{n_1}(K) \times \dots \times SL_{n_r}(K)$.

Используя полученные результаты для тех же наборов $(n_1, \dots, n_r)$ классифицировать орбиты групп $GL_{n_1}(k) \times \dots \times GL_{n_r}(k)$ в пространствах $k^{n_1} \otimes \dots \otimes k^{n_r}$ над произвольным полем k нулевой характеристики.

Научная новизна. Основные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

1. Для любого алгебраически замкнутого поля K нулевой характеристики определяется список наборов $(n_1, \dots, n_r)$, для которых естественные действия групп $GL_{n_1}(K) \times \dots \times GL_{n_r}(K)$ в пространствах $K^{n_1} \otimes \dots \otimes K^{n_r}$ имеют лишь конечное число орбит. Это лишь следующие наборы с точностью до перестановки чисел в каждом из них: $(n), (n, m), (2, 2, n), (2, 3, n)$.

2. Над алгебраически замкнутым полем K нулевой характеристики классифицированы орбиты действий $GL_2(K) \times GL_2(K) \times GL_n(K) : K^2 \otimes K^2 \otimes K^n$ и $GL_2(K) \times GL_3(K) \times GL_n(K) : K^2 \otimes K^3 \otimes K^n$.

3. Для указанных выше действий описана иерархия замыканий орбит.

4. Описана алгебра инвариантов и орбиты действий $SL_2(K) \times SL_2(K) \times SL_n(K) : K^2 \otimes K^2 \otimes K^n$ и $SL_2(K) \times SL_3(K) \times SL_n(K) : K^2 \otimes K^3 \otimes K^n$.

5. Проведена классификация орбит действий $GL_2(k) \times GL_2(k) \times GL_n(k) : k^2 \otimes k^2 \otimes k^n$ и $GL_2(k) \times GL_3(k) \times GL_n(k) : k^2 \otimes k^3 \otimes k^n$ над произвольным полем k нулевой характеристики.

Методы исследования. В диссертации применяются методы теории линейных алгебраических групп, в частности, теория инвариантов и теория градуированных алгебр Ли, теория Кронекера-Вейерштрасса пучков матриц, методы гомологической алгебры.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Ее результаты и методы могут быть использованы в различных вопросах теории групп Ли и алгебраических групп, теории инвариантов и их приложений.

Апробация диссертации. Результаты диссертации неоднократно докладывались и обсуждались на научно-исследовательском семинаре механико-математического факультета МГУ "Группы Ли и теория инвариантов"под руководством Э. Б. Винберга и В. Л. Онищика в 1996-1999 годах, а также на международной конференции в университете Лейпцига "100 лет после Софуса Ли"в июле 1999 года.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 3 работах автора (2 из них в журналах из списка ВАК), список которых приведен в конце автореферата [1, 2, 3].

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав (первая глава включает 4 параграфа) и списка литературы из 23 наименований. Общий объем диссертации составляет 74 страницы.

Краткое содержание диссертации

Глава 1.

В диссертации будет часто опускаться указание на поле в обозначении группы, то есть, например, будет написано вместо $GL_n(K)$ просто GL_n. Предполагается, что в этих случаях из контекста будет понятно о каком поле идет речь.

В диссертации рассматривается естественное действие групп $GL_{k_1} \times \cdots \times GL_{k_r}$ и $SL_{k_1} \times \cdots \times SL_{k_r}$ в пространстве $\mathbb{C}^{k_1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{C}^{k_r}$. Везде, где не оговорено противное, считается, что индексы удовлетворяют условиям: $k_1, \ldots, k_r \geq 2$ и $r \geq 1$. Также, для удобства изложения, группы $GL_{k_1} \times \cdots \times GL_{k_r}$ и $SL_{k_1} \times \cdots \times SL_{k_r}$ обозначаются через $GL_{k_1,\ldots,k_r}$ и $SL_{k_1,\ldots,k_r}$ соответственно, а пространство $\mathbb{C}^{k_1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{C}^{k_r}$ обозначается через $\mathbb{C}^{k_1,\ldots,k_r}$. В диссертации везде, где речь идет о действии этих групп или о действии в этом пространстве, если не оговорено противное, подразумевается именно данное действие.

Определение 1 Полупростая группа G, действующая в векторном пространстве V, называется обозримой относительно этого действия, если в каждом слое морфизма факторизации $\pi : V \longrightarrow {}^{V}\!\diagup_{G}$ содержится лишь конечное число орбит.

Известно, что свойство обозримости эквивалентно конечности числа орбит в нуль-конусе $(\pi^{-1}(\pi(0)))$.

В первой главе делается следующее:

1) Классифицируются все наборы $(k_1, \ldots, k_r)$, когда $GL_{k_1,\ldots,k_r}$, имеет конечное число орбит в $\mathbb{C}^{k_1,\ldots,k_r}$.

2) Для всех полученных наборов $(k_1, \ldots, k_r)$ классифицируются орбиты $GL_{k_1,\ldots,k_r}$, то есть приводится таблица представителей орбит.

4) Показывается, что $GL_{k_1,\ldots,k_r}$ имеет конечное число орбит тогда и только тогда, когда $SL_{k_1,\ldots,k_r}$ обозрима и имеет не более одного инварианта. Для всех этих случаев классифицируются орбиты $SL_{k_1,\ldots,k_r}$ и, если алгебра инвариантов нетривиальна, приводится порождающий ее многочлен.

Теперь более подробно.

В самом начале первой главы доказывается теорема 1, которая открывает важнейшие свойства орбит рассматриваемого класса действий и используется как инструмент исследования практически во всех частях диссертации.

Теорема 1 Пусть редуктивная группа F действует в векторном пространстве U. Рассмотрим группу $G = F \times GL_k$, пространство $V = U \otimes \mathbb{C}^k$ и действие $G : V$, являющееся тензорным произведением действия $F : U$ и стандартного действия $GL_k : \mathbb{C}^k$. Пусть $\tilde{V} = U \otimes \mathbb{C}^i$, $(i \leq k)$ — подпространство V, на котором действует соответствующая подгруппа $\tilde{G} = G \times GL_i$. Пусть элементы u и v принадлежат $\tilde{V}$. Тогда

(a) если элементы u и v эквивалентны относительно группы G, то они эквивалентны и относительно группы $\tilde{G}$, (б) если орбита элемента u в V относительно группы G содержит в замыкании элемент v, то и орбита элемента u в $\tilde{V}$ относительно группы $\tilde{G}$ содержит в замыкании элемент v.

Теорема 1 имеет два простых следствия, непосредственно касающихся рассматриваемого в диссертации класса действий.

Следствие 2.1 Пусть пространство $\mathbb{C}^{i_1,\dots,i_r}$ стандартно вложено в пространство $\mathbb{C}^{k_1,\dots,k_r}$, пусть $u, v \in \mathbb{C}^{i_1,\dots,i_r}$. Тогда

(а) если u и v эквивалентны относительно группы $GL_{k_1,\dots,k_r}$, действующей в $\mathbb{C}^{k_1,\dots,k_r}$, то они эквивалентны и относительно $GL_{i_1,\dots,i_r}$, действующей в $\mathbb{C}^{i_1,\dots,i_r}$,

(б) если замыкание $GL_{k_1,\dots,k_r}$–орбиты элемента u содержит элемент v, то замыкание $GL_{i_1,\dots,i_r}$–орбиты элемента u, также, содержит v.

Следствие 2.2 Если группа $GL_{k_1,\cdots,k_r}$ имеет бесконечное число орбит, то и группа $GL_{k_1+1,k_2,\dots,k_r}$ имеет бесконечное число орбит.

Далее, доказывается следующая теорема:

Теорема 3 Упорядоченные по возрастанию наборы $(k_1,\dots,k_r)$, где либо $r \geq 4$, либо $r = 3$ и $k_1, k_2, k_3 \geq 3$, либо $r = 3$ и $k_1 = 2, k_2, k_3 \geq 4$ соответствуют действиям $GL_{k_1} \times \dots \times GL_{k_r}$ с бесконечным числом орбит.

Остаются случаи $(2, 2, n),\ n \geq 2$ и $(2, 3, n),\ n \geq 3$.

Далее, в первой главе проводится классификация орбит в этих случаях, в каждом случае оказывается конечное число орбит, и, таким образом доказывается следующая теорема:

Теорема 5 Группа $GL_{k_1,\dots,k_r}$ имеет конечное число орбит в $\mathbb{C}^{k_1,\dots,k_r}$ лишь для следующих наборов $(k_1,\dots,k_r)$: (n), (m,n), (2,2,n), (2,3,n) $n \geq 3$.

Так как во всех оставшихся тензорных произведениях есть компонента $\mathbb{C}^2$, то элементы пространства $\mathbb{C}^{2,m,n}$ $(m \leq n)$ далее обычно представлены парой матриц A_1 и A_2 порядка $m \times n$ (в каждой матрице m строк и n столбцов) — $(A_1|A_2)$. Элементы матрицы A_i $(i = 1, 2)$ обозначаются буквами с тремя индексами, где первые два — обычные матричные индексы, третий — индекс i. Группа действует умножениями слева и справа на матрицы A_1 и A_2 одновременно соответствующими компонентами прямого произведения и линейным комбинированием матриц A_1 и A_2 соответствующей компонентой GL_2

или SL_2, считается, что это первая слева компонента прямого произведения.

Лемма 1 Пусть $SL_{k_1,\ldots,k_r} : X$, где X — коническое многообразие в пространстве $\mathbb{C}^{k_1,\ldots,k_r}$, а действие является ограничением естественного действия на всем пространстве. Если в X имеется лишь конечное число орбит,то все эти орбиты конические.

Далее доказывается следующая классификационная лемма для случая (2,2,2):

Лемма 2 а). Пусть $SL_{2,2,2} : \mathbb{C}^{2,2,2}$, пусть

$$\Delta_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11i} & a_{12j} \\ a_{21i} & a_{22j} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11j} & a_{12i} \\ a_{21j} & a_{22i} \end{vmatrix} \quad i, j = 1, 2.$$

Тогда многочлен $\Delta = \det\left(\frac{1}{2}(\Delta_{ij})\right)$ является образующим алгебры инвариантов этого действия. Причем слой $\pi^{-1}(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}^\star$, где π — соответствующий морфизм факторизации $\pi : \mathbb{C}^{2,2,2} \longrightarrow Spec\mathbb{C}[\Delta]$, содержит одну орбиту с представителем $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{array}\right)$, здесь $\alpha^2 = -\lambda$, т. е. α может быть выбрано с точностью до умножения на -1. В нуль-конусе содержатся 6 орбит с представителями:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right), \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

б). Для действия $GL_{2,2,2} : \mathbb{C}^{2,2,2}$ имеется семь орбит.

Шесть орбит, совпадающих с орбитами нуль-конуса группы $SL_{2,2,2}$ (см. пункт а).), и орбита с представителем:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Далее рассматриваются группы $GL_2 \times GL_3 \times GL_3$.

Для классифицирования орбит привлекается теория градуированных алгебр Ли, краткое изложение которой можно найти в работе[11].

Показывается, что группа $GL_{2,3,3}$ является в рассматриваемом естественном представлении присоединенной группой Z–градуированной алгебры E_6.

При помощи классификации из работы[11] доказывается классификационная теорема для набора $(2,3,3)$:

Теорема 6 (a) Действие $GL_{2,3,3} : \mathbb{C}^{2,3,3}$, имеет 18 орбит со следующими представителями (у каждого элемента будет стоять номер, который потом будет использоваться при обозначении этого элемента):

$$\overset{1}{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{array}\right)},\quad \overset{2}{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{array}\right)},$$

$$\overset{3}{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{array}\right)},\quad \overset{4}{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{array}\right)},$$

$$\overset{5}{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{array}\right)},\quad \overset{6}{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&0&0&1&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{array}\right)},$$

$$\overset{7}{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{array}\right)},\quad \overset{8}{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0 \end{array}\right)},$$

$$\overset{9}{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0 \end{array}\right)},\quad \overset{10}{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0 \end{array}\right)},$$

$$\overset{11}{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&0&0&0&1\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{array}\right)},\quad \overset{12}{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&0&0&0&1\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0 \end{array}\right)},$$

$$\overset{13}{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)}, \quad \overset{14}{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)},$$

$$\overset{15}{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)}, \quad \overset{16}{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)},$$

$$\overset{17}{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)}, \quad \overset{18}{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)}.$$

(б) Пусть Δ_i $(i = 0, \ldots, 3)$ — коэффициенты квадратичной формы $\det(xA_1 + yA_2) = \sum\limits_{i=0}^{3} \Delta_i x^{3-i} y^i$, являющиеся многочленами от коэффициентов матрицы $(A_1|A_2)$, соответствующей элементам пространства $\mathbb{C}^{2,3,3}$. Действие $SL_{2,3,3} : \mathbb{C}^{2,3,3}$ имеет нетривиальную алгебру инвариантов, порожденную многочленом 12-ой степени: $p = \Delta_1^2\Delta_2^2 - 4\Delta_0\Delta_2^3 - 4\Delta_1^3\Delta_3 - 27\Delta_0^2\Delta_3^2 + 18\Delta_0\Delta_1\Delta_2\Delta_3$. В нуль-конусе содержится 17 орбит с представителями, такими как первые 17 матриц в пункте (а) этой теоремы. Слой $\pi^{-1}(\lambda)$ $(\lambda \neq 0)$ содержит единственную орбиту с представителем: $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$, где $\alpha^2 = \lambda$ и умножение α на -1 не существенно.

Далее, с привлечением теории Кронекера-Вейерштрасса[2] пучков матриц рассматриваются группы $GL_{2,2,n}$, $SL_{2,2,n}$, $GL_{2,3,n}$ и $SL_{2,3,n}$ и доказывается классификационная теорема.

Теорема 8 Для групп $GL_{2,m,n}$, $SL_{2,m,n}$ (где $m = 2, n \geq 3$ или $m = 3, n \geq 4$) действующих в $\mathbb{C}^{2,m,n}$ существуют две принципиально различные ситуации: либо орбиты этих групп совпадают и их конечное число, либо у группы $SL_{2,m,n}$ существует один нетривиальный инвариант f, и тогда подмногообразия, определяемые условием $f = \lambda$ при $\lambda \neq 0$, являются замкнутыми орбитами группы $SL_{2,m,n}$, заполняющими открытую орбиту группы $GL_{2,m,n}$, а все остальные орбиты группы $SL_{2,m,n}$ совпадают с орбитами группы $GL_{2,m,n}$. Ниже приведены для каждого случая представители орбит группы $GL_{2,m,n}$ (матрицы снабжены номерами, которые потом будут использоваться в графах примыканий) и в тех случаях, когда есть инвариант f у $SL_{2,m,n}$ он указан, и указан элемент t из ее орбиты: $f = \lambda$, $\lambda \neq 0$.

1) $m = 2, n = 3$, $\left(\begin{array}{cc|cc} A_1^i & \begin{matrix}0\\0\end{matrix} & A_2^i & \begin{matrix}0\\0\end{matrix}\end{array}\right)$, $i = 1, \ldots, 7$, где $(A_1^i|A_2^i)$ — семь матриц из пункта (б) леммы 2, $\overset{8}{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)}$, $\overset{9}{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)}$, $f = \det\begin{pmatrix} A & 0 \\ B & A \\ 0 & B \end{pmatrix}$, $t = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \alpha \end{array}\right)$, где $\alpha^2 = -\lambda$ (неважно какое именно α взять).

2) $m = 2, n = 4$, $\left(\begin{array}{cc|cc} A_1^i & \begin{matrix}0\\0\end{matrix} & A_2^i & \begin{matrix}0\\0\end{matrix}\end{array}\right)$, $i = 1, \ldots, 9$, где $(A_1^i|A_2^i)$ — девять матриц из предыдущего случая, $\overset{10}{\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)}$, $f = \det\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$, $t = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{array}\right)$.

3) $m = 2, n \geq 5$, $\left(\begin{array}{cc|cc} A_1^i & \overbrace{\begin{matrix}0 & \cdots & 0\\0 & \cdots & 0\end{matrix}}^{n-4} & A_2^i & \overbrace{\begin{matrix}0 & \cdots & 0\\0 & \cdots & 0\end{matrix}}^{n-4}\end{array}\right)$, $i = 1, \ldots, 10$, где $(A_1^i|A_2^i)$ — десять матриц из предыдущего случая.

4) $m = 3, n = 4$, $\left(\begin{array}{cc|cc} A_1^i & \begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix} & A_2^i & \begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}\end{array}\right)$, $i = 1, \ldots, 18$, где $(A_1^i|A_2^i)$ — восемнадцать матриц из пункта (а) теоремы 6,

$$\overset{19}{\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)}, \quad \overset{20}{\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)},$$

$$\overset{21}{\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)}, \quad \overset{22}{\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)},$$

$$\overset{23}{\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)}, \quad \overset{24}{\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)},$$

$f = \det\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ B & A & 0 \\ 0 & B & A \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix}$, $t = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \end{array}\right)$, где $\alpha^3 = \lambda$.

5) $m = 3, n = 5$, $\left(\begin{array}{cc|cc} & 0 & & 0 \\ A_1^i & 0 & A_2^i & 0 \\ & 0 & & 0 \end{array}\right)$, $i = 1, \ldots, 24$, где $(A_1^i|A_2^i)$ — двадцать четыре матрицы из предыдущего случая,

$$\overset{25}{\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)},$$

$$\overset{26}{\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)}.$$

6) $m = 3, n = 6$, $\left(\begin{array}{cc|cc} & 0 & & 0 \\ A_1^i & 0 & A_2^i & 0 \\ & 0 & & 0 \end{array}\right)$, $i = 1, \ldots, 26$, где $(A_1^i|A_2^i)$ — двадцать шесть матриц из предыдущего случая,

$$\overset{27}{\left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)},$$

$f = \det\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$, $t = \left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{array}\right)$.

7) $m = 3, n \geq 7$, $\left(\begin{array}{cc|cc} & \overbrace{\begin{matrix} 0 & \cdots & 0 \end{matrix}}^{n-6} & & \overbrace{\begin{matrix} 0 & \cdots & 0 \end{matrix}}^{n-6} \\ A_1^i & \begin{matrix} 0 & \cdots & 0 \end{matrix} & A_2^i & \begin{matrix} 0 & \cdots & 0 \end{matrix} \\ & \begin{matrix} 0 & \cdots & 0 \end{matrix} & & \begin{matrix} 0 & \cdots & 0 \end{matrix} \end{array}\right)$, $i = 1, \ldots, 27$, где $(A_1^i|A_2^i)$ — двадцать семь матриц из предыдущего случая.

Глава 2.

Эта глава посвящена построению графов примыканий орбит для групп $GL_{2,2,n}$ и $GL_{2,3,n}$.

Основной метод анализа примыканий орбит, используемый в этой работе, описан в [11]. Его суть в следующем.

Пусть редуктивная группа G действует в векторном пространстве V. T — некоторый фиксированный максимальный тор, t — его касательная алгебра, $\Xi(T)$ — группа характеров T, $\Xi(T)\otimes\mathbb{C} \simeq t^*$. Пусть $E(T) = \Xi(T) \otimes Q$, $t(Q)$ — рациональная форма t. Пространства $E(T)$ и $t(Q)$ изоморфны: $\nu : E(T) \longrightarrow t(Q)$, $\nu^{-1}(h_1)(h_2) = (h_1, h_2)$. С помощью изоморфизма ν переносится скалярное произведение с $t(Q)$ на $E(T)$.

Пусть $u \in V$ — нильпотентный элемент группы G. Пусть $\mathrm{supp}(u) \in E(T)$ — носитель u. По критерию Гильберта–Мамфорда можно выбрать в орбите элемента u такой элемент, что его носитель не содержит 0. Пусть χ_u — вектор в $E(T)$, конец которого есть ближайшая точка $\mathrm{supp}(u)$ к нулю, тогда $\chi(h_u) \geq 2$, где $h_u = \frac{2}{(\chi_u,\chi_u)}\nu(\chi_u)$, будет задавать полупространство H_u^+ относительно плоскости ортогональной χ_u ($\chi(h_u)$ — ее уравнение), в которой лежит $\mathrm{supp}(u)$.

Элемент u называется приведенным, если $\mathrm{supp}(u) \not\ni 0$ и $|h_u| \leq |h_g u|$ (или $|\chi_u| \geq |\chi_{gu}|$) $\forall g \in G$, т. ч. $\mathrm{supp}(u) \not\ni 0$.

Каждый элемент эквивалентен некоторому приведенному, т. е. приведен относительно некоторого максимального тора. Если u — приведенный нильпотентный элемент, то h_u называется его характеристикой.

Теорема из [11] :

Теорема 9 Пусть u —ненулевой нильпотентный элемент V. Рациональный полупростой элемент $h \in g$, удовлетворяющий условию: $u \in \bigoplus\limits_{c\geq 2} V_c(h)$, является характеристикой элемента u тогда и только тогда, когда проекция u_0 элемента u на $V_2(h)$ не является нильпотентным элементом для действия редуктивной группы $\tilde{\mathfrak{Z}}(h)$, где $\tilde{\mathfrak{Z}}(h)$ — подгруппа G, соответствующая подалгебре $\tilde{\zeta}(h)$, которая является ортогональным дополнением к элементу h в подалгебре $\zeta(h) = g_0(h)$.

Следующая теорема из [11] является основным инструментом, позволяющим строить графы примыканий:

Теорема 10 Пусть h_u — характеристика нильпотентного элемента u, $N(h)$ — множество элементов, характеристика которых сопряжена h. Тогда нильпотентный элемент v содержится в $\overline{N(h)}$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{supp}(gv)$ содержится в H_u^+ для некоторого $g \in G$, то есть в орбите v можно выбрать элемент принадлежащий $V_+(h) = \bigoplus\limits_{c \geq 2} V_c(h)$. Если же $\mathrm{supp}(gv)$ не содержится в H_u^+ для некоторого $g \in G$, то элемент v не содержится в замыкании орбиты элемента u.

С использованием различных соображений и конструкций, а в самых сложных случаях с использованием метода характеристик строятся все графы примыканий, то есть доказывается следующая теорема.

Теорема 11 На рисунке 2 изображен граф примыканий орбит для случая $(2, 3, n)$, где $n \geq 6$. Номера вершин соответствуют номерам орбит из теоремы 8, слева обозначены размерности орбит. Стрелка от вершины A к вершине B означает, что орбита B лежит в замыкании орбиты A и не существует другой орбиты C, такой что орбита C лежит в замыкании орбиты A, и орбита B лежит в замыкании орбиты C.

Этот граф содержит в себе графы примыканий всех интересующих нас случаев. То есть, если ограничить этот граф на соответствующие вершины, то получатся графы примыканий для случаев $(2, 2, 2)$, $(2, 3, 3)$, $(2, m, n)$, где, либо $m = 2$ и $n \geq 3$, либо $m = 3$ и $n \geq 4$. Номера вершин, на которые нужно ограничивать граф совпадают с номерами орбит, соответственно, в лемме 2, теореме 6 и теореме 8, за одним исключением для случая $(2, 2, 4)$, где орбиты с номерами 8, 9 и 10 надо сопоставить, соответственно, вершинам с номерами 11, 13 и 19.

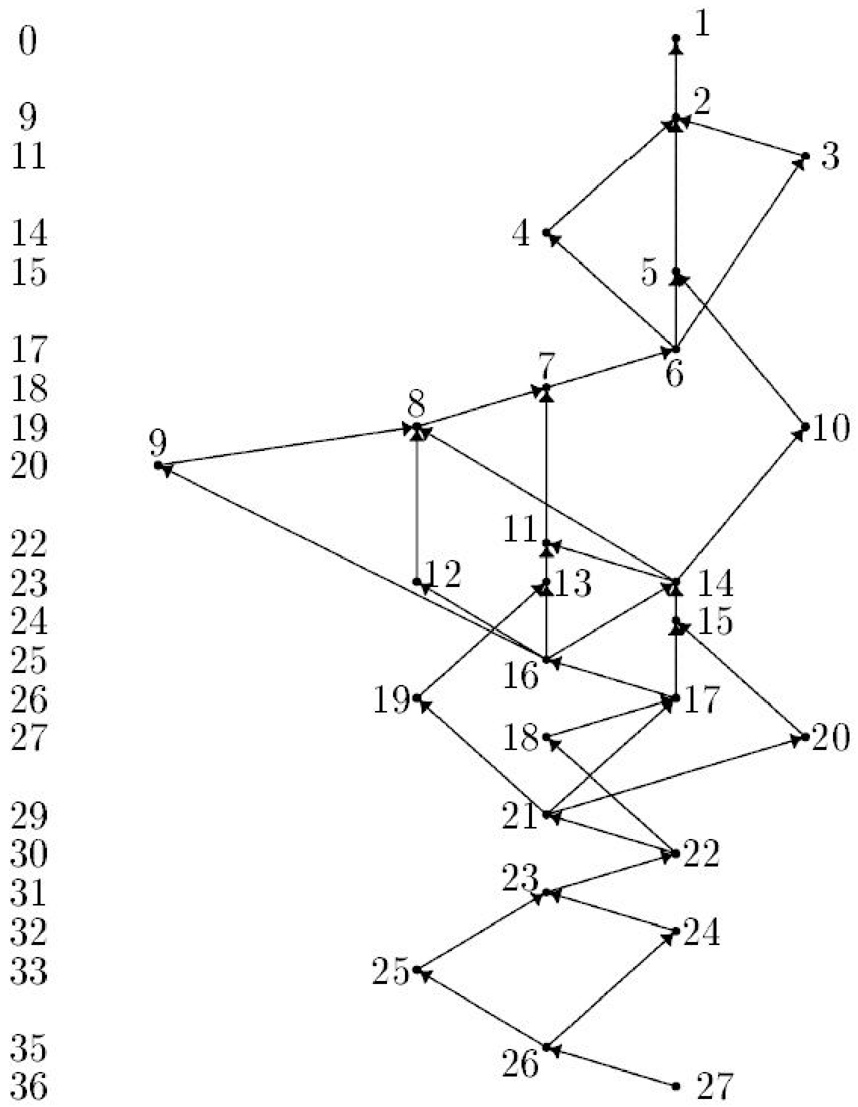

Рис. 2. Граф примыканий орбит пространства $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^6$

Глава 3.

В этой главе для всех действий тензорных произведений полных линейных групп в случаях $(2, 2, n)$ и $(2, 3, n)$ будет найден список представителей орбит над любым полем нулевой характеристики.

Предлагается единый метод, позволяющий расширить классификацию орбит в первой главе диссертации на случай произвольного поля нулевой характеристики. В третьей главе диссертации показывается, что классификационные результаты над полем комплексных чисел в первой главе диссертации без изменений переносятся на случай произвольного алгебраически замкнутого поля характеристики ноль.

Пусть K — алгебраически замкнутое поле нулевой характеристики, пусть k — его подполе. Пусть V – векторное пространство над K, определенное над k. Пусть G – алгебраическая группа над полем K, определенная над k и действующая на пространстве V. Пусть представление $G \to GL(V)$ также определено над k. Каждая орбита группы G, пересеченная с $V(k)$, может только расщепиться на некоторое количество орбит группы $G(k)$.

Показывается, что множество орбит группы $G(k)$, на которые расщепляется орбита $G(F)x$ при пересечении ее с $V(k)$, вкладывается в множество $H^1(\Gamma, G_x(F))$ одномерных неабелевых когомологий группы Галуа $\Gamma = \mathrm{Gal}\ (F/k)$ со значениями в $G_x(F)$, и даже соответствует ему взаимно-однозначно, если $H^1(\Gamma, G(F))$ тривиально.

Таким образом, для описания расщеплений в $V(k)$ орбит группы G на орбиты группы $G(k)$ ключевой является задача нахождения стабилизаторов представителей орбит группы G и множеств одномерных когомологий групп Галуа конечных расширений Галуа F поля k со значениями в этих стабилизаторах, рассматриваемых над полем F.

Представители орбит всех рассматриваемых над полем K действий корректно записать парами матриц в виде единой таблицы, используя для каждого представителя пространство минимальной размерности из рассматриваемого класса, в которое этот представитель может быть вложен.

$$\overset{1}{\left(\begin{array}{c} 0 \end{array}\right)},\quad \overset{2}{\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \end{array}\right)},\quad \overset{3}{\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right)},\quad \overset{4}{\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)},\quad \overset{5}{\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)},$$

$$\overset{6}{\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)},\quad \overset{7}{\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)},\quad \overset{8}{\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)},\quad \overset{9}{\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)},$$

$$\overset{10}{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)},\quad \overset{11}{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)},\quad \overset{12}{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)},$$

$$\overset{13}{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)},\quad \overset{14}{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)},\quad \overset{15}{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)},$$

$$\overset{16}{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)},\quad \overset{17}{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)},\quad \overset{18}{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)}.$$

$$\overset{19}{\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)},\quad \overset{20}{\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)},$$

$$\overset{21}{\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)},\quad \overset{22}{\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)},$$

$$\overset{23}{\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)},\quad \overset{24}{\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)},$$

$$\begin{array}{c} 25 \\ \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}, \quad \begin{array}{c} 26 \\ \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \end{array}.$$

$$\begin{array}{c} 27 \\ \left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \end{array},$$

Далее доказывается следующая теорема.

Теорема 12 Для всех орбит рассматриваемых нами действий, за исключением орбит с номерами 7, 18 и 22, множества одномерных когомологий Галуа группы Γ со значениями в стабилизаторах их представителей тривиальны. Для орбит с номерами 7, 18 и 22 множества одномерных когомологий Галуа группы Γ со значениями в стабилизаторах их представителей изоморфны группе $H^1(\Gamma, \mathbb{Z}_2)$, то есть группе всех гомоморфизмов $\Gamma \to \mathbb{Z}_2$.

(Под изоморфизмами множеств когомологий здесь понимаются биективные соответствия, при которых нейтральные элементы соответствуют нейтральным.)

Для доказательства теоремы 12 используется следующая лемма, которая доказывается в диссертации и может иметь самостоятельное значение в теории когомологий Галуа, как минимум, для решения задач, подобных решаемым в главе 3.

Лемма 3

Пусть разрешимая алгебраическая группа H над полем F определена над k и разлагается в полупрямое произведение своей неприводимой компоненты H^o и циклической группы второго порядка, порожденной элементом d, лежащим в $H(k)$. Пусть существует максимальный тор T группы H^o, определенный над k и нормализуемый элементом d, который можно представить в виде прямого произведения одномерных торов $\mathbb{T}_1, \cdots, \mathbb{T}_r$, переставляемых элементом d. Тогда естественное отображение множеств когомологий $H^1(\Gamma, < d >) \to H^1(\Gamma, H)$ является изоморфизмом.

Замечание *Теорема 12 и лемма 3 верны и для любого совершенного поля. Однако, найденный в первой главе список представителей орбит скорее всего не будет правильным в этом случае, так* *как был получен в предположении, что характеристика поля равна нулю.*

На основании теоремы 12 доказывается классификационная теорема 13.

Теорема 13

Пусть, как выше, k – поле нулевой характеристики, K — его алгебраическое замыкание. Для всех действий, соответствующих наборам $(2, 2, n)$ и $(2, 3, n)$, список представителей орбит изменяется над полем k описанным ниже образом:

1. Все орбиты, за исключением орбит с номерами 7, 8, 22, не расщепляются.

2. Каждая из орбит с номерами 7, 18 и 22 расщепляется на множество орбит, параметризуемое элементами из фактор-группы $k^*/(k^*)^2$, со следующими представителями:

$$\begin{array}{c} 7^s \\ \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & s & 0 \end{array}\right) \end{array}, \quad \begin{array}{c} 18^s \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & s & 0 \end{array}\right) \end{array}, \quad \begin{array}{c} 22^s \\ \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & s & 0 \end{array}\right) \end{array},$$

где $s \in k$ пробегает представителей смежных классов k^* по $(k^*)^2$.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю профессору Эрнесту Борисовичу Винбергу за постановку интересных задач, ценные указания и постоянное внимание к работе.

Работы автора по теме диссертации

[1] П. Г. Парфенов "Тензорные произведения с конечным числом орбит."// Успехи математических наук, 1998 г., т. 53, вып. 3(321), стр. 193–194.

[2] П. Г. Парфенов "Орбиты и их замыкания в пространствах $C^{k_1} \otimes \cdots \otimes C^{k_r}$."// Математический сборник, 2001, том 192, № 1. стр. 89–112.

[3] П. Г. Парфенов "Тензорные произведения с конечным числом орбит: когомологии Галуа."// Депонент ВИНИТИ РАН № 314-В2010, 26.05.2010. 13 стр.