Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 517

Каледа Павел Иоаннович

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЦИКЛЫ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ НА ПЛОСКОСТИ И РЕЛАКСАЦИОННЫЕ КОЛЕБАНИЯ

01.01.02 — Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва, 2010

Работа выполнена на кафедре дифференциальных уравнений Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук профессор Ильяшенко Юлий Сергеевич.
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук Хованский Аскольд Георгиевич, кандидат физико-математических наук Щербаков Арсений Алексеевич.
Ведущая организация:	Московский государственный университет путей сообщения.

Защита диссертации состоится 24 декабря 2010 г. в 16 часов 40 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.85 при Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу:
119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ, Механико-математический факультет, ауд. 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 24 ноября 2010 г.

Учёный секретарь диссертационного
совета Д 501.001.85 при МГУ,
доктор физико-математических наук,
профессор В. Н. Сорокин

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Настоящая диссертация относится к качественной теории дифференциальных уравнений. Она посвящена исследованию цикличности предельных множеств периодических траекторий векторных полей на вещественной плоскости, а также релаксационным колебаниям.

В 1900 г. в своем докладе на II-м Международном конгрессе математиков Гильберт сформулировал[1] знаменитые 23 проблемы. Вторая часть 16-й проблемы была посвящена предельным циклам векторных полей на плоскости. Именно, рассмотрим *полиномиальное векторное поле* на плоскости, т.е. систему дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x} = P_n(x, y), \quad \dot{y} = Q_n(x, y), \tag{1}$$

где $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, а $P_n(x, y)$ и $Q_n(x, y)$ — многочлены степени не более n. *Предельным циклом* системы (1) называется её изолированная замкнутая траектория, гомеоморфная окружности.

Проблема состоит из двух вопросов:

1. существует ли такая величина $H(n)$, зависящая только от n, что число предельных циклов любой полиномиальной системы вида (1) не превосходит $H(n)$?

2. если ответ на первый вопрос положителен, найти оценку сверху на выражение $H(n)$.

Эти вопросы до сих пор остаются открытыми, несмотря на многочисленные исследования. Известен только один общий результат о числе предельных циклов в данной задаче: каждое *фиксированное* полиномиальное векторное поле имеет лишь конечное число предельных циклов. Этот результат был получен независимо Ильяшенко[2] и Экалем[3] в начале 1990-х годов (аналогичное утверждение для квадратичных векторных полей было доказано Бамоном[4] несколькими годами ранее).

[1] *Проблемы Гильберта*, Сб. под общ. ред. П.С. Александрова. М.: Наука, 1969;
см. также *Yu. Ilyashenko*, Centennial history of Hilbert's 16th problem, Bull. Amer. Math. Soc., 2002, **39**, no. 3, pp. 301–354.

[2] *Yu. Ilyashenko*, Finitness theorems for limit cycles, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991.

[3] *J. Écalle*, Introduction aux fonctions analysables et preuve constructive de la conjecture de Dulac, Hermann, Paris, 1992.

[4] *R. Bamon*, Quadratic vector fields in the plane have a finite number of limit cycles, Publ. I.H.E.S **64** (1986), pp. 111–142.

С 16-й проблемой Гильберта тесно связана *проблема Гильберта–Арнольда.* В.И. Арнольд предложил[5] рассматривать не полиномиальные семейства, а произвольные *типичные* (типичность понимается здесь в топологическом смысле) конечно-параметрические семейства гладких дифференциальных уравнений на двумерной сфере с компактной базой параметров, и сформулировал ряд гипотез. Одна из них, хоть и оказалась сама неверной, подвела Ю.С. Ильяшенко[6] к формулировке следующей проблемы: *показать, что для всякого такого семейства число предельных циклов допускает равномерную оценку по всем значениям параметра.* Пользуясь соображениями компактности, восходящими к Р. Руссари[7], можно показать, что эта проблема сводится к оценке числа циклов, рождающихся при бифуркациях так называемых *полициклов*, т.е. сепаратрисных многоугольников. Эта задача и называется (локальной) проблемой Гильберта–Арнольда (см. формулировку проблемы 1).

Более подробно, *полициклом* γ векторного поля на сфере $\mathbb{S}^2$ называется циклически пронумерованный набор вершин, т.е. особых точек $p_1, \ldots, p_n$ (возможно, с повторениями), и дуг траекторий $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ (без повторений), соединяющих вершины в следующем порядке: j-я дуга соединяет вершину p_j с вершиной p_{j+1}, где $j = 1, \ldots, n$ и $p_{n+1} := p_1$.

Полицикл называется *нетривиальным*, если он содержит хотя бы одну особую точку. Максимальное число циклов, которые могут родиться при возмущении данного полицикла, называется его *цикличностью.*

Бифуркационным числом $B(k)$ называется максимальная цикличность нетривиального полицикла в типичном k-параметрическом семействе C^∞-гладких векторных полей. Заметим, что число $B(k)$ зависит только от числа параметров семейства.

Проблема 1 (Гильберта–Арнольда)**.** Доказать, что для любого конечного k бифуркационное число $B(k)$ конечно, и найти для него верхнюю оценку.

В общем случае данная проблема остаётся открытой. В случае *элементарного* полицикла, т.е. полицикла, в каждой вершине которого линеаризация соответствующего векторного поля имеет хотя бы одно ненулевое

[5] *Арнольд В.И., Афраймович В.С., Ильяшенко Ю.С., Шильников Л.П.* Теория бифуркаций. // В кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 5. Динамические системы V. — М.: ВИНИТИ, 1986. С. 5–218.

[6] *Yu. Ilyashenko*, Normal forms for local families and nonlocal bifurcations, Asterisque, Vol.222 (1994), pp. 233-258

[7] *R. Roussarie* Cyclicite finie et le 16 problem d'Hilbert, Dynamical systems (Volparasio 1986), R. Bamon, R. Lavarca, J. Palis (eds.). Lecture Notes in Mathematics 1331. Springer-Verlag, Berlin, New York 1988, pp. 161–188

собственное значение, проблема Гильберта–Арнольда была решена. Конечность была доказана Ю. Ильяшенко и С. Яковенко[8] путём применения теории малочленов Хованского[9]:

Теорема 1 (Ю. Ильяшенко, С. Яковенко)**.** Пусть $E(k)$ есть максимальная цикличность нетривиального элементарного полицикла в типичном k-параметрическом семействе C^∞-гладких векторных полей. Тогда для любого натурального k число $E(k)$ конечно.

С помощью техники, разработанной Ю. Ильяшенко и С. Яковенко, В. Калошиным[10] была получена и верхняя оценка на число $E(k)$:

Теорема 2 (В. Калошин)**.** Для любого натурального k

$$E(k) \leq 2^{25k^2}. \tag{2}$$

Теорема 2 даёт первую явную оценку на цикличность полицикла в семействе с произвольным числом параметров. Однако, оценка (2), *экспоненциальная* по числу параметров, выглядит сильно завышенной, поскольку в известных примерах (например, в случае тривиального полицикла и нетривиального полицикла коразмерности 1 или 2; см. сноску 10 и цитированные там работы) оценка линейна.

Первым из трёх основных результатов данной диссертации является теорема, которая даёт оценку, *полиномиальную* по числу параметров. Полученная оценка учитывает зависимость от числа вершин полицикла:

Теорема 3. Максимальная цикличность нетривиального элементарного полицикла с n вершинами в типичном k-параметрическом семействе ограничена числом

$$E(n,k) \leq C(n)k^{3n},$$

где $C(n) = 2^{5n^2+20n}$.

Теоремы 2 и 3 дают оценку для *элементарного* полицикла. Для индивидуального уравнения к любой неэлементарной особой точке можно применить метод разрешения особенностей, получить конечное число элементарных особых точек и свести, таким образом, задачу к элементарному

[8] *Y. Ilyashenko, S. Yakovenko*, Finite cyclicity of elementary polycycles in generic families, Concerning the Hilbert 16th problem, Amer. Math. Soc. Trsl. Ser. 2, vol. 165, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995, pp. 21–96

[9] *Хованский А.Г.* Малочлены, М.: ФАЗИС, 1996

[10] *V. Kaloshin*, The existential Hilbert 16-th problem and an estimate for cyclicity of elementary polycycles, Invent. math, 151 (2003), pp. 451–512

случаю. Это соображение мотивирует попытку использовать аналогичный метод для исследования цикличности неэлементарных полициклов. Однако, С. Трифонов разработал[11] метод разрешения особенностей в семействах и показал, что даже в случае однопараметрического аналитического семейства дифференциальных уравнений при разрешении особенностей рождаются целые *кривые* особых точек. Таким образом, возникает необходимость исследования быстро-медленых систем, а также их естественного обобщения, предложенного в этой работе, — сингулярных систем. Второй и третий результаты относятся именно к теории релаксационных колебаний.

Явление релаксационных колебаний хорошо известно[12] механикам, физикам, химикам, экологам (например, эти колебания возникают в модели тормозного устройства в механике, мультивибратора в радиофизике, реакции Белоусова–Жаботинского в химии, функционирования нервных клеток в биологии).

Впервые релаксационные колебания были обнаружены в двадцатые годы прошлого столетия Б. Ван-дер-Полем[13]. В последующие годы этому явлению было посвящено много исследований, в том числе Андроновым, Виттом и Хайкиным[14], Железцовым и Родыгиным[15] и другими.

Традиционно при изучении релаксационных колебаний исследуются системы вида

$$\varepsilon x' = F(x, y, \varepsilon),\ y' = G(x, y, \varepsilon), \quad x \in \mathbb{R}^n,\ y \in \mathbb{R}^m, \tag{3}$$

или, после перехода к *быстрому* времени (замена $t := \tau/\varepsilon$),

$$\dot{x} = F(x, y, \varepsilon),\ \dot{y} = \varepsilon G(x, y, \varepsilon), \tag{4}$$

где ε — малый параметр. Такие системы называются *быстро-медленными*: координата x — быстрая; координата y — медленная.

[11] *S. Trifonov*, Resolution of singularities in one-parameter analytic families of differential equations, Amer. Math. Soc. Transl. (2) Vol. **151**, 1992, pp. 135–145.
и *S. Trifonov*, Desingularisation in families of analytic differential equations, Adv. Math. Sci. 1995, vol. 23, pp. 97–129 (AMS Transl. Ser. 2; vol. 165)

[12] см., например, *Мищенко Е.Ф., Колесов Ю.С., Колесов А.Ю., Розов Н.Х.* Периодические движения и бифуркационные процессы в сингулярно возмущенных системах. Москва, «Физико-математическая литература», 1995,
а также обзор, указанный в сноске 5

[13] *Van der Pol B.*, On relaxation-oscillations, The London, Edinburgh and Dublin Phil. Mag. and J. of Sci., **2**:7 (1927), 978–992

[14] см., например, *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний, 2-е издание, 1959. С. 727–855 и цитированные там работы

[15] *Железцов Н.А., Родыгин Л.В.* К теории симметричного мультивибратора. — Докл. АН СССР, **81**:3 (1951), 391–392,
Железцов Н.А. К теории разрывных колебаний в системах второго порядка. Изв. высших учебных заведений. Радиофизика **1**:1 (1958), с. 67–78.

Фазовые портреты систем (3) и (4) при $\varepsilon \neq 0$ совпадают, но предельное поведение при $\varepsilon \to 0$ различно. Предел системы (3) называется *медленной системой*; ее траектории целиком лежат на *медленной поверхности*, т.е. множестве $M := \{f(x, y, 0) = 0\}$. Предел системы (4) называется *быстрой системой*; ее траектории «вертикальны» (или «горизонтальны»), т.е. лежат на плоскостях $y = \text{const}$, а медленная поверхность состоит из особых точек быстрой системы.

Медленная система адекватно описывает поведение реальной (т.е. возмущенной: $\varepsilon \neq 0$) системы, пока движение происходит вблизи участков медленной поверхности, состоящих из устойчивых особых точек быстрой системы. Если же траектория медленной системы достигнет *точки срыва*, т.е. границы притягивающего участка, то траектория реальной системы может претерпеть *срыв*, т.е. уйти из окрестности медленной поверхности. Далее поведение траектории описывается быстрой системой, т.к. вне окрестности медленной кривой при малом значении параметра ε вкладом возмущения можно пренебречь. Траектория будет следовать быстрой динамике, пока снова не попадет в окрестность медленной кривой, и так далее. При этом скорость релаксации («скачка») в медленном масштабе времени $\tau = \varepsilon t$ стремится к бесконечности при $\varepsilon \to 0$.

В конце прошедшего десятилетия, работая над ограниченной 16-й проблемой Гильберта для квадратичных векторных полей, Ю.С. Ильяшенко обнаружил[16] схожее поведение в семействе квадратичных векторных полей, в котором уже не было разделения на быстрые и медленные переменные, но сохранялась кривая особых точек при нулевом значении параметра.

Вторая часть данной диссертации посвящена дальнейшей разработке этого наблюдения. В ней рассматривается новый класс систем с релаксационными колебаниями — *сингулярные системы*, т.е. семейства систем дифференциальных уравнений на плоскости, которые при нулевом значении параметра имеют кривую особых точек. Этот класс является обобщением класса быстро-медленных систем. Для него сохраняется локальная теория быстро-медленных систем, но возникают и новые глобальные явления. Вторым основным результатом данной диссертации является полное описание нового глобального явления в теории релаксационных колебаний, а именно, бифуркации *быстро-медленной петли сепаратрисы*.

Третий основной результат данной диссертации также относится к теории релаксационных колебаний. Как уже было сказано, переход от мед-

[16] *Yu.Ilyashenko*, Limit cycles of singularly perturbed quadratic vector fields, T.U. Dresden, 8th AIMS Conference, Abstracts, p. 223

ленного движения к быстрому в быстро-медленной системе (4) называется *срывом.* Анализ динамики при $\varepsilon \to 0$ в окрестности точки срыва, где происходит переключение с медленного движения на быстрое, вызывал существенные трудности.

Эта задача была решена Л.С. Понтрягиным и Е.Ф. Мищенко[17] и получила название *теоремы о срыве.* Доказанная более 50 лет назад, теорема о срыве является одним из фундаментальных результатов теории релаксационных колебаний. Для плоского случая более простое доказательство этой теоремы было позже получено М. Крупой и П. Смольяном[18] при помощи техники, разработанной Ф. Дюмортье и Р. Руссари[19].

Теорема о срыве описывает отображение Пуанкаре вдоль траекторий с трансверсали «до срыва» на трансверсаль «после срыва». Это отображение является экспоненциально сжимающим, и его отклонение от точки срыва по медленной координате имеет порядок $\varepsilon^{2/3}$, где ε — малый параметр в быстро-медленной системе. Эти оценки (экспоненциальное сжатие и порядок отклонения) носят чисто асимптотический характер. Третьим основным результатом данной диссертации является *количественная* теорема о срыве для плоской быстро-медленной системы, которая утверждает следующее. Если нормализовать систему при помощи выбора масштаба, указанные выше оценки выполняются при всех $\varepsilon \in (0, e^{-8})$, отклонение отображения Пуанкаре при таких ε принадлежит отрезку $\varepsilon^{2/3}[e^{-6}, e^3]$, а само отображение сжимает с коэффициентом, который не превосходит $e^{-k(\varepsilon)}$, где $k(\varepsilon) \geq \frac{1}{4\varepsilon} - 1000$. Основным инструменом исследования является метод раздутия, изложенный в работе М. Крупы и П. Смольяна (см. сноску 18).

Актуальность основных результатов диссертации следует из вышесказанного.

Цель работы.

Целью работы является изучение предельных множеств периодических траекторий и нахождение количественных оценок для траекторий быстро-медленной системы на плоскости. Первый результат работы посвящен уточнению оценки В. Калошина на цикличность нетривиального элемен-

---

[17] См. работу *Мищенко Е.Ф., Понтрягин Л.С.* Вывод некоторых асимптотических оценок для решений дифференциальных уравнений с малым параметром при производных, Изв. АН СССР. Сер. матем., **23**:5 (1959), с. 643–660,
а также *Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х.* Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. М.: Наука, 1975

[18] *M. Krupa, P. Szmolyan*, Extending geometric singular perturbation theory to nonhyperbolic points — fold and canard points in two dimensions. SIAM Journal of Math. Anal., vol. 33 (2001), no 2. pp. 286–314.

[19] *F. Dumortier, R. Roussarie*, Canard cycles and center manifolds, Mem. Amer. Math. Soc. 577, Providence, 1996

тарного полицикла в типичном конечнопараметрическом семействе векторных полей на плоскости; второй результат посвящен исследованию бифуркации быстро-медленной петли сепаратрисы в однопараметрическом семействе сингулярных систем; третий результат посвящен нахождению явных количественных оценок траекторий, проходящих через окрестность точки срыва.

Методы исследования.

В работе применяются методы теории конечно-гладких нормальных форм локальных семейств векторных полей, теории малочленов Хованского, методы качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений и геометрической теории сингулярно-возмущенных систем.

Научная новизна работы.

В диссертации получены следующие результаты:

- доказана теорема об оценке цикличности нетривиального элементарного полицикла в типичном k-параметрическом семействе векторных полей с учетом числа вершин;
- дано полное описание бифуркации быстро-медленной петли сепаратрисы в аналитическом семействе сингулярных систем;
- доказана количественная теорема о срыве.

Все результаты являются новыми.

Теоретическая и практическая ценность.

Работа носит теоретический характер. Её результаты могут быть полезны специалистам для решения задач по 16-й проблеме Гильберта и релаксационным колебаниям.

Апробация работы.

Основные результаты диссертации докладывались автором на следующих семинарах и конференциях:

1. на семинаре «Динамические системы» под руководством д. ф.-м. н., профессора Ю.С. Ильяшенко (механико-математический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова) в 2006 г. и 2010 г.;
2. на Международной конференции «The 8th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications» (Dresden University of Technology, Dresden, Germany, 25–28 мая, 2010 г.)

3. на летней школе «Динамические системы» под руководством д. ф.-м. н., профессора Ю.С. Ильяшенко (механико-математический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова, при поддержке РФФИ и Laboratoire J.-V.Poncelet) в 2010 г;

4. на Международной конференции «Ломоносов-2010» (г. Москва, МГУ, 12–15 апреля 2010 г.)

Публикации.

Результаты диссертации опубликованы в 4-х работах, список которых приведён в конце автореферата [1–4], из них две [1-2] работы опубликованы в журналах из перечня ВАК.

Структура и объём работы.

Диссертация содержит введение, три главы и список литературы. Все три главы разделены на параграфы; первая глава состоит из трёх параграфов, вторая — из двух, третья — из шести. Список литературы содержит 35 наименований. Объём диссертации — 105 страниц.

Содержание диссертации.

Настоящая диссертация посвящена исследованию предельных множеств периодических траекторий векторных полей на плоскости и нахождению количественных оценок для траекторий быстро-медленной системы на плоскости.

Во **введении** освещается история и мотивация решаемых проблем. Там же даются основные определения и формулируются теоремы, полученные в диссертации, описывается её структура.

В **главе 1** доказывается результат о цикличности нетривиального элементарного полицикла в типичном k-параметрическом семействе векторных полей на плоскости с учетом числа вершин этого полицикла (см. теорему 3 автореферата и теорему 1.6 диссертации). Как уже было сказано, для решения этой задачи используется метод, разработанный Ю. Ильяшенко совместно с С. Яковенко и существенно доработанный В. Калошиным.

Параграф 1.1 посвящен описанию этого метода. Рассмотрим типичное k-параметрическое семейство векторных полей на плоскости, зависящее от параметра ε, и пусть при $\varepsilon = \varepsilon_*$ соответствующая система имеет нетривиальный полицикл. С помощью стандартного приёма — перехода к *отображению Пуанкаре* — задача об оценке числа предельных циклов дифференциального уравнения сводится к оценке числа изолированных неподвижных точек этого отображения. Мы будем искать неподвижные точки как решения специальной системы уравнений, называемой *базисной системой* (она также зависит от параметра ε). Дальнейший план состоит в том, чтобы путем ряда последовательных трансформаций привести базисную систему к виду, допускающему эффективную оценку числа решений, контролируя при этом оценку на число решений при каждой трансформации.

С помощью конечно-гладких замен координат исходное семейство векторных полей можно привести к специальному простому виду в окрестностях особых точек, что позволяет записать уравнения, входящие в базисную систему, в нормализованном виде.

Эти уравнения содержат сингулярные (не раскладывающиеся в нуле в ряд по целым неотрицательным степеням аргумента) функции, которые трудны для исследования. Однако решения таких уравнений в свою очередь удовлетворяют так называемым *пфаффовым уравнениям*, то есть дифференциальным уравнениям с *полиномиальными коэффициентами*, и, таким образом, число решений базисной системы оценивается через число решений новой *функционально-пфаффовой* системы, в которой уравнения с сингулярными функциями заменены на пфаффовы дифференциальные уравнения. Это позволяет избавиться от сингулярных функций.

Далее используется приём, известный как *редукция Хованского*. В результате его применения функционально-пфаффова система заменяется на (конечный) набор чисто функциональных систем, имеющих специальный вид и не содержащих сингулярных уравнений, причем число решений исходной системы не превосходит суммы чисел решений систем этого набора.

К таким системам применим аналог теоремы Безу — теорема Безу-Калошина, которая позволяет в явном виде оценить число их решений через посчитанные специальным образом степени входящих в систему уравнений.

Таким образом, описанный выше метод сводит задачу к оценке степеней уравнений в тех системах, к которым применяется теорема Безу-Калошина. Это вычисление проводится в параграфе 1.2. Главная идея подсчёта состоит в том, чтобы проследить за ростом степеней на каждом шаге процедуры Хованского и дать общую оценку на степень уравнений для систем на каждом шаге.

Глава 2 посвящена исследованию бифуркации быстро-медленной петли сепаратрисы в аналитическом семействе сингулярных систем. Для формулировки основного результата этой главы введём несколько определений.

Определение 1. Однопараметрическое семейство векторных полей вида

$$\dot{z} = v(z)f(z) + \varepsilon w(z,\varepsilon), \quad z \in \mathbb{R}^2 \tag{5}$$

называется (C^m-гладкой) *сингулярной системой*; векторное поле $w(z,\varepsilon)$ называется *полем возмущения*; поверхность $\{f(z) = 0\}$ называется *медленной поверхностью* (в двумерном случае — *медленной кривой*); поле $v(z)$ называется *характеристическим полем*.

Определение 2. Точка T называется *точкой срыва*, если в ней медленная поверхность касается фазовой кривой характеристического поля; точка F медленной поверхности называется *точкой падения*, если через нее проходит дуга траектории характеристического поля, проходящая также через точку срыва и не имеющая между ними пересечений с медленной поверхностью.

Определение 3. Векторное поле $W(z)$ на медленной поверхности, полученное проектированием на нее поля возмущения $w(z)$ вдоль характеристического поля $v(z)$, называется *медленным полем*. В точке срыва медленное поле не определено (имеет особенность).

Определение 4. *Сингулярным циклом* называется замкнутая кривая, состоящая из дуг срыва и участков медленной кривой между ними. Сингулярный цикл называется *простым*, если он содержит только одну точку срыва.

Заметим, что в классических быстро-медленных системах сингулярные циклы не могут быть простыми.

Предельный цикл системы (5) называется *предельным циклом типа Ван дер Поля*, если он лежит в малой вместе с ε окрестности сингулярного цикла.

Основной результат второй главы настоящей диссертации (теорема 2.26) состоит в следующем.

Теорема 4. Рассмотрим однопараметрическое семейство сингулярных систем вида

$$\dot{z} = v(z,\varepsilon,a)f(z,\varepsilon,a) + \varepsilon w(z,\varepsilon,a), \quad z = (x,y) \in \mathbb{R}^2, \tag{6}$$

где $a \in (\mathbb{R}, 0)$, $\varepsilon \in (\mathbb{R}, 0)$; v и w суть аналитические векторные поля и f — аналитическая функция.

Пусть векторное поле $v \cdot f$ обладает простым сингулярным циклом с точкой срыва T и точкой падения F, лежащей на устойчивой части медленной кривой, а однопараметрическое семейство $w_a := w(*, a)$ возмущений таково, что семейство медленных полей W_a удовлетворяет условиям:

1. медленное поле W_0 в малой проколотой окрестности точки срыва T направлено к этой точке (так называемый *прямой срыв*);

2. медленное поле $W_0(z)$ имеет невырожденную неустойчивую особую точку A, совпадающую с точкой падения быстрой системы: $A = F$;

3. нули поля $W_0(z)$, отличные от A, располагаются вне некоторой окрестности сингулярного цикла Σ;

4. условия невырожденности (сформулированы в параграфе 2.2 диссертации).

Тогда

1. на плоскости параметров (a, ε) в полуокрестности нуля, заданной неравенством $\varepsilon > 0$, имеется такая кривая γ, что при значениях параметров на γ система (6) обладает петлей сепаратрисы (см. портрет 2 на рис. 1), при значениях параметров по одну сторону γ система обладает единственным предельным циклом типа Ван дер Поля (портрет 3 на рис. 1), а при значениях параметров по другую — не обладает предельными циклами, близкими к сингулярному (см. портрет 1 на рис. 1);

2. кривая γ имеет асимптотику $a = O(\varepsilon^{\frac{2}{3}})$;

3. кривая γ может быть задана в виде $\varepsilon = h(a)$, где h — C^1-гладкая функция;

4. при малых $\varepsilon < 0$ вблизи сингулярного цикла возмущение не имеет ни петель сепаратрисы, ни циклов (см. портрет 7 на рис. 1).

В параграфе 2.1 введены необходимые определения, а также сформулированы основные факты теории быстро-медленных систем и их аналоги для теории сингулярных систем. В параграфе 2.2 сформулирован основной результат главы вместе с условиями невырожденности (теорема 2.26), а также проведено его доказательство.

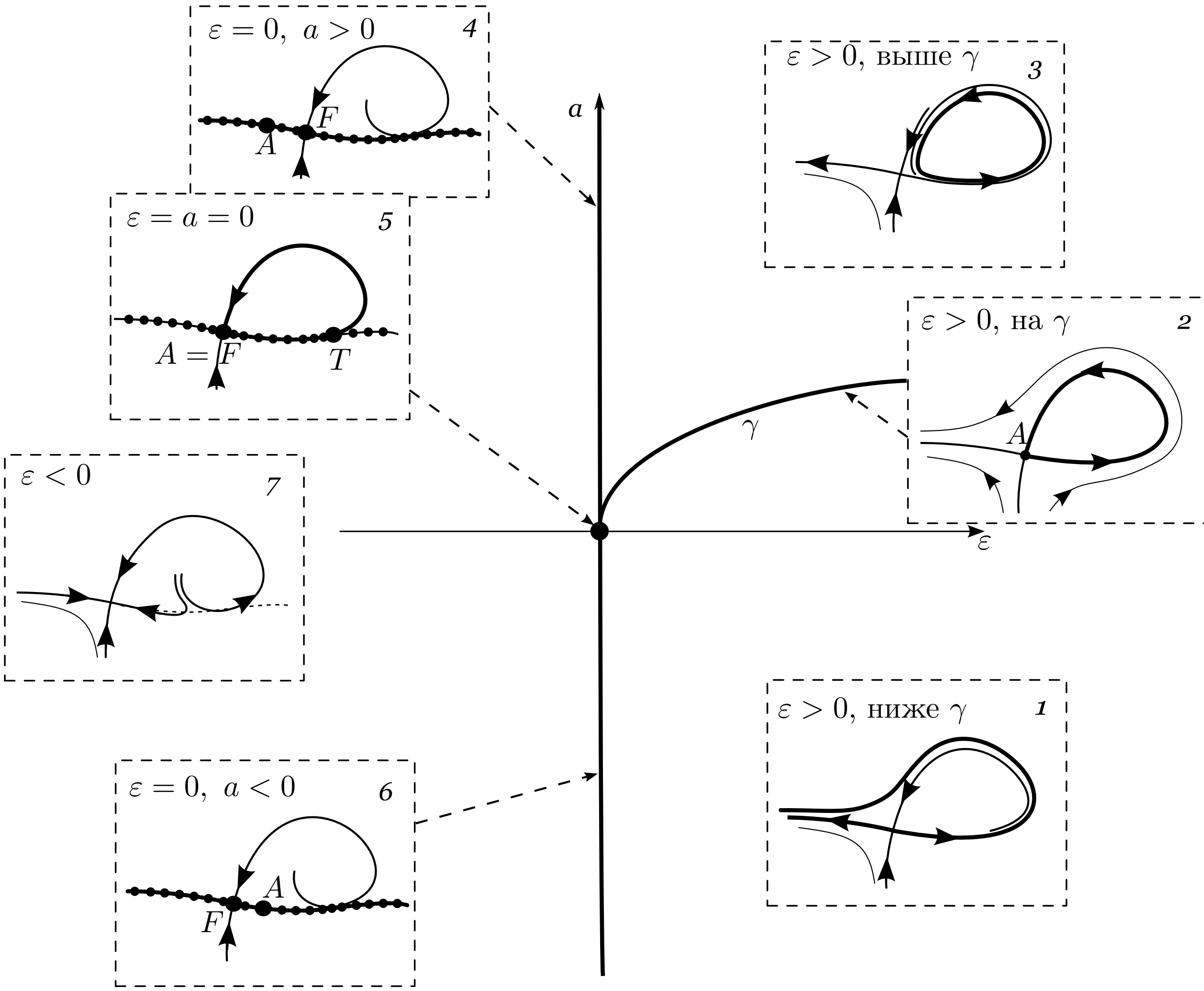

Рис. 1: Бифуркация быстро-медленной петли сепаратрисы

Идея доказательства состоит в следующем. Рассмотрим расширенную систему, добавив к исходной системе тривиальные уравнения на параметры. На истинной медленной поверхности при каждых (a, ε), $\varepsilon > 0$, имеется седловая особая точка $A(a, \varepsilon)$. Проследим за многообразием M_{in}, составленным из устойчивых сепарастрис таких точек при малых ε и a, и за многообразием M_{out}, составленным из неустойчивых сепаратрис. Пересечение многообразий M_{in} и M_{out} — это многообразие, составленное из «совпавших» устойчивых и неустойчивых сепаратрис, то есть в точности из петель сепаратрис. Его проекция на плоскость параметров дает искомую кривую γ. Основная сложность состоит в исследовании пересечения многообразий M_{in} и M_{out} в окрестности нулевого значения параметра ε.

Заметим, что при исследовании этого пересечения используется «более точная» асимптотика, чем даёт обычная теорема о срыве в быстро-медленной системе. Этот результат сформулирован во второй главе (теорема 2.22) и доказан в третьей главе диссертации.

Глава 3 диссертации посвящена доказательству количественной теоремы о срыве. Рассмотрим гладкую быстро-медленную систему вида

$$\begin{cases} \dot{x} = (x^2 - y)(1 + h(x, y, \varepsilon)), \\ \dot{y} = -1 + g(x, y, \varepsilon) \end{cases} \tag{7}$$

в прямоугольнике U со сторонами, параллельными осям координат, и с вершинами $(-13/12, -1)$, $(1, 1)$ (см. рис. 2). Здесь $h(x, y, \varepsilon) = O(x, y, \varepsilon)$ и $g(x, y, \varepsilon) = O(x, y, \varepsilon)$. Кроме того, предполагается, что при всех $(x, y, \varepsilon) \in U \times [0, \varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 = e^{-4}$, выполняются условия на функции g и h и на их градиенты:

$$|h(x, y, \varepsilon)| \leq 1/2, \quad |g(x, y, \varepsilon)| \leq 1/2; \tag{8}$$

$$||\operatorname{grad} h||_1 \leq 10^{-2}, \quad ||\operatorname{grad} g||_1 \leq 10^{-2}, \qquad ||(\xi_1, \xi_2, \xi_3)||_1 := \sum_1^3 |\xi_i|. \tag{9}$$

Система (7) есть нормальная форма быстро-медленной системы. Нормализация состоит из нормализации медленной кривой ($x^2 - y = 0$) с последующим изменением масштаба, который система сама себе задаёт (требования (8) и (9)). К такой нормальной форме можно привести любую быстро-медленную систему, к которой применима обычная теорема о срыве.

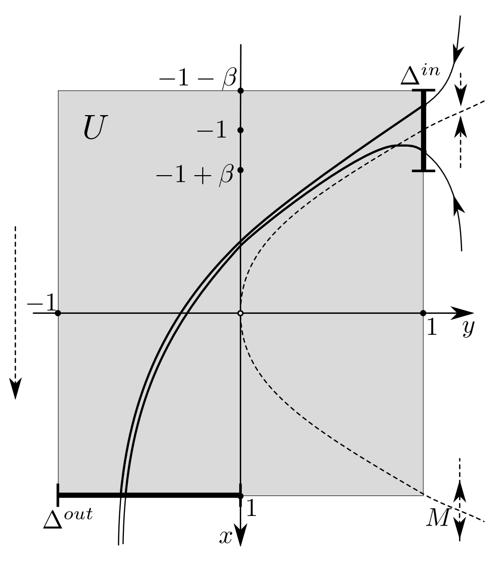

Рис. 2: Фазовый портрет системы (7) при малом $\varepsilon > 0$

Рассмотрим «входную» трансверсаль

$$\Delta^{in} := \{(x, y) : x \in (-1 - \beta; -1 + \beta),\ y = 1\}, \quad \beta = 1/12,$$

и «выходную» трансверсаль

$$\Delta^{out} := \{(x,y) : x = 1,\ y \in (-1;0)\}.$$

Основным результатом этой главы является следующая теорема, сформулированная в параграфе 3.1 диссертации (теорема 3.31).

Теорема 5. Пусть выполнены условия (8) и (9). Тогда для системы (7) при любом $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0 = e^{-8})$

1. существует отображение последования $\pi_\varepsilon : \Delta^{in} \to \Delta^{out}$;
2. если $p \in \Delta^{in}$, то $\pi_\varepsilon(p) = (1, \nu(\varepsilon))$, причем $\nu(\varepsilon) \in \varepsilon^{2/3}[-e^3, -e^{-6}]$;
3. отображение π_ε является сжатием, причем $(\pi_\varepsilon)' \leq e^{-(1/4\varepsilon - 10^3)}$.

Остальные параграфы Главы 3 содержат доказательство этого результата. Параграф 3.2 посвящен описанию главного инструмента исследования — раздутию, которое применяется к точке срыва. В дальнейшем исследование проводится в трех координатных картах. Карте K_1 посвящен параграф 3.3; эта карта описывает поведение траекторий «перед» срывом, в ней происходит экспоненциальное сжатие траекторий. Карте K_2 посвящен параграф 3.4; эта карта описывает поведение траекторий «около» срыва. В этой карте возникает известное уравнение Риккати, по специальному решению которого будут потом «склеены» результаты, полученные в других картах. Карта K_3 изучается в параграфе 3.5; она описывает поведение траекторий «после» срыва. Динамика в ней «ответственна» за оценку координаты траектории на выходе из окрестности точки срыва. В параграфе 3.6 проводится анализ результатов, собранных в разных картах, и завершается доказательство.

Я искренне благодарю моего дорогого учителя, профессора Юлия Сергеевича Ильяшенко, за постановку задач, внимание к их решению и плодотворные обсуждения, а также за создание великолепной творческой атмосферы при работе над текстом диссертации.

Работы автора по теме диссертации.

1. *Каледа П.И., Щуров И.В.* Цикличность элементарных полициклов с фиксированным числом особых точек в типичных k-параметрических семействах // Алгебра и анализ, т. **22** (2010), №4, с. 57–75. *В этой работе И.В. Щурову принадлежит идея основной конструкции, а П.И. Каледе – доказательство основного результата.*

2. *Каледа П.И.* Бифуркация быстро-медленной петли сепаратрисы // Доклады Академии Наук, т. **434** (2010), №2, с. 158–160

3. *Каледа П.И.* Количественная теорема о срыве // Депонировано в ВИНИТИ (2010), №520-В2010, с. 1–30

4. *P. Kaleda*, The bifurcation of slow-fast separatrix loop in singular systems family // T.U. Dresden, 8th AIMS Conference, Abstracts, p. 224