Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова
Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 517.51, 517.955, 517.987, 514.76

Мацкевич Степан Евгеньевич

Функциональные интегралы и уравнения типа Бюргерса

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2010

Работа выполнена на кафедре теории функций и функционального анализа Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Смолянов Олег Георгиевич
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Шавгулидзе Евгений Тенгизович
	кандидат физико-математических наук, доцент Бутко Яна Анатольевна
Ведущая организация:	Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

Защита диссертации состоится 10 декабря 2010 г. в 16 ч. 40 м. на заседании диссертационного совета Д 501.001.85 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, Главное здание МГУ, механико–математический факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж)

Автореферат разослан 10 ноября 2010 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 501.001.85 при МГУ
доктор физико-математических наук,
профессор

В. Н. Сорокин

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы.

Целью работы является применение методов бесконечномерного анализа, прежде всего функционального интегрирования, для исследования уравнений типа Бюргерса в различных пространствах.

Уравнением Бюргерса называется уравнение

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (f, \nabla f) = \frac{1}{2}\triangle f$$

относительно функции $f : \mathbb{R} \times X \to X$, где X — (сепарабельное) гильбертово пространство размерности $n \in 1, 2, 3, ..., \infty$. Предполагается, что $(f, \nabla f) = \sum\limits_{i=1}^{n} f^i \frac{\partial f}{\partial x^i}$ и $\triangle f = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x^{i2}}$. В трехмерном пространстве (то есть в случае $X = \mathbb{R}^3$) уравнение Бюргерса представляет собой систему уравнений, отличающуюся от соответствующих уравнений системы Навье–Стокса отсутствием в правой части члена, зависящего от давления.

Уравнение Бюргерса [1, 2] используется также в акустике, гидродинамике и космологии для моделирования ударных волн, распространяющихся в сплошной среде. В последнее время появилось значительное количество математических работ, посвященных исследованию свойств уравнения Бюргерса и его стохастического аналога (см. [3, 4, 5, 6] и имеющиеся там ссылки).

В диссертации получены представления решений задачи Коши для уравнений Бюргерса с внешней силой в конечномерном и бесконечномерном пространствах с помощью формул Фейнмана и Фейнмана–Каца. Показано, что в бесконечномерном случае уравнение Бюргерса связано с уравнением теплопроводности относительно мер с помощью преобразования, аналогичного преобразованию Хопфа–Коула.

Формулой Фейнмана называется представление решения задачи Коши для эволюционного уравнения с помощью предела интегралов по декартовым степеням фазового пространства, когда степень стремится к бесконечности[7] (формулой Фейнмана–Каца называется представление решения той

[1]Burgers J. M., "A mathematical model illustrating the theory of turbulence", Adv. Appl. Mech., v. 1, 1948, 171—199.

[2]Hopf E., "The partial differential equation $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$", Comm. Pure Appl. Math, v. 3, 1950, 201—230.

[3]Davies I. M., Truman A., and Zhao H., "Stochastic Heat and Burgers Equations and Their Singularities I — Geometrical properties", J. Math. Phys., 43, 2002, 3293—3328.

[4]Belopolskaya Ya. I., "Smooth Diffusion Mesuares and Their Transformations", J. of Mathematical Sciences, v. 109, n. 6, 2002, 2047—2060.

[5]Belopolskaya Ya. I., "Generalized Solutions of Nonlinear Parabolic Systems and the Vanishing Viscosity Method", J. of Mathematical Sciences, v. 133, n. 3, 2006, 1207—1223.

[6]Bertini L., Cancrini N., and Jona–Lasinio G., "The Stochastic Burgers Equation", Comm. Math. Phys., v. 165, n. 2, 1994, 211—232.

[7]Smolyanov O. G., Tokarev A. G., and Truman A., "Hamiltonian Feynman Path Integrals via the Chernoff Formula", J. Math. Phys., v. 43, n. 10, 2002, 5161—5171.

же задачи с помощью интеграла по траекториям).

Введенный в диссертации бесконечномерный аналог преобразования Хопфа–Коула переводит бесконечномерное уравнение Бюргерса в уравнение теплопроводности относительно мер.

Теория дифференцируемых мер была заложена свыше 40 лет назад С. В. Фоминым [8] (смотри также [9]). Последующее развитие этой теории обсуждается в работах [10, 11, 12, 13]. Одним из центральных понятий теории дифференцируемых мер является понятие логарифмической производной меры, впервые введенной в работе [9]. Именно это понятие существенно используется для построения бесконечномерного аналога преобразования Хопфа–Коула.

Кроме того, в диссертации вводятся аналоги уравнения Бюргерса и Колмогорова–Петровского–Пискунова на псевдоримановых многообразиях и определяется преобразование, аналогиченое преобразованию Хопфа–Коула, связывающее эти уравнения.

Подобные результаты получены также для стохастических версий введенных уравнения Бюргерса и уравнения Колмогорова–Петровского–Пискунова на многообразиях. В случае, когда многообразие является евклидовым пространством, введенное стохастическое уравнение Бюргерса совпадает со стохастическим уравнением, исследованным в работах А. Трумана[14].

Фактически формулы Фейнмана и формула Фейнмана–Каца появились впервые в работах Фейнмана (см., например, [15]), хотя сами эти термины были введены позднее. Во второй половине прошлого века было опубликованно довольно много математических работ, посвященных исследованию формул Фейнмана–Каца для различных эволюционных уравнений и функциональных интегралов (интегралов по траекториям), использованных в этих формулах. Отметим, в частности, работы И. М. Гельфанда, А. М. Яглома, М. Каца, В. П. Маслова, А. В. Угланова, Ю. Л. Далецкого, С. Альбеверио, Р. Хег-Крона, Ф. А. Березина, Р. Камерона, В. Мартина, Э. Нельсона, Б. Саймона, О. Г. Смолянова, А. Трумена, Е. Т. Шавгулидзе, А. Ю. Хренникова, П. Экснера. Тем не менее, вычисление функциональных интегралов, стоящих

---

[8] Фомин С. В., "Дифференцируемые меры в линейных пространствах", УМН, 23:1(139), 1968, 221—222.

[9] Авербух В. И., Смолянов О. Г., Фомин С. В., "Обобщенные функции и дифференциальные уравнения в линейных пространствах", Тр. ММО, 1971, вып. 24, с. 132—174.

[10] Смолянов О. Г., *Анализ на топологических линейных пространствах и его приложения*, М.: Издательство МГУ, 1979.

[11] Богачев В. И., Смолянов О. Г., "Аналитические свойства бесконечномерных вероятностных распределений", УМН, 45:3(273), 1990, 3—83.

[12] Smolyanov O. G., H. von Weizsäcker, "Smooth probability measures and associated differential operators", Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics, v. 2, n. 1, 1999, 51—78.

[13] Богачев В. И., *Дифференцируемые меры и исчисление Маллявэна*, М.: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2008.

[14] Truman A. and Zhao H. Z., "On stochastic diffusion equations and stochastic Burgers equations", J. Math. Phys., v. 37, n. 1, 1996, 283—307.

[15] Feynman R.P., "Space–time Approach to Nonrelativistic Quantum Mechanics", Rev. Mod. Phys., n. 20, 1948, 367—387.

в формулах Фейнмана–Каца, часто оказывается затруднительным (в частности из-за того, что для многих начально-краевых задач функции Грина не выражаются через элементарные функции). В то же время для многих таких задач удается получить формулы Фейнмана, содержащие конечнократные интегралы только от элементарных функций. Такие формулы Фейнмана позволяют проводить непосредственные вычисления решений эволюционных уравнений, пригодны для аппроксимации переходных вероятностей случайных процессов, полезны для компьютерного моделирования случайных процессов.

В последнее десятилетие аппарат формул Фейнмана активно применяется для описания различных типов динамики в областях евклидовых пространств и римановых многообразий, в бесконечномерных линейных и нелинейных пространствах, при исследовании p-адических аналогов уравнений математической физики. Отметим в этой связи работы О. Г. Смолянова, Е. Т. Шавгулидзе, Х. фон Вайцзеккера, О. Виттиха, А. Трумана, Н. Н. Шамарова, Я. А. Бутко, О. О. Обрезкова, П. Ю. Тарасенко (сам термин "формула Фейнмана" введен в 2002 г. в работе[7]). Отметим, что в ряде частных случаев, формулы Фейнмана фактически равносильны формулам Фейнмана–Каца. В диссертации формулы Фейнмана и формулы Фейнмана–Каца получены для нелинейных уравнений типа Бюргерса.

Все сказанное и определяет актуальность темы диссертации.

Цель работы.

Получение представлений решений задач Коши для нелинейных уравнений с частными производными типа Бюргерса относительно функций, определенных на конечномерных и бесконечномерных линейных пространствах и на многообразиях, с помощью формул Фейнмана и формул Фейнмана–Каца, а также определение аналогов преобразования Хопфа–Коула для бесконечномерных уравнений типа Бюргерса и аналогичных уравнений на многообразии.

Научная новизна.

В диссертации получены следующие новые результаты:

1. Получена формула Фейнмана и формула Фейнмана–Каца для решения задачи Коши для уравнения Бюргерса с внешней силой в $\mathbb{R}^n$.

2. Найдено преобразование (аналогичное преобразованию Хопфа–Коула), связывающее бесконечномерное уравнение Бюргерса и уравнение теплопроводности для мер в оснащенном гильбертовом пространстве.

3. Получено представление решения задачи Коши для бесконечномерного уравнения Бюргерса с помощью формулы Фейнмана–Каца. Для этого было получено представление решения задачи Коши для бесконечномерного уравнения теплопроводности (с потенциалом) относительно мер в оснащенном гильбертовом пространстве с помощью интеграла по мере Винера.

4. Построен аналог преобразования Хопфа–Коула, связывающий уравнения Бюргерса и Колмогорова–Петровского–Пискунова относительно функций, определенных на псевдоримановых многообразиях постоянной кривизны с тензором Риччи, пропорциональным метрике. Это же преобразование связывает также стохастические уравнения Бюргерса и Колмогорова–Петровского–Пискунова.

Основные методы исследования.

В диссертации используются методы бесконечномерного анализа, теории дифференциальных уравнений и дифференциальной геометрии.

Теоретическая и практическая ценность работы.

Диссертация носит теоретический характер. Полученные в ней результаты могут представлять интерес для специалистов, занимающихся современной теоретической физикой и классическими нелинейными уравнениями математической физики.

Апробация работы.

Результаты диссертации докладывались на следующих научно–исследовательских семинарах и конференциях:

- Семинар механико-математического факультета МГУ "Бесконечномерный анализ и математическая физика" под руководством д.ф.-м.н., проф. О.Г. Смолянова, д.ф.-м.н., проф. Е.Т. Шавгулидзе (2007 г., 2008г., 2009 г.),

- Международная конференция "Дифференциальные уравнения и смежные вопросы", посвящчнная памяти И. Г. Петровского, Москва, (2007 г.),

- XVII Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов" (2010 г.)

Публикации.

Основное содержание диссертации было опубликовано в 5 работах, список которых приведен в конце автореферата (см. [1]—[5]). Работ, написанных в соавторстве нет.

Структура и объем диссертации.

Диссертация состоит из введения, 3 глав и списка литературы. Объем диссертации — 71 страница, библиография включает 45 наименований.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** приводятся основные определения, обзор ранее полученных результатов и формулируются основные результаты диссертации. Кроме того, во введении обосновывается актуальность диссертационной работы и аргументируется научная новизна исследований.

Глава 1.

В первой главе получена формула Фейнмана и формула Фейнмана–Каца для уравнения Бюргерса в $\mathbb{R}^n$. Как известно, справедливо представление решения $u(t,x)$ задачи Коши для уравнения теплопроводности с начальным условием u_0, коэффициентом теплопроводности θ и потенциалом U в виде функционального интеграла:

$$u(t,x) = \int\limits_{C[0,t]} e^{\frac{1}{\theta}\int\limits_0^t U(\omega(\tau))d\tau} u_0(\omega(t)) W^x(d\omega),$$

здесь $W^x(dw)$ — мера Винера на $C[0,t]$, сосредоточенная на функциях, принимающих в нуле значение x.

Для получения представления решения $v(t,x)$ задачи Коши для уравнения Бюргерса с помощью аналогичного функционального интеграла вычисляется градиент от функции u, представленной по предыдущей формуле:

$$\nabla u(t,x) = \int\limits_{C[0,t]} e^{\frac{1}{\theta}\int\limits_0^t U(\omega(\tau))d\tau} \cdot \left(\frac{1}{\theta}\int\limits_0^t \nabla U(\omega(\tau))d\tau \cdot u_0(\omega(t)) + \right.$$
$$\left. + \nabla u_0(\omega(t))\right) W^x(d\omega).$$

Эта формула доказана для случая, когда функции $U(\cdot)$, $\nabla U(\cdot)$, $u_0(\cdot)$, $\nabla u_0(\cdot)$ — равномерно непрерывны на $\mathbb{R}^n$; $U(\cdot)$ и u_0 — ограничены на всем $\mathbb{R}^n$.

Теорема 1.1. *Пусть $u_0(\cdot)$ и $U(\cdot) \in C^1(\mathbb{R}^n)$; функции $U(\cdot)$, $\nabla U(\cdot)$, $u_0(\cdot)$, $\nabla u_0(\cdot)$ — равномерно непрерывны на $\mathbb{R}^n$; $U(\cdot)$ — ограничена на $\mathbb{R}^n$; существует решение $u(t,x)$ задачи Коши для уравнения теплопроводности для всех $t \in (0,T]$ с начальным условием $u_0(x)$, $u(t,x) \in C^3(\mathbb{R}^n)$ для любого $t \in (0,T]$. Тогда существует решение $v(t,x)$ задачи Коши для уравнения Бюргерса для $t \in (0,T]$ с внешней силой $V(x) = -\theta \nabla U(x)$ и начальным условием $v_0(x) = -\theta \frac{\nabla u_0(x)}{u_0}$, представимое в виде отношения двух функциональных интегралов:*

$$v(t,x) = -\theta \frac{\int\limits_{C[0,t]} e^{\frac{1}{\theta}\int\limits_0^t U(\omega(\tau))d\tau} [\frac{1}{\theta}\int\limits_0^t \nabla U(\omega(\tau))d\tau \cdot u_0(\omega(t)) + \nabla u_o(\omega(t))] W^x(d\omega)}{\int\limits_{C[0,t]} e^{\frac{1}{\theta}\int\limits_0^t U(\omega(\tau))d\tau} u_0(\omega(t)) W^x(d\omega)}.$$

Так как интеграл по мере Винера есть предел некоторых конечнократных интегралов, содержащих плотности переходных вероятностей броуновского движения, то полученная в Теореме 1.1 формула Фейнмана–Каца может интерпретироваться также и как формула Фейнмана для той же задачи.

Глава 2.

Во второй главе рассматривается бесконечномерное уравнение Бюргерса с внешней силой и бесконечномерное уравнение теплопроводности относительно мер. Оба уравнения рассматриваются в оснащенном гильбертовом пространстве.

На пространстве Φ' оснащенного гильбертова пространства будем рассматривать алгебру цилиндрических множеств R и σ–алгебру Σ, порожденную R. Меры, определенные на алгебре R называют цилиндрическими мерами. Множество счетно–аддитивных мер на алгебре Σ обозначим $\mathcal{M}(\Sigma, \Phi')$. Существование невырожденных счетно–аддитивных мер на Φ' накладывает ограничения на Φ. Для существования таких мер достаточно, чтобы топология в Φ была эквивалентна или слабее топологии, индуцированной топологией Гросса–Сазонова на гильбертовом пространстве H. Топологией Гросса–Сазонова называется слабейшая топология в гильбертовом пространстве, относительно которой все измеримые полунормы непрерывны. Примером подходящей топологии Φ служит топология банахова пространства с нормой $\|\|_\Phi$, определяемой равенством $\|\phi\|^2_\Phi = (T\phi, \phi)_H$, где T — ядерный оператор. Такая норма является измеримой.

Счетно–аддитивные меры можно дифференцировать по направлению.

Определение 2.4. Мера μ называется *дифференцируемой по направлению* h, если для любого множества $A \in \Sigma$ существует конечный предел

$$\lim_{t\to 0} \frac{\mu(A+th)-\mu(A)}{t} = \mu'(A,h) = \mu'_h(A).$$

Функция множеств $\mu'_h(A)$ называется *производной меры* по направлению h.

Аналогично определяется производная мерозначной функции, зависящей от действительного параметра.

Для дифференцируемых мер имеют место формулы дифференцирования, аналогические классическим. Примером является формула дифференцирования произведения функции и меры, аналогичная формуле Ньютона–Лейбница.

Предложение 2.1 Пусть μ — мера, дифференцируемая по направлению h, а f — Σ-измеримая вещественная функция, дифференцируемая по этому же направлению в каждой точке, причем сама f — μ'_h–суммируема, а f'_h — μ–суммируема. Тогда мера $f \cdot \mu$ дифференцируема по направлению h и

$$(f\cdot\mu)'_h = f'_h \cdot \mu + f \cdot \mu'_h.$$

В диссертации доказывается формула дифференцирования плотности одной меры относительно другой (аналогичная формуле "дифференцирования отношения"):

Предложение 2.3. Пусть ν, μ — σ-аддитивные меры на Σ, ν и μ — дифференцируемы по направлению h, мера μ имеет логарифмическую производную, ν и ν'_h — абсолютно непрерывны относительно μ. Тогда

$$\left(\frac{d\nu}{d\mu}\right)'_h = \frac{d(\nu'_h)}{d\mu} - \frac{d\nu}{d\mu}\cdot\frac{d(\mu'_h)}{d\mu}.$$

Дифференцирование мер позволяет определять дифференциальные уравнения в частных производных относительно мер. На оснащенном гильбертовом пространстве определим уравнение теплопроводности следующим образом:

$$\frac{\partial\mu}{\partial t}(t,A) = \frac{1}{2}\triangle\mu(t,A) + (U(t,\cdot)\cdot\mu(t))(A),$$

где $U(\cdot,\cdot)$ — Σ–измеримая действительнозначная функция (потенциал). Оператор Лапласа корректно определяется для цилиндрических мер.

Для того чтобы определить уравнение Бюргерса на оснащенном гильбертовом пространстве, необходимо определить аналоги выражения $(f, \nabla f)$ и оператора Лапласа.

Пусть функция f определена на Φ' и принимает значения в Φ', f — дифференцируема по любому направлению из Φ. Пусть e_i — ортонормированный базис Φ относительно скалярного произведения H. Определим выражение $(f, \nabla f)(x)$ для каждого $x \in \Phi'$ следующим образом:

$$(f, \nabla f)(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(f(x)(e_i) \cdot f'_{e_i}(x) \right),$$

здесь $f(x)(e_i)$ — действие функционала $f(x)$ как элемента Φ' на вектор из Φ, а $f'_{e_i}(x)$ — производная функции f по направлению вектора e_i.

Оператор Лапласа $\triangle$ определяем для функций $f : \Phi' \to \Phi'$, дважды дифференцируемых по подпространству Φ по Гато, следующим образом. Если e_n — ортонормированный базис в Φ, то $\triangle f(x) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} f''_{e_i e_i}(x)$, если сумма $\sum\limits_{i=0}^{\infty} f''_{e_i e_i}(x)$ сходится.

На оснащенном гильбертовом пространстве рассматривается бесконечномерное уравнение Бюргерса с внешней силой:

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t, x) + (\nabla v(t), v(t))(x) = \frac{1}{2} \triangle v(t, x) + V(t, x),$$

где неизвестная функция $v(\cdot, \cdot)$ определена на $\mathbb{R} \times \Phi'$ и принимает значения в Φ', $V : [0, T) \times \Phi' \to \Phi'$ — внешняя сила в уравнении Бюргерса.

В главе 2 решается задача нахождения связи между бесконечномерным уравнением Бюргерса и уравнением теплопроводности для мер в оснащенном гильбертовом пространстве. Доказано, что при некоторых предположениях логарифмическая производная меры, являющейся решением уравнения теплопроводности, взятая с обратным знаком, является решением бесконечномерного уравнения Бюргерса. Приведем точную формулировку этого утверждения:

Теорема 2.1. *Пусть μ является решением задачи Коши для уравнения теплопроводности относительно мер с начальным условием μ_0, потенциалом U для некоторого промежутка $[0, T)$, $T > 0$. Пусть также для любого $t \in [0, T)$ и для любых $h_1, h_2, h_3 \in \Phi$ существуют кратные производные мер μ'_{h_1}, $\mu''_{h_1 h_2}$, $\mu'''_{h_1 h_2 h_3}$, каждая из этих производных абсолютно непрерывна относительно μ; $\frac{\partial \mu}{\partial t}$ дифференцируема по любому направлению из Φ для любого $t \in [0, T)$; μ — невырождена, то есть не обращается в 0 на множествах, содержащих открытые множества в Φ'. Пусть также $v : [0, T) \times \Phi' \to \Phi'$ — функция, определяемая на каждом $t \in [0, T)$ и $x \in \Phi'$ как функционал, действующий на каждом векторе $h \in \Phi$ следующим образом: $v(t, x)(h) = -\frac{d\mu'_h}{d\mu}$. Пусть существует $\triangle v$ на всем Φ' для любого $t \in [0, T)$.*

Тогда v — дважды дифференцируема по Гато по подпространству Φ, имеет производную по параметру t при любом $t \in [0, T)$ и является решением задачи Коши для уравнения Бюргерса с внешней силой $V = -\nabla U$ и начальным условием $v_0 = -\frac{d\mu'_0}{d\mu_0}$ на промежутке $[0, T)$.

Верна также и обратная теорема.

Теорема 2.2. *Пусть v является решением задачи Коши для уравнения Бюргерса с внешней силой V и начальным условием v_0 на некотором промежутке $[0,T)$, $T>0$; $v(t,\cdot)$ является логарифмической производной некоторой меры $\mu(t)$ для любого $t\in[0,T)$. Пусть также для любого $t\in[0,T)$ и для любых $h_1,h_2,h_3\in\Phi$ существуют кратные производные мер μ'_{h_1}, $\mu''_{h_1h_2}$, $\mu'''_{h_1h_2h_3}$, каждая из этих производных абсолютно непрерывна относительно μ; при каждом $t\in[0,T)$ $\mu(t)$ дифференцируема по параметру t и ее производная абсолютно непрерывна относительно $\mu(t)$; для каждого $t\in[0,T)$ мера $\mu(t)$ абсолютно непрерывна относительно некоторой гауссовской меры $B(t)$ с плотностью, неравной* 0 *почти всюду относительно $B(t)$; существует действительнозначная функция $\widetilde{U}$ на $[0,T)\times\Phi'$, такая что для любых $t\in[0,T)$ и $x\in\Phi'$: $V(t,x)=-\nabla\widetilde{U}(t,x)$. Тогда существует такая функция $U:[0,T)\times\Phi'\to\mathbb{R}$, что μ является решением задачи Коши для уравнения теплопроводности относительно мер с потенциалом U и начальным условием $\mu(0)$. Кроме того, для любых $t\in[0,T)$ и $x\in\Phi'$ $U(t,x)=\widetilde{U}(t,x)+C(t)$, где $C(t)$ — некоторая действительнозначная функция аргумента t.*

В главе 2 получена также формула Фейнмана–Каца для уравнения теплопроводности относительно мер в оснащенном гильбертовом пространстве.

Для этого вводится пространство, двойственное пространству цилиндрических мер, — пространство $\mathcal{F}(\Phi')$ действительнозначных функций на Φ', являющихся равномерными пределами Φ–цилиндрических функций. Иначе говоря, $f\in\mathcal{F}(\Phi')$, если существует последовательность цилиндрических функций f_n, равномерно сходящаяся к f. Каждую такую функцию можно интегрировать по цилиндрической мере $\mu\in M(\Phi')$, если все f_n интегрируемы по μ. Двойственность пространств $M(\Phi')$ и $\mathcal{F}(\Phi')$ задается билинейным функционалом $\langle\mu,f\rangle=\int\limits_{\Phi'}f(x)\mu(dx)$.

Определяется уравнение теплопроводности относительно функций на Φ' с потенциалом:

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)=\frac{1}{2}\triangle f(t,x)+U(x)\cdot f(t,x),$$

где $U(\cdot)\in\mathcal{F}(\Phi')$.

Для уравнения теплопроводности с потенциалом относительно функций верно обобщение формулы Фейнмана–Каца на бесконечномерный случай:

$$f(t,x)=\int\limits_{C([0,t],\Phi')} e^{\int\limits_0^t U(\omega(\tau))d\tau} f(\omega(t))W^x(d\omega),$$

где W^x — мера Винера, сосредоточенная на непрерывных траекториях в Φ', принимающих в 0 значение x. Этот классический результат может быть доказан как с помощью формулы Троттера, так и с помощью теоремы Чернова.

Формула Фейнмана–Каца для уравнения теплопроводности относительно функций и двойственность пространств $\mathcal{F}(\Phi')$ и пространства цилиндрических мер используются для вывода формулы Фейнмана–Каца для уравнения теплопроводности относительно мер. Соответствующая теорема формулируется следующим образом:

Теорема 2.3. *Пусть $U \in \mathcal{F}(\Phi')$ — непрерывная функция, стремящаяся к нулю на бесконечности; существует решение задачи Коши μ для уравнения теплопроводности с потенциалом U относительно мер и начальным условием μ_0. Тогда для любой гладкой функции $f \in \mathcal{F}(\Phi')$, стремящейся к нулю на бесконечности, интеграл $\int\limits_{\Phi'} f(x)\mu(t,dx)$ представляется с помощью функционального интеграла следующим образом:*

$$\int\limits_{\Phi'} f(x)\mu(t,dx) = \int\limits_{C([0,t],\Phi')} \int\limits_{\Phi'} e^{\int\limits_0^t U(x+\omega(\tau))d\tau} f(x+\omega(t))\mu_0(dx)W^0(d\omega),$$

где W^0 — мера Винера, сосредоточенная на непрерывных траекториях в Φ', принимающих в 0 значение 0.

Глава 3.

Третья глава посвящена уравнениям в частных производных на псевдоримановых многообразиях.

Определяется уравнение Бюргерса на многообразии. В роли неизвестной функции этих уравнений выступает векторное или ковекторное поле. Пусть M — гладкое псевдориманово многообразие размерности n с метрикой g и симметричной связностью ∇, согласованной с этой метрикой.

Будем использовать оператор $\triangle$, действующий на тензоры произвольного ранга следующим образом: $\triangle T = g^{ij}\nabla_i\nabla_j T$. На функциях этот оператор совпадает с оператором Лапласа–Бельтрами. Зададим выражение $(f, \nabla f)$ для векторного поля f формулой $(f,\nabla f)^k(x) = f^i(x)\nabla_j f^k(x)$, а для ковекторного поля h формулой $(h,\nabla h)_k(x) = g^{ij}(x)h_i(x)\nabla_j h_k(x)$.

Определим уравнение Бюргерса на многообразии следующим образом:

Определение 3.3. *Уравнением Бюргерса* на многообразии M для векторного (ковекторного) поля $f : \mathbb{R}\times M \to T_0^1(M)$ $(f : \mathbb{R}\times M \to T_1^0(M))$ называется уравнение

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (f,\nabla f) = \frac{1}{2}\triangle f.$$

Уравнения Бюргерса определены корректно и связаны операцией поднятия/опускания индекса.

В евклидовом пространстве уравнения теплопроводности и Бюргерса связаны преобразованием Хопфа–Коула. В случае псевдориманова многообразия эти уравнения больше не связаны подобным преобразованием. Для уравнения Бюргерса на многообразии рассматривается аналог преобразования Хопфа–Коула $f(t,x) = -\frac{\nabla u(t,x)}{u(t,x)}$. При этом оказывается, что соответствующее уравнение для $u(t,x)$ будет в некотором случае уравнением типа Колмогорова–Петровского–Пискунова:

Теорема 3.1. *Пусть M — гладкое псевдориманово многообразие с постоянной скалярной кривизной и с тензором Риччи, пропорциональным метрике ($\mathrm{Ric}_{ij} = r \cdot g_{ij}$, r — константа). Пусть $T > 0$ и $u(\cdot,\cdot)$ — действительнозначная функция, определенная на $[0,T) \times M$; $\forall x \in M$ $u(\cdot,x)$ непрерывно дифференцируема по первому аргументу на $[0,T)$; $\forall t \in [0,T)$ $u(t,\cdot)$ трижды непрерывно дифференцируема на многообразии и $\frac{\partial u}{\partial t}(t,\cdot)$ непрерывно дифференцируема на многообразии; $\forall t \in [0,T)$, $\forall x \in M$ $u(t,x) \neq 0$; $u(\cdot,\cdot)$ является решением задачи Коши для уравнения Колмогорова–Петровского–Пискунова:*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\triangle u - \frac{scal(M)}{2n}\ln u \cdot u,$$

для всех $t \in [0,T)$ с начальным условием $u(0,x) = u_0(x)$. Здесь $scal(M)$ — скалярная кривизна многообразия M, n — его размерность. Пусть также $\forall t \geq 0$, $\forall x$ $u(t,x) \neq 0$. Тогда $f(t,x) = -\frac{\nabla u(t,x)}{u(t,x)}$ является решением задачи Коши для уравнения Бюргерса для ковекторного поля с начальным условием $f(0,x) = f_0(x) = -\frac{\nabla u_0(x)}{u_0(x)}$.

Верна также и обратная теорема.

Теорема 3.2. *Пусть M — гладкое связное риманово многообразие с постоянной скалярной кривизной и с тензором Риччи, пропорциональным метрике ($\mathrm{Ric}_{ij} = r \cdot g_{ij}$). Пусть $T > 0$ и $u(\cdot,\cdot)$ — действительнозначная функция, определенная на $[0,T) \times M$; $\forall x \in M$ $u(\cdot,x)$ непрерывно дифференцируема по первому аргументу на $[0,T)$; $\forall t \in [0,T)$ $u(t,\cdot)$ трижды непрерывно дифференцируема на многообразии и $\frac{\partial u}{\partial t}(t,\cdot)$ непрерывно дифференцируема на многообразии; $\forall t \in [0,T)$, $\forall x \in M$ $u(t,x) \neq 0$. Пусть также ковекторнозначная функция $f(t,x) = -\frac{\nabla u(t,x)}{u(t,x)}$ является решением задачи Коши для уравнения Бюргерса с начальным условием $f(0,x) = -\frac{\nabla u(0,x)}{u(0,x)}$. Тогда существует действительнозначная функция $C : [0,T) \to \mathbb{R}$ (потенциал), такая что u является решением задачи Коши для уравнения Колмогорова–Петровского–Пискунова:*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\triangle u - \frac{scal(M)}{2n}\ln u \cdot u + C(t)u, \tag{1}$$

с начальным условием $u(0,x)$. Здесь $scal(M)$ — скалярная кривизна многообразия M, n — его размерность.

Условие пропорциональности тензора Риччи и метрики есть в точности условие на многообразия, задаваемое уравнениями Кехлера–Эйнштейна.

Отсутствие стандартного преобразования Хопфа–Коула, связывающей уравнение Бюргерса и теплопроводности, объясняется тем, что ковариантные производные тензоров в общем случае не коммутируют. Для доказательства теоремы 5 используется лемма, в которой выведена формула для коммутатора оператора $\triangle$ и ковариантной производной, примененного к скалярной функции f:

$$\triangle\nabla_i f - \nabla_i \triangle f = -g^{kp}\mathrm{Ric}_{pi}\nabla_k f.$$

В третьей главе даны также определения уравнения Бюргерса на многообразии с внешними силами, в том числе со стохастической.

$$\frac{\partial f(t,x)}{\partial t} + (f, \nabla f)(t,x) = \frac{1}{2}\triangle f(t,x) + V(t,x) + s(t,x)\dot{W}_t.$$

Здесь $V(t,x)$ — ковекторная внешняя сила, зависящая как от точки многообразия, так и от времени (параметра t). $\dot{W}_t$ — белый шум, зависящий только от времени. Стохастическое уравнение Бюргерса в евклидовом пространстве рассматривается в работах А. Трумена. Понимать такое уравнение следует как интегральное:

$$df(t,x) = \frac{1}{2}\triangle f(t,x)dt - (f, \nabla f)(t,x)dt + V(t,x)dt + s(t,x) \circ dW,$$

где $\circ dW$ — дифференциал Стратоновича.

Для уравнений Бюргерса с внешними силами имеет место аналог преобразования Хопфа–Коула, аналогичный уравнению Бюргерса без внешних сил.

В последнем параграфе третьей главы приводятся примеры многообразий, для которых аналог преобразования Хопфа–Коула для уравнения Бюргерса на многообразии имеет место. Такими многообразиями, в частности, являются n–мерная сфера S^n и простые группы Ли.

В заключение выражаю глубокую благодарность своему научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору Олегу Георгиевичу Смолянову за постановку задач, постоянное внимание к работе и всестороннюю поддержку.

Список публикаций по теме диссертации.

[1] Matskevich S. E., *Representation of solutions of the Burgers equation using functional integrals*, Russian Journal of Mathematical Physics, v. 16, n. 4, 2009, 508—517.

[2] Matskevich S. E., *Burgers equation and Kolmogorov–Petrovsky–Piskunov equation on manifolds*, Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics, v. 13, n. 4, 2010, 575—584.

[3] Мацкевич С. Е., *Связь между уравнением Колмогорова–Петровского–Пискунова и уравнением Бюргерса на многообразиях*, деп. в ВИНИТИ, 547-B2010, Москва, 2010, 12 стр.

[4] Мацкевич С. Е., *Уравнение Бюргерса на римановых многообразиях*, Сборник тезисов международной конференции "Дифференциальные уравнения и смежные вопросы", посвященной памяти И.Г. Петровского, 2007, 186—187.

[5] Мацкевич С. Е., *Преобразование уравнения Бюргерса на многообразии в уравнение Колмогорова–Петровского–Пискунова*, Сборник тезисов конференции "Ломоносов–2010", 2010, 97—98.