Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова
Механико–математический факультет

На правах рукописи
УДК 514.84, 517.984.5

Рухиан Хомаюн

Топологические свойства асимптотики спектра несамосопряженного оператора на двумерной поверхности вращения

01.01.04 — геометрия и топология

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук

Москва, 2010

Работа выполнена на кафедре дифференциальной геометрии и приложений Механико–математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель
доктор физико–математических наук,
профессор Шафаревич Андрей Игоревич

Официальные оппоненты
доктор физико–математических наук,
профессор Степин Станислав Анатольевич,
кандидат физико–математических наук,
Толченников Антон Александрович

Ведущая организация
Санкт–Петербургское отделение
Математического института имени В. А. Стеклова РАН.

Защита диссертации состоится 10 декабря 2010 г. в 16 час. 45 мин. на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 при Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119991 Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Механико–математический факультет, аудитория 14–08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико–математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 12 ноября 2010 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д.501.001.84 при МГУ
доктор физико–математических наук,
профессор А. О. Иванов

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Геометрические аспекты спектральной теории дифференциальных и псевдодифференциальных операторов изучались в огромном количестве работ; этой теории имеют много приложений в математике и теоретической физике. Спектральная теория несамосопряженных операторов, сравнительно с самосопряженным случаем, развита значительно менее полно; как структура спектра, так и свойства спектрального разложения могут быть в этой ситуации весьма экзотическими. В частности, в несамосопряженном случае к настоящему времени отсутствует общая теория квазиклассичеких асимптотик, аналогичная теории В.П. Маслова [1] квантования инвариантных лагранжевых многообразий. В работах [2] построены спектральные серии оператора Лапласа-Бельтрами со сносом в евклидовом пространстве, связанные с асимптотически устойчивыми положениями равновесия, предельными циклами и инвариантными торами соответствующего векторного поля. В работах [3] полностью исследован спектр одномерного оператора Шредингера и Орра - Зоммерфельда на отрезке с потенциалами простейшего вида (линейным, квадратичным и близким к линейному); отметим, что ряд утверждений об условиях квантования содержался еще в работе [4]. В этих работах, в частности, было показано, что спектр в квазиклассическом пределе стягивается к некоторому графу на комплексной плоскости. В работах [5] описан спектр одномерного оператора Шредингера с комплексным потенциалом простейшего вида (линейный или квадратичный тригонометрический

---

[1] В. П. Маслов, Теория возмущений и асимптотические методы, Изд-во Моск. ун-та, М., 1965, В.П. Маслов, Асимптотические методы решения псевдодифференциальных уравнений, М., Наука, 1987.

[2] С.Ю. Доброхотов, Виктор Мартинес Оливе, В.Н. Колокольцов. Мат. Заметки, 1995, 58(2), 880-884, S.Yu.Dobrokhotov, V.N. Kolokoltsov, V.Martinez Olive. Sobretiro de Sociedad Matematica Mexicana, 1994, 11, 81-89.

[3] С.А. Степин. УМН,1995, 50(6), 219-220, С.А. Степин. Функц. анализ, 1996, 30(4), 88-91, С.А. Степин, Фунд. и прикл. мат., 1997, 3(4), 1189-1227, А.А. Шкаликов. Мат. Заметки, 1997, 62(6), 950-953, С.А. Степин, А.А. Аржанов. Докл. РАН, 2001, 378(1), 18-21, С.Н. Туманов, А.А. Шкаликов. Известия РАН, сер. матем., 2002, 66(4), 177-204, А.А. Шкаликов. Соврем. матем. Фундамент. направления, 2003,3, 89-112, С.А. Степин, А.А. Аржанов. Соврем. матем. и её прилож., 2003,8, 1-18

[4] Ю.Н. Днестровский, Д.П. Костомаров. ДАН СССР, 1963, 152, 1, 28-30

[5] С.В. Гальцев, А.И. Шафаревич. Мат. Заметки, 2006, 80(3), 356-366, С.В. Гальцев, А.И. Шафаревич. ТМФ, 2006, 148(2), 206-226, S.V. Galtsev, A.I. Shafarevich. Adv. in Cont. Math., 12(2006) 12(2), 167-196, А.И. Есина, А.И. Шафаревич. Мат. Заметки, 2010, 88(2), 229-248

многочлен) на окружности; в частности, был найден спектральный граф и показано, что асимптотика спектра может быть вычислена из топологических условий квантования на римановой поверхности - комплексной поверхности постоянной энергии.

В диссертации описан спектр оператора Лапласа - Бельтрами со сносом на двумерной компактной поверхности вращения, гомеоморфной сфере (рассматривается поле скоростей, направленное вдоль паралллелей и линейно зависящее от высоты). Показано, что спектр вычисляется из условий квантования на соотвествующей римановой поверхности, аналогичным условиям Бора - Зоммерфельда - Маслова; однако, в отличие от самосопряженного случая, в нашей ситуации достаточно требовать выполнения такого условия хотя бы на одном базисном цикле поверхности (разные циклы определяют разные спектральные серии). Исследован спектральный граф (состоящий из трех ребер); особенно полную информацию о нем удается получить в случае стандартной сферы – тогда асимптотика спектра выражается через эллиптические интегралы. При доказательствах соответствующих теорем применяется техника, развитая в работах [6] (см. также [7]) и основанная на изучении решений спектрального уравнения в комплексной области и, в частности, на исследовании топологии т.н. графа Стокса (ребра этого графа ограничивают области, в которых справедливы квазиклассические асимптотические формулы).

Цель работы. Автор ставил перед собой следующие цели:

(1) Описать топологические свойства асимптотики спектра несамосопряженного оператора Лапласа со сносом на двумерной поверхности вращения, гомеоморфной сфере.
(2) Описать квазиклассическую асимптотику спектра несамосопряженного оператора Лапласа – Бельтрами со сносом на двумерной поверхности вращения и ее связь с топологией графа Стокса.
(3) Исследовать топологию спектрального графа и его расположение на комплексной плоскости.
(4) Получить простые и эффективные формулы для спектральных серий в случае стандартной сферы.

[6] М. В. Федорюк, Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, Справочная математическая библиотека, Наука, М., 1983, М. А. Евграфов, М. В. Федорюк, УМН, 21:1 (1966), 3–50

[7] S.A. Stepin. Lecture Notes on WKB method, Univ. of Bialystok, 2002, preprint N 11

Методы исследования. Исследования, проводимые в диссертационной работе, основаны на методах дифференциальной геометрии и топологии, спектральной теории дифференциальных операторов, аналитической теории дифференциальных уравнений. В работе используются результаты асимптотической теории дифференциальных операторов, разработанной М.В. Федорюком.

Научная новизна. Результаты диссертации являются новыми и заключаются в следующем:

(1) Описана квазиклассическая асимптотика спектра оператора Лапласа-Бельтрами со сносом на двумерной компактной поверхности вращения. Установлена связь с топологией линий Стокса.
(2) Показано, что асимптотика спектра определяется из топологических условий квантования на римановой поверхности постоянной комплексной энергии.
(3) Исследован спектральный граф; показано, что он определяется топологией графа Стокса.
(4) Для стандартной сферы получены простые и эффективные формулы для асимптотики собственных чисел.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Ее результаты и методы могут быть использованы специалистами в области дифференциальной геометрии, дифференциальных уравнений и математической физики.

Апробация диссертации.

- Конференция “Современные проблемы анализа и преподавания математики”, посвященная 105-летию С.М. Никольского. Москва, МГУ, май 2010.
- Конференция “Асимптотические методы и математическая физика”. Москва, ИПМех РАН, май 2010.
- Семинар кафедры Дифференциальной геометрии и приложений Механико-математического факультета МГУ им М.В. Ломоносова.

Публикации. Основные результаты работы опубликованы в трех работах, ссылки [1 – 3] на которые приведены в конце автореферата.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения и трех глав, включающих в себя 11 разделов. Текст диссертации изложен на 60 страницах и дополняется 7 рисунками. Список литературы содержит 21 наименование.

Содержание работы

Введение. Во введении приводится обзор ранее полученных результатов, связанных с темой диссертации и обосновывается актуальность диссертационной работы.

Глава 1. В первой главе приводятся постановка задачи и основные определения, используемые в диссертационной работе.

В разделе 1.1 определяется несамосопряженный дифференциальный оператор:

$$D = \epsilon^2\Delta + (v, \nabla)$$

на двумерной компактной поверхности вращения M, гомеоморфной сфере; Δ—оператор Лапласа-Бельтрами, $\epsilon > 0$, v — гладкое векторное поле на M.

Далее в первой главе вводятся следующие необходимые для дальнейшего понятия: линии Стокса и канонические области, канонические фундаментальные системы решений, матрицы перехода, регулярные особые точки и матрицы монодромии. Приведены асимптотические формулы для матриц перехода и монодромии.

Глава 2. Во второй главе проводится исследование асимптотики при $\epsilon \to 0$ спектра оператора

$$D = \epsilon^2\Delta + (v, \nabla), \quad v = z\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

на стандартной сфере $\mathbb{S}^2$.

В разделе 2.1 показано, для того чтобы вычислить спектр оператора D на стандартной сфере $\mathbb{S}^2$ достаточно исследовать свойства обыкновенного дифференциального уравнения с регулярными особыми точками:

$$\epsilon^2(w'' + Pw') + Qw = 0,$$

где $P(x) = -\frac{2x}{1-x^2}(m+1)$, $p(x) = (1-x^2)P(x)$, $Q(x) = -\epsilon^2\frac{(m^2+m)}{1-x^2} + \frac{imx-\lambda}{1-x^2}$.

В разделе 2.2 сначала описываются разные топологические случаи строения графа Стокса. Линии Стокса на плоскости выходят из одной точки поворота $\frac{\lambda}{im}$ и двух особых точек -1 , $+1$. Асимптотика спектра на стандартной сфере $\mathbb{S}^2$ описывается следующими леммой и теоремами:

Лемма 1. *Пусть λ таково, что нет конечных линий Стокса. Тогда в $O(\epsilon^2)$-окрестности точки λ нет точек спектра.*

Конечные линии Стокса могут быть трех типов:
— Линия Стокса соединяет -1 и 1,
— Линия Стокса соединяет -1 и $\frac{\lambda}{im}$,
— Линия Стокса соединяет $\frac{\lambda}{im}$ и 1.

Теорема 1. *Пусть линия Стокса соединяет* -1 *и* 1. *Пусть* λ *таково, что*

$$\frac{1}{\epsilon}=\pi(2n-2m-1)\left[\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{imt-\lambda}{1-t^2}}dt\right]^{-1}.$$

Тогда существует собственное значение $\tilde{\lambda}$ *оператора* D *такое, что*

$$|\lambda-\tilde{\lambda}|=O(\epsilon^2).$$

Теорема 2. *Пусть линия Стокса соединяет* -1 *и* $z_0(\lambda)=\lambda/im$. *Пусть* λ *таково, что*

$$\frac{1}{\epsilon}=\pi\left(-\frac{1}{4}+2n-m\right)\left[\int_{-1}^{z_0(\lambda)}\sqrt{\frac{imt-\lambda}{1-t^2}}dt\right]^{-1}.$$

Тогда существует собственное значение $\tilde{\lambda}$ *оператора* D *такое, что*

$$|\lambda-\tilde{\lambda}|=O(\epsilon^2).$$

Теорема 3. *Пусть линия Стокса соединяет* $z_0(\lambda)$ *и* 1. *Пусть* λ *таково, что*

$$\frac{1}{\epsilon}=\pi\left(-\frac{1}{4}+2n-m\right)\left[\int_{z_0(\lambda)}^{1}\sqrt{\frac{imt-\lambda}{1-t^2}}dt\right]^{-1}.$$

Тогда существует собственное значение $\tilde{\lambda}$ *оператора* D *такое, что*

$$|\lambda-\tilde{\lambda}|=O(\epsilon^2).$$

В разделе 2.3 при помощи анализа соответсвующих эллиптических интегралов изучается расположение точек спектра на комплексной плоскости. А именно, показано, что при $\epsilon\to 0$ спектр концентрируется в малой окрестности некоторого графа. При каждом фиксированном m этот граф состоит из трех ребер, одно из которых – луч на действительной оси. Последнее обстоятельство вытекает из следующей леммы.

Лемма 2. *При* $\lambda \in \mathbb{C} \setminus i(-m, m)$

$$I(\lambda) = Re \int_0^{\pi} \sqrt{im \cos\theta - \lambda} d\theta = 0$$

тогда и только тогда, когда λ*— действительное положительное число.*

Два других ребра соединяют точки $\pm im$ с точкой на действительной оси; единственность этой точки вытекает из следующей леммы.

Лемма 3. *Уравнение*

$$J(\lambda) = Re \int_0^{\theta_+} \sqrt{im \cos\theta - \lambda} d\theta = 0$$

на параметр $\lambda \in (0, +\infty)$ *имеет только одно решение* λ*, причем* $\lambda \in (0, m \operatorname{sh} \frac{\pi}{2})$*. Здесь* $\theta_\pm$ *— решения уравнения* $im \cos\theta - \lambda = 0$ *:*

$$\theta_\pm = \pm \left(\frac{\pi}{2} + i \ln \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\lambda}{m} \right)^2} + \frac{\lambda}{m} \right) \right)$$

.

В целом (при всех m) спектр оператора D концентрируется вблизи графа с бесконечным числом вершин, изображенного на рис. 1.

Замечание 1. *В зависимости от расположения точки спектра на комплексной плоскости* λ*, линии Стокса по-разному расположены на комплексной плоскости.*

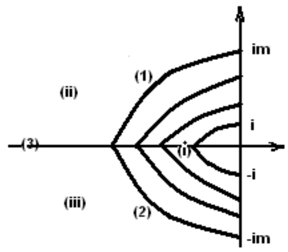

Рис. 1. Расположение спектра

Случай(1): Если точка спектра совпадает с вершиной графа, расположение линий Стокса такое, как на рис.2.

Случай(2): Если точка спектра находится на линии(3)(рис.1), то линии Стокса расположены так, как показано на рис. 3.

Случай(3): Если точка спектра находится на линии (2), то линии Стокса расположены так, как показано на рис. 4.

Случай(4): Если точка спектра находится на кривой (1), то линии Стокса расположены так, как показано на рис. 5.

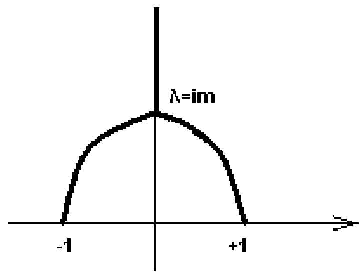

Рис. 2. Линии Стокса 1

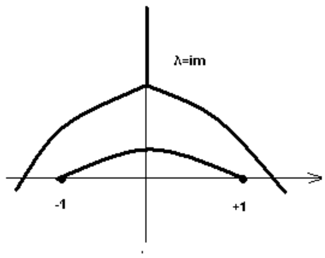

Рис. 3. Линии Стокса 2

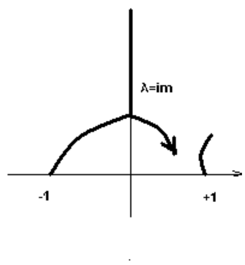

Рис. 4. Линии Стокса 3

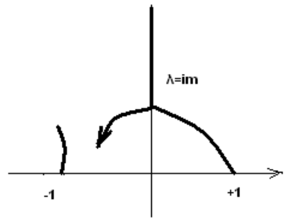

Рис. 5. Линии Стокса 4

Глава 3. Третья глава диссертационной работы посвящена описанию спектра оператора D на поверхности вращения.

В разделе 3.1 оператор Лапласа-Бельтрами записан для случая поверхности, полученной вращением графика функции $x = f(z)$ вокруг оси Oz:

$$\Delta w = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial u_i} g^{ij} \sqrt{g} \frac{\partial}{\partial u_j} w =$$

$$\frac{1}{f\sqrt{f_z^2+1}} \frac{\partial}{\partial z} g^{11} \sqrt{g} \frac{\partial}{\partial z} \omega + \frac{1}{f\sqrt{f_z^2+1}} \frac{\partial}{\partial \varphi} g^{22} \sqrt{g} \frac{\partial}{\partial \varphi} \omega,$$

здесь $g^{11} = \frac{1}{f_z^2+1}$, $g^{22} = \frac{1}{f^2}$, $g = f^2(f_z^2+1)$. Координата z на поверхности M меняется на отрезке $[z_1, z_2]$, причем $f(z_1) = f(z_2) = 0$; точнее, мы считаем, что $f(z) = \sqrt{(z-z_1)(z_2-z)} f_0(z)$, где $f_0(z)$ – многочлен и $f_0 > 0$ при $z \in [z_1, z_2]$.

Уравнение

$$\epsilon^2 \Delta\omega + (v, \nabla)\omega = \lambda\omega$$

после разделения переменных приводится к виду:

$$\epsilon^2 \left(\psi''(z) + \frac{f_z\sqrt{f_z^2+1} - f f_z f_{zz} (f_z^2+1)^{\frac{-1}{2}}}{f (f_z^2+1)^{\frac{1}{2}}} \psi'(z) \right)$$

$$+ \left(\frac{\epsilon m^2 (f_z^2+1)}{f^2} + (imz - \lambda)(f_z^2+1) \right) \psi(z) = 0,$$

где $\omega = \exp(im\varphi)\psi(z)$, $v = z\frac{\partial}{\partial\varphi}$ (φ – угол вращения).

Топология графа Стокса аналогична случаю стандартной сферы. В разделе 3.2 асимптотика спектра на поверхности вращения описана посредством следующих теорем:

Теорема 4. *Пусть линия Стокса соединяет z_1 и z_2, а λ таково, что*

$$\frac{1}{\epsilon} = \pi\left(n - \frac{1}{2} + 2m\right)\left(\int_{z_1}^{z_2} \sqrt{(imz-\lambda)(f_z^2+1)}dt\right)^{-1}.$$

Тогда существует собственное значение $\tilde{\lambda}$ оператора D такое, что

$$|\lambda - \tilde{\lambda}| = O(\epsilon^2).$$

Теорема 5. *Пусть линия Стокса соединяет z_1 и $\frac{\lambda}{im}$, а λ таково, что*

$$\frac{1}{\epsilon} = \pi\left(2n - \frac{1}{4} - m\right)\left[\int_{z_1}^{\frac{\lambda}{im}} \sqrt{(\lambda - imz)(f_z^2+1)}dz\right]^{-1}.$$

Тогда существует собственное значение $\tilde{\lambda}$ оператора D такое, что

$$|\lambda - \tilde{\lambda}| = O(\epsilon^2).$$

Теорема 6. *Пусть линия Стокса соединяет $\frac{\lambda}{im}$ и z_2, а λ таково, что*

$$\frac{1}{\epsilon} = \pi\left(2n + \frac{1}{4} - m\right)\left[\int_{z_2}^{\frac{\lambda}{im}} \sqrt{(\lambda - imz)(f_z^2+1)}dz\right]^{-1}.$$

Тогда существует собственное значение $\tilde{\lambda}$ оператора D такое, что

$$|\lambda - \tilde{\lambda}| = O(\epsilon^2).$$

В разделе 3.3 описано расположение спектра на комплексной плоскости в случае поверхности вращения. Спектр концентрируется в окрестности некоторого графа, гомеоморфного графу, представленному на рис.1; каждое ребро графа пересекается вертикальной прямой не более чем в одной точке. Кроме того, доказано следующее утверждение.

Теорема 7. *Если функция f является четной, то одно из ребер спектрального графа лежит на действительной оси.*

Наконец, в разделе 3.4 показано, что, в случае стандартной сферы, спектр может быть вычислен из условий квантования на римановой поверхности постоянной комплексной энергии. Именно, на поверхности, заданной в $\mathbb{C}^2$ уравнением $-(1-z^2)p^2 + imz = \lambda$ указаны три цикла $\gamma_j, \quad j = 1,2,3$, такие, что спектральные серии, описанные в теоремах 1 – 3, удовлетворяют уравнениям

$$\frac{1}{2\pi\epsilon}\int_{\gamma_j} pdz = n + \frac{\mu}{2},$$

где $\mu = 1, 2$ (в зависимости от цикла).

Благодарность

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю — доктору физико–математических наук, профессору А. И. Шафаревичу — за постановку задачи и постоянное внимание к работе. Автор благодарен всем сотрудникам кафедры дифференциальной геометрии и приложений механико–математического факультета МГУ за творческую атмосферу и доброжелательное отношение.

Список литературы

[1] Roohian H. *Semiclassical Asymptotics of the Spectrum of a Nonselfadjoint Operator on the Sphere* / H. Roohian, A. I. Shafarevich // *Russian Journal of mathematical Physics* — **16**, № 2. — 2009. p. 309–314.

[2] Roohian H. *Semiclassical Asymptotics behavior of the Spectrum of a Nonselfadjoint Elliptic Oprator on a Two-Dimentional Surface of Revolution* / H. Roohian, A. I. Shafarevich // *Russian Journal of mathematical Physics* — **17**, № 3. — 2010. p. 328–333.

[3] Хомаюн Рухиан, А.И. Шафаревич. *Асимптотика спектра несамосопряженного оператора на поверхности вращения.* Международная конференция “Современные проблемы анализа и преподавания математики”, посвященная 105-летию академика С.М. Никольского. Тезисы докладов. Москва, изд-во МГУ, 2010.

В работе [1] Х. Рухиану принадлежат теоремы 1 и 2; А. И. Шафаревичу принадлежат постановка задачи и предложение 1.

В работе [2] Х. Рухиану принадлежат теоремы 1 и 2; А. И. Шафаревичу принадлежат постановка задачи и предложения 1 – 2.

В работе [3] Х. Рухиану принадлежат теоремы 1 и 2; А. И. Шафаревичу принадлежат постановка задачи и результат об аналоге условий Маслова.