МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи
УДК 511

Рочев Игорь Петрович

ОБ АРИФМЕТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ ЗНАЧЕНИЙ НЕКОТОРЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва
2011

Работа выполнена на кафедре теории чисел Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научные руководители:	кандидат физико-математических наук, доцент Зудилин Вадим Валентинович
	доктор физико-математических наук, профессор Мощевитин Николай Германович
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Салихов Владислав Хасанович
	доктор физико-математических наук, профессор Сорокин Владимир Николаевич
Ведущая организация:	Московский педагогический государственный университет

Защита диссертации состоится 18 февраля 2011 г. в 16 ч. 45 м. на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 при Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: 119991, Российская Федерация, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, МГУ, д. 1, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 18 января 2011 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д.501.001.84 при МГУ,
доктор физико-математических наук,
профессор А. О. Иванов

Общая характеристика работы

Диссертация посвящена двум вопросам в теории трансцендентных чисел. Один из них связан с обобщением классической теоремы Пойа о целозначных целых функциях. Другой — с доказательством линейной независимости значений q-рядов определённого вида.

Актуальность темы

Для целой функции $f(z)$ будем обозначать через $|f|_R$ максимум $|f(z)|$ на круге $B_R = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant R\}$: $|f|_R = \max_{z \in B_R} |f(z)|$.

В 1915 году Пойа[1] доказал следующий результат.

Пусть $f(z)$ — целая трансцендентная функция. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. *Если $f(\mathbb{Z}_{\geqslant 0}) \subseteq \mathbb{Z}$, то*

$$\limsup_{R \to +\infty} \frac{R^{1/2}|f|_R}{2^R} > 0.$$

2. *Если $f(\mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{Z}$, то*

$$\limsup_{R \to +\infty} \frac{R^{3/2}|f|_R}{\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^R} > 0.$$

Как показывают примеры 2^z и $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^z - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^z\right)$, постоянные 2 и $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ в теореме Пойа нельзя улучшить.

Этот результат уточнялся и обобщался в работах Харди[2] (см. также работу Ландау[3]), Пойа[4], Карлсона[5], Ицуми[6], Сельберга[7], Пизо[8], Бака[9], Ро-

---

[1] G. Pólya, Über ganzwertige ganze Funktionen, *Rend. Circ. Mat. Palermo* **40**:1 (1915), 1–16.

[2] G. H. Hardy, On a theorem of Mr G. Pólya, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **19** (1917), 60–63.

[3] E. Landau, Note on Mr Hardy's extension of a theorem of Mr Pólya, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **20** (1920), 14–15.

[4] G. Pólya, Über ganze ganzwertige Funktionen, *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl.* (1920), 1–10.

[5] F. Carlson, Über ganzwertige Funktionen, *Math. Z.* **11**:1–2 (1921), 1–23.

[6] Sh. Izumi, Über die ganzwertige ganze Funktion, *Jpn. J. Math.* **5** (1928), 5–22.

[7] A. Selberg, Über ganzwertige ganze transzendente Funktionen. I, II, *Arch. Math. Naturvid.* **44** (1941), 45–52, 171–181.

[8] Ch. Pisot, Über ganzwertige ganze Funktionen, *Jahresber. Deutsch. Math.-Verein.* **52** (1942), 95–102.

Ch. Pisot, Sur les fonctions arithmétiques analytiques à croissance exponentielle, *C. R. Acad. Sci. Paris* **222** (1946), 988–990.

Ch. Pisot, Sur les fonctions analytiques arithmétiques et presque arithmétiques, *C. R. Acad. Sci. Paris* **222** (1946), 1027–1028.

[9] R. C. Buck, A class of entire functions, *Duke Math. J.* **13**:4 (1946), 541–559.

R. C. Buck, Integral valued entire functions, *Duke Math. J.* **15**:4 (1948), 879–891.

бинсона[10].

В литературе часто встречается более слабая формулировка теоремы Пойа: *если* $f(z)$ *— целая трансцендентная функция с* $f(\mathbb{Z}_{\geqslant 0}) \subseteq \mathbb{Z}$, *то*

$$\limsup_{R\to+\infty} \frac{\ln |f|_R}{R} \geqslant \ln 2.$$

В 1929 году Гельфонд[11] доказал следующее обобщение этой версии теоремы Пойа.

Пусть $f(z)$ *— целая трансцендентная функция такая, что для некоторого* $s \in \mathbb{Z}_{>0}$ *выполнено* $f^{(\sigma)}(\mathbb{Z}_{\geqslant 0}) \subseteq \mathbb{Z}$ *при* $\sigma = 0, 1, \ldots, s-1$. *Тогда*

$$\limsup_{R\to+\infty} \frac{\ln |f|_R}{R} \geqslant s \ln\left(1 + \mathrm{e}^{(1-s)/s}\right).$$

Результат Гельфонда улучшался в работах Сельберга[12], Бундшу и Зудилина[13], Вельтера[14]. В работе Бундшу и Зудилина также было доказано, что для любого $s \in \mathbb{Z}_{>0}$ существует трансцендентная целая функция $f(z)$ такая, что $f^{(\sigma)}(\mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{Z}$ при $\sigma = 0, 1, \ldots, s-1$ и при $R \geqslant 1$ выполнено

$$|f|_R \leqslant \exp\left(s\left(\frac{\pi R}{3} + \frac{\ln R}{2} + c\right)\right),$$

где c — некоторая абсолютная постоянная.

В 1978 году Вальдшмидт[15] доказал следующее утверждение.

Пусть $\Omega \subseteq \mathbb{Z}$, *причём*

$$\liminf_{R\to+\infty} \frac{\#(\Omega \cap B_R)}{R} = \omega > 0,$$

$\mathbb{K}$ *— конечное расширение* $\mathbb{Q}$ *степени* $\varkappa$, $\alpha \geqslant 0$. *Допустим, что* $f(z)$ *— трансцендентная целая функция такая, что* $f(\Omega) \subseteq \mathbb{K}$, *причём для* $a \in \Omega$ *выполнено*

$$\max\left\{\overline{|f(a)|}, d(f(a))\right\} = O(\mathrm{e}^{\alpha|a|}),$$

[10] R. M. Robinson, Integer-valued entire functions, *Trans. Amer. Math. Soc.* **153** (1971), 451–468.

[11] A. O. Gelfond, Sur un théorème de M. G. Pólya, *Atti Accad. Naz. Lincei* **10** (1929), 569–574.

[12] A. Selberg, Über einen Satz von A. Gelfond, *Arch. Math. Naturvid.* **44** (1941), 159–170.

[13] P. Bundschuh, W. Zudilin, On theorems of Gelfond and Selberg concerning integral-valued entire functions, *J. Approx. Theory* **130**:2 (2004), 162–176.

[14] M. Welter, Sur un théorème de Gel'fond–Selberg et une conjecture de Bundschuh–Shiokawa, *Acta Arith.* **116**:4 (2005), 363–385.

[15] M. Waldschmidt, Pólya's theorem by Schneider's method, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **31**:1–2 (1978), 21–25.

где $\lceil\overline{\xi}\rceil$ *— максимум модулей сопряжённых алгебраического числа* ξ, $d(\xi)$ *— наименьшее* $d \in \mathbb{Z}_{>0}$ *такое, что число* $d\xi$ *целое алгебраическое. Тогда*

$$\limsup_{R\to+\infty} \frac{\ln |f|_R}{R} \geqslant \gamma_0,$$

где γ_0 *— некоторая (эффективная) положительная постоянная, зависящая только от* $\omega, \varkappa, \alpha$.

В диссертации доказано обобщение теоремы Вальдшмидта, аналогичное обобщению Гельфонда теоремы Пойа.

Существует много работ об арифметических свойствах значений функций вида

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\prod_{k=1}^{n} P(q^k)}, \tag{1}$$

где $P(y)$ — непостоянный многочлен, а число $q \in \mathbb{C}$ с $|q| > 1$ таково, что $P(q^n) \neq 0$ при $n \in \mathbb{Z}_{>0}$.

В работах Бернштайна и Саса[16] и Саса[17] была доказана иррациональность значений функции $\Theta_q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} q^{-n^2} z^n$ для $q, z \in \mathbb{Q}^*$ при определённых ограничениях на q (а именно: если $q = q_1/q_2$, где $q_1, q_2 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $(q_1, q_2) = 1$, то отношение $\ln|q_2|/\ln|q_1|$ должно быть достаточно мало).

Обобщая метод Саса, Чакалов[18] доказал для функции

$$T_q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{q^{n(n+1)/2}},$$

соответствующей многочлену $P(y) = y$, линейную независимость над $\mathbb{Q}$ чисел $1, T_q(\alpha_1), \ldots, T_q(\alpha_m)$ при определённых ограничениях на $q \in \mathbb{Q}$, где $\alpha_j \in \mathbb{Q}^*$ удовлетворяют условиям $\alpha_j \alpha_k^{-1} \notin q^{\mathbb{Z}} = \{q^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ при $1 \leqslant j, k \leqslant m$, $j \neq k$. Функция $T_q(z)$ сегодня известна как функция (или ряд) Чакалова. Впоследствии Сколем[19] доказал аналогичное утверждение, содержащее также производные функции $T_q(z)$.

Количественные версии результатов Чакалова и Сколема (с оценками снизу для линейных форм от рассматриваемых чисел) были получены в

[16] F. Bernstein, O. Szász, Über Irrationalität unendlicher Kettenbrüche mit einer Anwendung auf die Reihe $\sum_0^\infty q^{\nu^2} x^\nu$, *Math. Ann.* **76**:2–3 (1915), 295–300.

[17] O. Szász, Über Irrationalität gewisser unendlicher Reihen, *Math. Ann.* **76**:4 (1915), 485–489.

[18] L. Tschakaloff, Arithmetische Eigenschaften der unendlichen Reihe $\sum_{\nu=0}^\infty x^\nu a^{-\frac{\nu(\nu-1)}{2}}$, *Math. Ann.* **80**:1 (1919), 62–74.

L. Tschakaloff, Arithmetische Eigenschaften der unendlichen Reihe $\sum_{\nu=0}^\infty x^\nu a^{-\frac{\nu(\nu-1)}{2}}$. (2. Abhandlung), *Math. Ann.* **84**:1–2 (1921), 100–114.

[19] Th. Skolem, Some theorems on irrationality and linear independence, *Den 11te Skandinaviske Matematikerkongress, Trondheim* (1949), 77–98.

работах Бундшу и Шиокавы[20] и Катсурады[21] соответственно; p-адический аналог последнего результата был доказан Ваананеном и Валлиссером[22].

Обобщение результата Бундшу–Шиокавы для функции (1) было получено Штилем[23], который доказал в количественной форме линейную независимость над мнимым квадратичным полем $\mathbb{K}$ чисел

$$1, f(\alpha_j q^k) \qquad (1 \leqslant j \leqslant m, 0 \leqslant k < \deg P(y))$$

при определённых ограничениях на $q \in \mathbb{K}$, где числа $\alpha_j \in \mathbb{K}^*$ удовлетворяют тем же условиям, что и выше, а многочлен $P(y) \in \mathbb{K}[y]$ раскладывается на линейные множители над $\mathbb{K}$, причём $P(0) = 0$.

Поскольку функция $f(z)$ удовлетворяет q-разностному уравнению

$$P(J)\big(f(z)\big) = P(1) + zf(z), \qquad Jf(z) := f(qz),$$

порядка $\deg P(y)$, этот результат является в некотором смысле наилучшим возможным с качественной точки зрения.

Катсурада[24] при тех же ограничениях, что у Штиля, доказал аналогичное утверждение, содержащее производные функции $f(z)$. Обобщение последнего результата для произвольного конечного расширения поля $\mathbb{Q}$, в том числе и в p-адическом случае, было получено в работе Санкилампи и Ваананена[25] (для функции Чакалова соответствующее обобщение чуть ранее доказали Коивула, Санкилампи и Ваананен[26]).

В случае, когда для многочлена $P(y)$ в (1) выполнено $P(0) \neq 0$, первый результат был получен Лотоцким[27], который рассматривал функцию

$$E_q(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{q^n}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\prod_{k=1}^{n}(q^k - 1)}$$

(последнее равенство следует из уравнения $E_q(qz) = (1+z)E_q(z)$), известную как q-экспоненциальная функция. Лотоцкий доказал, что если q — целое число

[20] P. Bundschuh, I. Shiokawa, A measure for the linear independence of certain numbers, *Results Math.* **7**:2 (1984), 130–144.

[21] M. Katsurada, Linear independence measures for certain numbers, *Results Math.* **14**:3–4 (1988), 318–329.

[22] K. Väänänen, R. Wallisser, Zu einem Satz von Skolem über lineare Unabhängigkeit von Werten gewisser Thetareihen, *Manuscripta Math.* **65**:2 (1989), 199–212.

[23] Th. Stihl, Arithmetische Eigenschaften spezieller Heinescher Reihen, *Math. Ann.* **268**:1 (1984), 21–41.

[24] M. Katsurada, Linear independence measures for values of Heine series, *Math. Ann.* **284**:3 (1989), 449–460.

[25] O. Sankilampi, K. Väänänen, On the values of Heine series at algebraic points, *Results Math.* **50**:1–2 (2007), 141–153.

[26] L. Koivula, O. Sankilampi, K. Väänänen, A linear independence measure for the values of Tschakaloff function and an application, *JP J. Algebra Number Theory Appl.* **6**:1 (2006), 85–101.

[27] A. V. Lototsky, Sur l'irrationnalité d'un produit infini, *Rec. Math. [Mat. Sbornik] N. S.* **12(54)**:2 (1943), 262–272.

мнимого квадратичного поля $\mathbb{K}$, $|q| > 1$, $\alpha \in \mathbb{K}^*$, $\alpha \notin -q^{\mathbb{Z}_{>0}}$, то $E_q(\alpha) \notin \mathbb{K}$. (В работе Лотоцкого предполагалось, что $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\mathrm{i})$, $q > 1$, однако рассуждения легко переносятся на общий случай[28].) Количественная версия этого результата была получена Бундшу[29].

В работах Безивана[30] был предложен новый метод для доказательства линейной независимости значений функций вида

$$\Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\prod_{k=1}^{n} A(k)},$$

где $A(n)$ — линейная рекуррентная последовательность. Результаты Безивана обобщались в работах Андре[31], Амоу и Ваананена[32].

В работах Дюверне[33] было доказано, что при $q \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \pm 1\}$ числа

$$T_{q^2}(q) = \sum_{n=0}^{\infty} q^{-n^2}, \qquad T_q(1) = \sum_{n=0}^{\infty} q^{-n(n+1)/2}$$

не являются квадратичными иррациональностями. Безиван[34], используя новый вариант своего метода, значительно обобщил этот результат; в частности, ему удалось доказать неквадратичность значений функций Чакалова $T_q(\alpha)$ при $q \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \pm 1\}$ (и даже при $q \in \mathbb{Q}$ с определёнными ограничениями) и $\alpha \in \mathbb{Q}^*$. Дальнейшие улучшения были получены в работах Шуле[35], Краттенталера, Рочева, Ваананена и Зудилина[36].

Стоит отметить, что все упомянутые результаты, полученные с использованием того или иного варианта метода Безивана, являются качественными;

---

[28] Н. И. Фельдман, *Седьмая проблема Гильберта*, изд-во МГУ, М., 1982, § 3.3.

[29] P. Bundschuh, Arithmetische Untersuchungen unendlicher Produkte, *Invent. Math.* **6**:4 (1969), 275–295.

[30] J.-P. Bézivin, Indépendance linéaire des valeurs des solutions transcendantes de certaines équations fonctionnelles, *Manuscripta Math.* **61**:1 (1988), 103–129.

J.-P. Bézivin, Indépendance linéaire des valeurs des solutions transcendantes de certaines équations fonctionnelles II, *Acta Arith.* **55**:3 (1990), 233–240.

[31] Y. André, Séries Gevrey de type arithmétique, II. Transcendance sans transcendance, *Ann. of Math. (2)* **151**:2 (2000), 741–756.

[32] M. Amou, K. Väänänen, Linear independence of the values of q-hypergeometric series and related functions, *Ramanujan J.* **9**:3 (2005), 317–339.

[33] D. Duverney, Propriétés arithmétiques d'une série liée aux fonctions thêta, *Acta Arith.* **64**:2 (1993), 175–188.

D. Duverney, Sommes de deux carrés et irrationalité de valeurs de fonctions thêta, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **320**:9 (1995), 1041–1044.

[34] J.-P. Bézivin, Sur les propriétés arithmétiques d'une fonction entière, *Math. Nachr.* **190**:1 (1998), 31–42.

[35] R. Choulet, Des résultats d'irrationalité pour deux fonctions particulières, *Collect. Math.* **52**:1 (2001), 1–20.

[36] Ch. Krattenthaler, I. Rochev, K. Väänänen, W. Zudilin, On the non-quadraticity of values of the q-exponential function and related q-series, *Acta Arith.* **136**:3 (2009), 243–269.

получить количественный вариант метода долгое время не удавалось. Множество работ различных авторов посвящено доказательству количественных результатов в разных частных случаях с помощью совершенно других методов; помимо указанных выше работ стоит упомянуть работы Ваананена[37], Ваананена и Зудилина[38].

В диссертации с помощью количественного варианта метода Безивана, разработанного автором, доказаны оценки снизу для линейных форм от значений функций вида (1) (а также функций чуть более общего вида) и их производных.

Цель работы

Целью настоящей диссертации является изучение аналитических свойств целых функций с определёнными арифметическими ограничениями для их значений, а также получение оценок меры линейной независимости значений q-рядов достаточно общего вида.

Научная новизна

Основные результаты диссертации являются новыми и заключаются в следующем:

1. Получено новое обобщение теоремы Пойа о целозначных целых функциях.

2. Доказана линейная независимость значений q-рядов достаточно общего вида в количественной форме, причем оценка меры линейной независимости в настолько общей ситуации получена впервые.

Методы исследования

В диссертации используются методы теории функций действительного и комплексного переменного и теории трансцендентных чисел.

Теоретическая и практическая ценность

Диссертация имеет теоретический характер. Результаты диссертации могут найти применение при изучении задач, связанных с оценками мер линейной независимости значений специальных функций.

[37] K. Väänänen, On linear independence of the values of generalized Heine series, *Math. Ann.* **325**:1 (2003), 123–136.

[38] K. Väänänen, W. Zudilin, Baker-type estimates for linear forms in the values of q-series, *Canad. Math. Bull.* **48**:1 (2005), 147–160.

Апробация работы

Результаты диссертации докладывались на следующих научных семинарах и конференциях:

1. Научно-исследовательский семинар по теории чисел под руководством чл.-корр. РАН Ю. В. Нестеренко, проф. Н. Г. Мощевитина.
2. Семинар “Арифметика и геометрия” под руководством проф. Н. Г. Мощевитина, доц. А. М. Райгородского, асс. О. Н. Германа.
3. Семинар “Аналитическая теория чисел” под руководством проф. А. А. Карацубы.
4. Семинар по теории чисел Института прикладной математики ДВО РАН (г. Хабаровск) под руководством чл.-корр. РАН В. А. Быковского, д. ф.-м. н. А. В. Устинова.
5. Международная конференция “Диофантовы и аналитические проблемы теории чисел”, посвященная 100-летию А. О. Гельфонда (Россия, г. Москва, МГУ им. М. В. Ломоносова, 29 января – 2 февраля 2007 г.).

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в трех работах автора, список которых приведен в конце автореферата [1–3].

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, двух глав и списка литературы. Полный объем диссертации — 119 страниц. Список литературы включает 69 наименований.

Краткое содержание работы

Во **введении** изложена краткая история исследуемых вопросов и сформулированы основные результаты диссертации.

В **первой главе** доказаны оценки для минимальной скорости роста трансцендентной целой функции при определённых ограничениях арифметического характера на её значения и значения её производных.

При $R \geqslant 0$ положим $B_R = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant R\}$. Для целой функции $f(z)$ определим $|f|_R = \max_{z \in B_R} |f(z)|$. Далее, для $\Omega \subseteq \mathbb{Z}$ будем обозначать $\Omega_R = \Omega \cap B_R$, $\Omega(R) = \#\Omega_R$.

Пусть $\Omega \subseteq \mathbb{Z}$, причём

$$\omega := \liminf_{R\to+\infty} \frac{\Omega(R)}{R} > 0,$$

$s \in \mathbb{Z}_{>0}$, $\alpha \in [0, +\infty)$, $\mathbb{K}$ — конечное расширение $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$ — кольцо целых чисел поля $\mathbb{K}$. Положим

$$\varkappa = \begin{cases} [\mathbb{K} : \mathbb{Q}], & \mathbb{K} \subseteq \mathbb{R}, \\ \frac{1}{2}[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] & \text{иначе.} \end{cases}$$

Обозначим через $\gamma_s(\Omega; \mathbb{K}; \alpha)$ точную нижнюю грань чисел $\gamma > 0$, для которых существует целая трансцендентная функция $f(z)$ со следующими свойствами.

1. При $a \in \Omega$ найдутся числа $d_a \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}} \setminus \{0\}$, удовлетворяющие условиям:

   а. $d_a f^{(\sigma)}(a) \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$ при $0 \leqslant \sigma \leqslant s-1$,

   б. $\overline{|d_a|} = O(\mathrm{e}^{\alpha|a|})$,

   в. если $\varkappa > 1$, то

$$\max_{0\leqslant\sigma\leqslant s-1} \overline{\left|d_a f^{(\sigma)}(a)\right|} = O(\mathrm{e}^{\alpha|a|}).$$

2. $f(z) = O(\mathrm{e}^{\gamma|z|})$.

Первые два основных результата главы 1 содержат оценки снизу для величины $\gamma_s(\Omega; \mathbb{K}; \alpha)$.

Теорема 1. *Для любых* $s, \Omega, \mathbb{K}, \alpha$ *справедливо неравенство*

$$\gamma_s(\Omega; \mathbb{K}; \alpha) \geqslant \max_{r\in\{1,2,\dots,s\}} (s+1-r)\omega^{1+\varkappa/r} \times \\ \times \exp\left(-\frac{(r+1)\varkappa\alpha}{(s+1-r)r\omega} - \frac{\varkappa \ln 15(r+2)}{r} - 3\right).$$

Более того,

$$\liminf_{s\to\infty} \frac{\gamma_s(\Omega; \mathbb{K}; \alpha)}{\omega s} \geqslant \max_{\theta>1} \frac{\ln\bigl((\theta^2+1)/(2\theta)\bigr)}{\theta} = 0.1912\dots.$$

В случае, когда $\varkappa = 1$ (то есть $\mathbb{K}$ — мнимое квадратичное поле или $\mathbb{Q}$), $\alpha = 0$, будем вместо $\gamma_s(\Omega; \mathbb{K}; 0)$ писать $\gamma_s(\Omega)$.

Теорема 2. *При произвольном* s *и* $\omega \leqslant 0.01$ *справедливо неравенство*

$$\gamma_s(\Omega) \geqslant 0.01 s\omega\bigl(\ln(1/\omega)\bigr)^{-1}.$$

Третий основной результат первой главы посвящён оценкам сверху для величины $\gamma_s(\Omega;\mathbb{Q};\alpha)$.

Теорема 3. *Пусть множество $\Omega \subseteq \mathbb{Z}$ таково, что существует предел*

$$\lim_{R\to\infty}\frac{\Omega(R)}{R}=\omega>0.$$

Тогда для любых $s\in\mathbb{Z}_{>0}$ и $\alpha\geqslant 0$ справедливо неравенство

$$\gamma_s(\Omega;\mathbb{Q};\alpha)\leqslant\begin{cases}\omega s\ln 4-\alpha, & \alpha\leqslant\omega s\ln 2,\\ -\omega s\ln\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{\omega s}}\right), & \alpha\geqslant\omega s\ln 2.\end{cases}$$

Более того, если существуют равные пределы

$$\lim_{R\to\infty}\frac{\Omega^{\pm}(R)}{R}=\omega/2,$$

где обозначено $\Omega^+=\Omega\cap\mathbb{Z}_{>0}$, $\Omega^-=\Omega\cap\mathbb{Z}_{<0}$, то при любых $s\in\mathbb{Z}_{>0}$ и $\alpha\geqslant 0$ имеем

$$\gamma_s(\Omega;\mathbb{Q};\alpha)\leqslant\omega s\arcsin\left(\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{\omega s}}/2\right).$$

Вторая глава посвящена доказательству линейной независимости значений функций определённого вида.

Пусть $\mathbb{K}$ — конечное расширение поля $\mathbb{Q}$ степени $\varkappa=[\mathbb{K}:\mathbb{Q}]$, $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}$ — множество всех нетривиальных нормирований поля $\mathbb{K}$. Для $v\in\mathcal{M}_{\mathbb{K}}$ нормируем абсолютное значение $|\cdot|_v$ следующим образом:

1. $|p|_v=p^{-1}$, если $v|p$;

2. $|x|_v=|x|$ при $x\in\mathbb{Q}$ (где $|x|$ означает модуль числа x), если $v|\infty$.

Тогда для любого $\alpha\in\mathbb{K}^*$ имеет место формула произведения

$$\prod_{v\in\mathcal{M}_{\mathbb{K}}}|\alpha|_v^{\varkappa_v}=1,$$

где $\varkappa_v=[\mathbb{K}_v:\mathbb{Q}_v]$ — соответствующие локальные степени.

Для $\alpha\in\mathbb{K}$ будем обозначать через $H(\alpha)$ абсолютную (мультипликативную) высоту числа α,

$$H(\alpha)=\prod_{v\in\mathcal{M}_{\mathbb{K}}}\max\{|\alpha|_v^{\varkappa_v/\varkappa},1\}.$$

Далее, для произвольного вектора $\vec{\alpha} = (\alpha_0, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^{1+n}$ будем обозначать

$$|\vec{\alpha}|_v = \max\{|\alpha_0|_v, \ldots, |\alpha_n|_v\} \qquad (v \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}),$$
$$H(\vec{\alpha}) = \prod_{v \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}} |\vec{\alpha}|_v^{\varkappa_v/\varkappa}$$

(в частности, $H((1, \alpha)) = H(\alpha)$).

Пусть $q \in \mathbb{K}$ и $w \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}$ таковы, что $|q|_w > 1$. Положим

$$\lambda = \frac{\varkappa \ln H(q)}{\varkappa_w \ln |q|_w}. \tag{2}$$

Заметим, что $\lambda \geqslant 1$, причём $\lambda = 1$ тогда и только тогда, когда для всех $v \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}} \setminus \{w\}$ выполняется неравенство $|q|_v \leqslant 1$.

Пусть многочлены $P(x, y) \in \mathbb{K}[x, y]$ и $Q(x) \in \mathbb{K}[x]$ удовлетворяют условиям $d := \deg_y P \geqslant 1$ и $P(n, q^n)Q(n) \neq 0$ при $n = 1, 2, 3, \ldots$. Рассмотрим целую функцию

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\prod_{k=1}^{n} P(k, q^k)/Q(k)}, \qquad z \in \mathbb{C}_w,$$

где $\mathbb{C}_w$ — пополнение алгебраического замыкания $\mathbb{K}_w$. Важный частный случай — q-экспоненциальная функция

$$E_q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\prod_{k=1}^{n}(q^k - 1)} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{q^n}\right). \tag{3}$$

Наконец, введём обозначение

$$Z(a, b) = \pi^{-2} \sum_{n \geqslant 0} \lfloor an + b \rfloor^{-2}; \tag{4}$$

в частности, если $a, b \in \mathbb{Z}_{>0}$, то $Z(a, b) = (a\pi)^{-2}\zeta(2, b/a)$, где $\zeta(s, a) = \sum_{n \geqslant 0}(n + a)^{-s}$ — дзета-функция Гурвица.

В первом основном результате второй главы рассматривается случай, когда $\deg_x P(x, y) = \deg Q(x) = 0$.

Теорема 4. *Допустим, что многочлены $P(x, y) = P(y)$ и $Q(x) = 1$ не зависят от x. Пусть числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{K}^*$ удовлетворяют следующим двум условиям:*

(i) $\alpha_j \alpha_k^{-1} \notin q^{\mathbb{Z}}$ *при* $1 \leqslant j, k \leqslant m$, $j \neq k$,

(ii) $\alpha_j \notin P(0) q^{\mathbb{Z}_{>0}}$ *при* $1 \leqslant j \leqslant m$.

Пусть $s_1,\dots,s_m\in\mathbb{Z}_{>0}$. *Положим* $s=\sum_{j=1}^m s_j$,

$$\alpha=\begin{cases}\frac{2s+1/d}{6s^2}, & \text{если } P(y)=py^d,\ p\in\mathbb{K}^*,\\ \frac{1}{3s} & \text{иначе,}\end{cases}$$
$$\beta=\begin{cases}\frac{1}{3(s+1)}, & \text{если } P(0)\neq 0,\\ \frac{2s+3/\delta_0}{6(s+1/\delta_0)^2}, & \text{если } \delta_0:=\operatorname{ord}_{y=0}P(y)>0.\end{cases}$$

Далее, если $P(1)\neq 0$, *то обозначим*

$$\gamma=\beta+\begin{cases}\frac{5}{32}-\frac{289}{900\pi^2}-Z(4,1) & \text{при } m=2,\ s_1=s_2=2,\\ Z(m+2,s+1)+Z(m+2,s+2) & \text{иначе;}\end{cases}$$

если же $\delta_1:=\operatorname{ord}_{y=1}P(y)>0$, *то положим*

$$\gamma=\beta+\begin{cases}\frac{1}{6}-\frac{41}{36\pi^2} & \text{при } \delta_1=1,\ m=1,\ s_1=2,\\ 2Z(m+1/\delta_1,s+1) & \text{иначе.}\end{cases}$$

($Z(a,b)$ *определено в* (4).*) Тогда если выполнено*

$$\lambda\leqslant\lambda_0<\frac{2d/3+\alpha}{2d/3-\gamma},$$

где λ *определено в* (2), *то числа*

$$1, f^{(\sigma)}(\alpha_j q^k)\qquad(1\leqslant j\leqslant m, 0\leqslant k<d, 0\leqslant\sigma<s_j)$$

линейно независимы над $\mathbb{K}$. *Более того, для любого* $\varepsilon>0$ *существует (эффективная) постоянная* $H_0=H_0(P,q,\lambda_0,m,\alpha_j,s_j,\varepsilon)>0$ *такая, что для любого вектора* $\vec{\eta}=(\eta_0,\eta_{j,k,\sigma})\in\mathbb{K}^{1+ds}\setminus\{\vec{0}\}$ *выполнено*

$$\left|\eta_0+\sum_{j=1}^m\sum_{k=0}^{d-1}\sum_{\sigma=0}^{s_j-1}\eta_{j,k,\sigma}f^{(\sigma)}(\alpha_j q^k)\right|_w\geqslant|\vec{\eta}|_w\exp\Big(-(C_0+\varepsilon)(\ln H)^{3/2}\Big),$$

где $H=\max\{H(\vec{\eta}),H_0\}$,

$$C_0=\frac{d\lambda^{3/2}\big(2d/3+\alpha+(d^2-1)(2d/3-\gamma)\lambda\big)\ln|q|_w}{\Big(\big(2d/3+\alpha-(2d/3-\gamma)\lambda\big)\ln H(q)\Big)^{3/2}}.$$

Для q-экспоненциальной функции (3) получаем следующее следствие.

Следствие 2.1. *Пусть* $q=\rho/\sigma\in\mathbb{Q}$, *где* $\rho,\sigma\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$, $(\rho,\sigma)=1$, $|\rho|>|\sigma|$, $\alpha\in\mathbb{Q}^*$, $\alpha\notin -q^{\mathbb{Z}_{>0}}$. *Обозначим* $\gamma=\ln|\sigma|/\ln|\rho|$. *Тогда если* $\gamma<7/12$, *то число* $E_q(\alpha)$ *иррационально. Более того, для любого* $\varepsilon>0$ *существует положительная постоянная* $S_0=S_0(q,\alpha,\varepsilon)$ *такая, что для любого рационального числа* r/s *(где* $r\in\mathbb{Z}$, $s\in\mathbb{Z}_{>0}$*) справедливо неравенство*

$$|E_q(\alpha)-r/s|\geqslant\exp\left(-(C_1+\varepsilon)(\ln S)^{3/2}\right),$$

где $S=\max\{s,S_0\}$,

$$C_1=\frac{24\sqrt{3}\,(1-\gamma)}{(7-12\gamma)^{3/2}(\ln|\rho|)^{1/2}}.$$

Кроме того, если $\gamma<1/6$, *то* $E_q(\alpha)$ *не является квадратичной иррациональностью и для любого* $\varepsilon>0$ *существует положительная постоянная* $L_0=L_0(q,\alpha,\varepsilon)$ *такая, что для любого многочлена* $A(z)\in\mathbb{Z}[z]$ *второй степени справедливо неравенство*

$$\bigl|A\bigl(E_q(\alpha)\bigr)\bigr|\geqslant\exp\left(-(C_2+\varepsilon)(\ln L)^{3/2}\right),$$

где $L=\max\{L(A),L_0\}$, $L(A)$ *— длина многочлена* A *(сумма модулей коэффициентов),*

$$C_2=\frac{6\sqrt{6}\,(1-\gamma)}{(1-6\gamma)^{3/2}(\ln|\rho|)^{1/2}}.$$

В качестве ещё одного следствия теоремы 4 для $E_q(z)$ получаем следующий результат для так называемого q-логарифма

$$L_q(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z}{q^n-z}=z\frac{E_q'(-z)}{E_q(-z)}.$$

Следствие 2.2. *Допустим, что*

$$\lambda\leqslant\lambda_0<\frac{30\pi^2}{14\pi^2+41}=1.6525\ldots,$$

где λ *определено в* (2). *Тогда при любом* $\alpha\in\mathbb{K}^*$, $\alpha\notin q^{\mathbb{Z}_{>0}}$, *имеем* $L_q(\alpha)\notin\mathbb{K}$. *Более того, для любого* $\varepsilon>0$ *существует положительная постоянная* $H_0=H_0(q,\lambda_0,\alpha,\varepsilon)$ *такая, что для любого числа* $\theta\in\mathbb{K}$ *справедливо неравенство*

$$|L_q(\alpha)-\theta|_w\geqslant\exp\left(-(C_0+\varepsilon)(\ln H)^{3/2}\right),$$

где $H=\max\{H(\theta),H_0\}$,

$$C_0=\frac{180\pi^3\lambda^{3/2}\ln|q|_w}{\bigl(\bigl(30\pi^2-(14\pi^2+41)\lambda\bigr)\ln H(q)\bigr)^{3/2}}.$$

Следствие 2.2 даёт следующий результат для определённых рядов с линейными рекуррентными последовательностями.

Следствие 2.3. *Пусть* $r, s \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ *таковы, что* $D := r^2 + 4s > 0$. *Пусть последовательность* u_n *является решением рекуррентного соотношения*

$$u_{n+2} = ru_{n+1} + su_n$$

с начальными условиями $u_0 = 0$, $u_1 = u \in \mathbb{Q}\big(\sqrt{D}\,\big)^*$. *Положим*

$$d = \begin{cases} (r^2, s), & \text{если } \sqrt{D} \notin \mathbb{Z}, \\ \left(\frac{(|r|+\sqrt{D}\,)^2}{4}, s\right), & \text{если } \sqrt{D} \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

(здесь (a, b) *— наибольший общий делитель чисел* $a, b \in \mathbb{Z}$*). Если для* $r' := |r|/\sqrt{d}$, $s' := s/d$ *выполнено неравенство*

$$r' > |s'|^a - s'/|s'|^a, \qquad \text{где} \quad a = \frac{15\pi^2}{16\pi^2 - 41} = 1.2662\ldots,$$

то при любых $k \in \mathbb{Z}_{>0}$, $b \in \mathbb{Q}\big(\sqrt{D}\,\big)^*$, $|b| < \big((|r| + \sqrt{D}\,)/2\big)^k$, *имеем*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b^n}{u_{kn}} \notin \mathbb{Q}\big(\sqrt{D}\,\big).$$

Более того, для любого $\varepsilon > 0$ *существуют положительные постоянные* $C_0 = C_0(r, s)$ *и* $H_0 = H_0(r, s, k, u, b, \varepsilon)$ *такие, что для любого числа* $\theta \in \mathbb{Q}\big(\sqrt{D}\,\big)$ *справедливо неравенство*

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b^n}{u_{kn}} - \theta \right| \geqslant \exp\left(-(C_0 k^{-1/2} + \varepsilon)(\ln H)^{3/2} \right),$$

где $H = \max\{H(\theta), H_0\}$.

Предположим теперь, что $\max\{\deg_x P(x, y), \deg Q(x)\} > 0$. Пусть

$$P(x, y) = \sum_{\nu=0}^{d} p_\nu(x) y^\nu.$$

Введём обозначения $h = \deg Q(x)$,

$$g_1 = \max\left\{\max_{1\leqslant\nu\leqslant d} \frac{\deg p_{d-\nu}(x)}{\nu}, \frac{h}{d}\right\},$$

$$g_2 = \max_{1\leqslant\nu\leqslant d} \frac{\deg p_\nu(x)}{\nu},$$

$$\varepsilon_0 = \begin{cases} 0, & \text{если } p_0(x) = 0, \\ 1, & \text{если } p_0(x) \neq 0, \end{cases}$$

$$\mathfrak{D} = d + \max\{h, \deg p_0(x)\} + \sum_{\nu=1}^{d} \deg p_\nu(x)$$

(степень нулевого многочлена считаем равной 0).

Теорема 5. *Допустим, что* $\lambda = 1$*, где* λ *определено в* (2)*, и многочлены* $P(x, y)$ *и* $Q(x)$ *удовлетворяют (по крайней мере) одному из следующих двух условий:*

(а) $p_d(x)$ *не зависит от* x*,*

(б) $Q(x)$ *и* $p_0(x)$ *не зависят от* x*.*

Пусть $m \in \mathbb{Z}_{>0}$*,* $d_0 \in \mathbb{Z}_{\geqslant d}$ *и числа* $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{K}^*$ *и* $s_{j,k} \in \mathbb{Z}_{>0}$ $(1 \leqslant j \leqslant m$*,* $0 \leqslant k < d_0)$ *удовлетворяют следующим трём условиям:*

(i) $\alpha_j \alpha_k^{-1} \notin q^{\mathbb{Z}}$ *при* $1 \leqslant j, k \leqslant m$*,* $j \neq k$*,*

(ii) *при* $1 \leqslant j \leqslant m$ *и* $d \leqslant k < d_0$ *выполнено неравенство* $s_{j,k} \leqslant \deg p_d(x)$*,*

(iii) *если* $\deg p_0(x) = \deg Q(x)$*, то* $\alpha_j \notin (a/b)q^{\mathbb{Z}_{>0}}$ *при* $1 \leqslant j \leqslant m$*, где* a *и* b *— старшие коэффициенты многочленов* $p_0(x)$ *и* $Q(x)$ *соответственно.*

Тогда числа

$$1, f^{(\sigma)}(\alpha_j q^k) \qquad (1 \leqslant j \leqslant m, 0 \leqslant k < d_0, 0 \leqslant \sigma < s_{j,k})$$

линейно независимы над $\mathbb{K}$*. Более того, если обозначить*

$$\mathfrak{c}_1 = \begin{cases} \frac{8}{15}\sqrt{\frac{2}{mg_1}}, & \textit{если } p_d(x) \textit{ не зависит от } x, \\ 0 & \textit{иначе}, \end{cases}$$

$$\mathfrak{c}_2 = \begin{cases} \frac{8}{15}\sqrt{\frac{2}{(m+\varepsilon_0)g_2}}, & \textit{если } p_0(x) \textit{ и } Q(x) \textit{ не зависят от } x, \\ 0 & \textit{иначе}, \end{cases}$$

$$C_0 = \frac{2d\mathfrak{D}^3 \ln |q|_w}{3\big((\mathfrak{c}_1 + \mathfrak{c}_2)\ln H(q)\big)^2},$$

то для любого $\varepsilon > 0$ существует (эффективная) положительная постоянная $H_0 = H_0(P, Q, q, m, d_0, \alpha_j, s_{j,k}, \varepsilon)$ такая, что для произвольного вектора $\vec{\eta} = (\eta_0, \eta_{j,k,\sigma}) \in \mathbb{K}^{1+\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=0}^{d_0-1} s_{j,k}} \setminus \{\vec{0}\}$ выполнено

$$\left|\eta_0 + \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=0}^{d_0-1}\sum_{\sigma=0}^{s_{j,k}-1} \eta_{j,k,\sigma} f^{(\sigma)}(\alpha_j q^k)\right|_w \geqslant |\vec{\eta}|_w \exp\left(-(C_0+\varepsilon)(\ln H)^2\right),$$

где $H = \max\{H(\vec{\eta}), H_0\}$.

В частности, для функции

$$H_q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n! q^{n(n+1)/2}}$$

получаем следующий результат.

Следствие 2.4. *Пусть q — целое число мнимого квадратичного поля $\mathbb{K}$, $|q| > 1$, $s_0 \in \mathbb{Z}_{>0}$ и числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{K}^*$ удовлетворяют условию*

$$\alpha_j \alpha_k^{-1} \notin q^{\mathbb{Z}} \qquad \text{при} \quad 1 \leqslant j, k \leqslant m,\ j \neq k.$$

Тогда числа

$$1, H_q^{(\sigma)}(\alpha_j) \qquad (1 \leqslant j \leqslant m, 0 \leqslant \sigma < s_0)$$

линейно независимы над $\mathbb{K}$. Более того, для любого $\varepsilon > 0$ существует постоянная $H_0 = H_0(q, m, \alpha_j, s_0, \varepsilon) > 0$ такая, что для любого вектора $\vec{\eta} = (\eta_0, \eta_{j,\sigma}) \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}^{1+s_0 m} \setminus \{\vec{0}\}$ выполнено

$$\left|\eta_0 + \sum_{j=1}^{m}\sum_{\sigma=0}^{s_0-1} \eta_{j,\sigma} H_q^{(\sigma)}(\alpha_j)\right| \geqslant \exp\left(-(C_0+\varepsilon)(\ln H)^2\right),$$

где $H = \max\{H(\vec{\eta}), H_0\}$, $C_0 = \dfrac{75m}{8\ln|q|}$.

В последней теореме второй главы рассматривается целая функция

$$h_q(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{q^n}\right)\left(1 + \frac{z}{q^n} + \frac{1}{q^{2n}}\right), \qquad z \in \mathbb{C}_w.$$

Теорема 6. *Пусть $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{K}$ — различные числа, удовлетворяющие следующим двум условиям:*

(i) *$a_j \neq \pm 2$ при $1 \leqslant j \leqslant m$,*

(ii) *$q^n(a_jq^n - a_k)(a_kq^n - a_j) \neq (q^{2n}-1)^2$ при $1 \leqslant j,k \leqslant m$ и $n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$.*

Пусть $s_1,\dots,s_m \in \mathbb{Z}_{>0}$. Положим $s = \sum_{j=1}^m s_j$, $\alpha = \dfrac{4s+1}{24s^2}$,

$$\gamma = \begin{cases} \frac{551}{2400} - \frac{289}{900\pi^2} - Z(4,1) & \text{при } m=1,\ s_1=2, \\ \frac{4s+3}{6(2s+1)^2} + Z(2m+2,2s+1) + Z(2m+2,2s+2) & \text{иначе,} \end{cases}$$

где $Z(a,b)$ определено в (4). Тогда если выполнено

$$\lambda \leqslant \lambda_0 < \frac{2/3+\alpha}{2/3-\gamma},$$

где λ определено в (2), то числа

$$1, h_q^{(\sigma)}(a_j) \qquad (1 \leqslant j \leqslant m, 0 \leqslant \sigma < s_j)$$

линейно независимы над $\mathbb{K}$. Более того, для любого $\varepsilon > 0$ существует (эффективная) постоянная $H_0 = H_0(q,\lambda_0,m,a_j,s_j,\varepsilon) > 0$ такая, что для любого вектора $\vec{\eta} = (\eta_0, \eta_{j,\sigma}) \in \mathbb{K}^{1+s}\setminus\{\vec{0}\}$ выполнено

$$\left|\eta_0 + \sum_{j=1}^m \sum_{\sigma=0}^{s_j-1} \eta_{j,\sigma} h_q^{(\sigma)}(a_j)\right|_w \geqslant |\vec{\eta}|_w \exp\left(-(C_0+\varepsilon)(\ln H)^{3/2}\right),$$

где $H = \max\{H(\vec{\eta}), H_0\}$,

$$C_0 = \frac{(2/3+\alpha)\lambda^{3/2}\ln|q|_w}{\big(\big(2/3+\alpha-(2/3-\gamma)\lambda\big)\ln H(q)\big)^{3/2}}.$$

В частности, для мероморфной функции

$$S_q(z) = \frac{h_q'(z)}{h_q(z)} = \sum_{n=1}^\infty \frac{q^n}{q^{2n}+q^nz+1}$$

получаем следующий результат.

Следствие 2.5. *Допустим, что выполнено неравенство*

$$\lambda \leqslant \lambda_0 < \frac{5475\pi^2}{3147\pi^2 + 2312 + 7200\pi^2 Z(4,1)} = 1.3144\dots,$$

где λ определено в (2). Тогда для любого $a \in \mathbb{K}$ такого, что при всех целых n выполнено
$$q^n a^2 \neq (q^n + 1)^2,$$
имеем $S_q(a) \notin \mathbb{K}$. Более того, для любого $\varepsilon > 0$ существует положительная постоянная $H_0 = H_0(q, \lambda_0, a, \varepsilon)$ такая, что для любого числа $\theta \in \mathbb{K}$ справедливо неравенство

$$|S_q(a) - \theta|_w \geqslant \exp\left(-(C_0 + \varepsilon)(\ln H)^{3/2}\right),$$

где $H = \max\{H(\theta), H_0\}$,

$$C_0 = \frac{1314(50\pi^2\lambda)^{3/2} \ln |q|_w}{\left(\left(5475\pi^2 - (3147\pi^2 + 2312 + 7200\pi^2 Z(4,1))\lambda\right) \ln H(q)\right)^{3/2}}.$$

Автор выражает благодарность своим научным руководителям к. ф.-м. н., доц. В. В. Зудилину и д. ф.-м. н., проф. Н. Г. Мощевитину за постановки задач и помощь в подготовке диссертации, а также коллективу кафедры теории чисел во главе с чл.-корр. РАН, проф. Ю. В. Нестеренко за создание творческой атмосферы.

Список публикаций по теме диссертации

[1] И. П. Рочев, Об одном обобщении теоремы Полиа, *Матем. заметки* **81**:2 (2007), 280–293.

[2] Ch. Krattenthaler, I. Rochev, K. Väänänen, W. Zudilin, On the non-quadraticity of values of the q-exponential function and related q-series, *Acta Arith.* **136**:3 (2009), 243–269. (И. Рочеву принадлежат доказательства лемм 1–3 и предложений 1–4.)

[3] И. П. Рочев, О линейной независимости значений некоторых q-рядов, *Изв. РАН. Сер. матем.* **75**:1 (2011), 181–224.