Московский государственный университет
имени М.В.Ломоносова
Механико-математический факультет

На правах рукописи

Подколзина Мария Александровна

О ПОЛНОТЕ И А-ПОЛНОТЕ S-МНОЖЕСТВ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ ФУНКЦИЙ

01.01.09 — дискретная математика и математическая кибернетика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва - 2011

Работа выполнена на кафедре Математической теории интеллектуальных систем Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова

Научный руководитель:	доктор физ.-мат. наук, профессор Буевич Вячеслав Александрович;
Официальные оппоненты:	доктор физ.-мат. наук, профессор Угольников Александр Борисович; кандидат физ.-мат. наук, доцент Карташов Сергей Иванович
Ведущая организация:	Вычислительный центр имени А.А.Дородницына РАН

Защита диссертации состоится 18 февраля 2011 г., в 16ч. 45 м. на заседании диссертационного совета Д 501.001.84 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д.1, МГУ, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж)

Автореферат разослан 18 января 2011 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 501.001.84
доктор физико-математических наук,
профессор А.О. Иванов

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Одной из важных проблем, рассматриваемых в дискретной математике и математической кибернетике, является проблема полноты для разных функциональных систем. Функциональная система представляет собой множество функций и множество операций над этими функциями. Проблема полноты для функциональных систем состоит в описании всех таких подмножеств функций, используя которые с помощью операций функциональной системы можно выразить все принадлежащие функциональной системе функции.

Центральное место среди функциональных систем принадлежит итеративным функциональным системам, представляющим собой множество дискретных функций с операциями итерации — суперпозиции, обратной связи, а также их модификациями.[1,2]

Итеративные функциональные системы могут быть разделены на два типа: истинностные функциональные системы и последовательностные функциональные системы. В первом случае функции, принадлежащие функциональной системе, вычисляются без использования, а во втором — с использованием "памяти".

Среди всех истинностных функциональных систем центральное место занимает функциональная система P_k, состоящая из функций k-значной логики и операций суперпозиции над ними.

Развитие теории итеративных функциональных систем шло по пути изучения конкретных моделей функциональных систем. В 1921 году Е. Постом была полностью описана структура замкнутых классов в двузначной логике. В 1954 году С.В. Яблонским[3] была решена проблема полноты в трехзначной логике. После появления этой работы С.В. Яблонского усилия многих авторов были сосредоточены на решении проблемы полноты в произвольных k-значных логиках.

Это объясняется прежде всего тем, что, во-первых, в большинстве реальных моделей истинностных функциональных систем функции, как правило, конечнозначны и, во-вторых, любая функция в каждой истинностной функциональной системе аппроксимируется функциями k-значных логик путем увеличения числа k. Критерий полноты в P_k может быть сформулирован с использованием понятия предполного класса.

В уже упоминавшихся работах Е. Поста[4] и С.В.Яблонского решение задач о полноте в двузначной и трехзначной логиках как раз и было

[1] Кудрявцев В.Б. *Функциональные системы.* Москва., Издательство МГУ, 1982

[2] Мальцев А.И. *Итеративные алгебры Поста.*Новосибирск, Изд-во СО АНСССР, 1976

[3] Яблонский С.В. *Функциональные построения в k-значных логиках.* Труды математического института им. В.А. Стеклова АН СССР, 1958, т.51, с.5-142

[4] Post E. *Two-valued iterative systems of mathematical logic.* Prinston,1941

достигнуто путем явного описания множества предполных классов; при этом оказалось, что в P_2 пять, а в P_3 восемнадцать таких классов. Проблема явного описания множества предполных классов в P_k для любого $k \geq 4$ долгое время оставалась открытой и оказалась довольно сложной. В 1964 году А.И.Мальцев исследовал задачу о полноте в четырехзначной логике. С.В.Яблонским, А.В.Кузнецовым,[5] В.В.Мартынюком,[6] Ло Чжу Каем,[7,8] Пан Юн-цзе,[9] Ван Сяо-хао,[10] Лю Сюй-хуа, Е.В. Захаровой,[11] И.Розенбергом[12] были последовательно в явном виде построены все предполные классы в k-значных логиках. Важно отметить, что в этих работах использован аппарат сохранения функциями k-значных логик отношений (предикатов), впервые введенный А.В.Кузнецовым. Именно на этом пути И.Розенбергом было проведено завершающее построение множества всех предполных классов в k-значных логиках, а С.В.Яблонским, Е.Ю.Захаровой и В.Б.Кудрявцевым[13] получена асимптотика их числа.

Наиболее важной последовательностной функциональной системой, как в теоретическом плане, так и с точки зрения приложений, является функциональная система P, содержащая в качестве элементов ограничен

-но-детерминированные функции (о.-д. функции), а в качестве операций — операции суперпозиции и обратной связи.

В наиболее общей постановке задача о полноте для о.-д. функций изучалась в работах В.Б.Кудрявцева[14]и М.И.Кратко.[15] Как показано в вышеупомянутой работе М.И.Кратко не существует алгоритма для распознавания полноты конечных множеств о.-д. функций. Вместе с тем, функциональная система P является конечнопорожденной и совокуп-

[5]Кузнецов А.В. *Математика в СССР за сорок лет.* Москва, 1959, т.1, с.102-115

[6]Мартынюк В.В *Исследование некоторых классов функций в многозначных логиках.* Проблемы кибернетики, вып.3, Москва, Наука, 1960, с.49-60

[7]Ло Чжу Кай, Лю Сюй-хуа. *Предполные классы, определяемые бинарными отношениями в многозначных логиках.* Acta Sci. natur. Univ. Yilinensis, 1963, v.4

[8]Ло Чжу Кай. *Предполные классы, определяемые нормальными k-арными отношениями в k-значной логике.* Acta Sci. natur. Univ. Yilinensis, 1964, v.3

[9]Пан Юн-цзе. *Один разрешающий метод для отыскания всех предполных классов в многозначных логиках.* Acta Sci. natur. Univ. Yilinensis, 1962, v.2

[10]Ван Сяо-хао *Теория структур функций с отсутствием значений и функций без отсутствия значений.* Acta Sci. natur. Univ. Yilinensis, 1963, v.2

[11]Захарова Е.Ю. *Критерий полноты систем функций в P_k.* Проблемы кибернетики, вып. 18, М., 1967, с.5-10

[12]Rosenberg Y. *Uber die functionale Vollstandigkeit in den mehrwertigen Logiken.* Praha, Rozpravi Ceskoslovenska Acodemie Ved. v. 80, №4, p. 3-93,1970

[13]Захарова Е.Ю., Кудрявцев В.Б., Яблонский С.В. *О предполных классах в k-значных логиках.* ДАН СССР, т.136, №3, стр.509-512, 1969

[14]Кудрявцев В.Б. *О мощности множеств предполных множеств некоторых функциональных систем, связанных с автоматами.* Проблемы кибернетики, вып. 13, Москва, Наука, 1965, с.45-74

[15]Кратко М.И. *Алгоритмическая неразрешимость распознавания полноты для конечных автоматов* ДАН СССР, 1964, т.155, №1, с.35-37

ность предполных классов образует минимальную критериальную систему в P. Поэтому возникает вопрос: какова мощность множества предполных классов в P. В.Б.Кудрявцевым установлено, что эта мощность равна континууму.

В силу своего определения о.-д.функции являются бесконечными и даже континуальными функциями. Таким образом, предполагается, что вычисляющий любую о.-д.функцию автомат "работает" бесконечно долго. Однако с точки зрения приложений совершенно очевидно, что каждое реальное кибернетическое устройство (в том числе, автомат) по истечении некоторого конечного промежутка времени прекращает свою "работу", т.е. либо становится ненужным, либо переводится в начальное состояние. В связи с этим естественно возникает

Задача о полноте в последовательностной функциональной системе P_k^τ.

Пусть $k \geq 2$, $\tau \geq 1$. Элементами функциональной системы P_k^τ являются детерминированные функции, переменные которых принимают значения из E_k^τ — множества всех слов длины τ, составленных из букв алфавита $E_k = \{0, 1, \dots, k-1\}$. В качестве операций в функциональной системе P_k^τ рассматриваются операции суперпозиции и обратной связи. Заметим, что любая функция из P_k^τ может быть "вычислена" конечным автоматом за первые τ тактов его работы.

Известно,[16] что для решения задачи о полноте в P_k^τ операция "обратная связь" оказывается несущественной, т.е. в данном случае эта операция выразима через операции суперпозиции. Отсюда легко следует, что задача о полноте в конечнозначных логиках — одна из основных задач в теории истиностных функциональных систем, эквивалентна задаче о полноте в P_k^1, т.е. при $\tau = 1$. Вместе с тем, при $\tau \geq 2$ существует принципиальное различие между функциональной системой, элементами которой являются функции k-значных логик, и функциональной системой P_k^τ. Множество всех детерминированных отображений, рассматриваемых на словах длины τ, порождает специальное замкнутое подмножество в k^τ-значных логиках, существенно зависящее от двух параметров — параметра k и параметра τ. Используя естественную аналогию между задачей полноты в P_k^τи в конечнопорожденных замкнутых классах конечнозначных логик, можно ввести понятие предполного класса в P_k^τ и показать, что всякое множество является полным в P_k^τтогда и только тогда, когда оно целиком не содержится ни в одном из предполных в P_k^τ классов; совокупность предполных классов в P_k^τ конечна, может быть описана эффективно и образует минимальную критериальную систему для распознавания полноты систем функций из P_k^τ; при этом множество

[16] Кудрявцев В.Б., Алешин С.В., Подколзин А.С. *Введение в теорию автоматов.* Москва, Наука, 1985.

предполных классов в P_k^1 совпадает с множеством предполных классов в P_k. Таким образом, в отличие от задачи о полноте в P для любых $k \geq 2$, $\tau \geq 1$ существует алгоритм для распознавания полноты в P_k^τ произвольных конечных множеств д.функций. Так же, как в k-значных логиках, каждый из этих алгоритмов может быть задан с использованием эффективно описываемых критериальных систем, а наилучший из них получается на пути явного описания всех предполных классов в P_k^τ.

В общем случае для любых $k \geq 2$, $\tau \geq 1$ задача о полноте в P_k^τ решена В.А.Буевичем.[17,18,19,20] В терминах сохранения отношений описаны все предполные классы в P_k^τ. Однако это описание оказалось довольно сложным. В частности, отношения, классы сохранения которых совпадают с предполными в P_k^τ классами, могут иметь любую арность от 1 до k^τ, а их число даже при малых k и τ очень велико. В связи с этим естественной представляется задача об исследовании на полноту систем детерминированных функций, которые обладали бы некоторыми наперед заданными, но вместе с тем достаточно общими свойствами.

Диссертация посвящена рассмотрению задачи о полноте в P_k^τ так называемых S-множеств, состоящих только из S-функций — детерминированных функций, вычисляемых конечными автоматами, в каждом состоянии которых реализуется функция k-значной логики, принимающая все k значений. Легко видеть, что для любой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ из P_k^τ существует S-функция $g(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$, также принадлежащая P_k^τ такая, что

$$f(x_1, \ldots, x_n) = g(x_1, \ldots, x_n, x_n).$$

По аналогии с общим случаем в диссертации введено понятие S-предполного класса и показано, что произвольное S-множество $\mathfrak{M} \subset P_k^\tau$ является полным в P_k^τ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M}$ не содержится ни в одном из S-предполных в P_k^τ классов. Таким образом, возникает задача об описании множества всех S-предполных в P_k^τ классов. Отметим, что эта задача в случае, когда $\tau = 1$, т.е. в k-значных логиках, решена В.Б.Кудрявцевым.[21]

В диссертации с использованием аппарата сохранения отношений для любых $k \geq 2$, $\tau \geq 1$ представлено описание всех S-предполных классов в P_k^τ. Оказалось, что совокупность отношений, классы сохранения

---

[17] Буевич В.А. *О τ-полноте в классе автоматных отображений.* Докл. АН СССР, 1980, Т. 252, № 5, с. 221-224)

[18] Буевич В.А. *Условия А-полноты для конечных автоматов*, ч.1 Москва., Изд-во МГУ, 1986

[19] Буевич В.А. *Условия А-полноты для конечных автоматов*, ч.2 Москва, Изд-во МГУ, 1987

[20] Буевич В.А. *О τ- полноте в классе детерминированных функций* Докл. РАН, т.326, №3, стр.399-403, 1992

[21] Кудрявцев В.Б. *О свойствах S-систем функций k-значной логики.* Elektronische Informationsverarbeitung und Kybernetik. EIK 9,1/2, с.8-105, 1973

которых совпадают с S-предполными, расподается на шесть семейств — семейства $Z(k,\tau)$, $D(k,\tau)$, $N(k,\tau)$, $I(k,\tau)$, $L(k,\tau)$ и $V(k,\tau)$. Семейство $Z(k,\tau)$ состоит из унарных отношений, отношения, принадлежащие семействам $D(k,\tau)$, $N(k,\tau)$, $I(k,\tau)$и $V(k,\tau)$ бинарны, а отношения, принадлежащие семейству $L(k,\tau)$ имеют арность, равную четырем. При этом семейства $Z(k,1)$, $D(k,1)$, $N(k,1)$, $I(k,1)$ и $L(k,1)$ совпадают с теми, которые описаны в работе Кудрявцева В.Б. "О свойствах S-систем функций k-значной логики". Заметим, что каждый S-предполный в P_k^τ класс является в то же время одним из предполных классов в P_k^τ, однако описание S-предполных классов значительно проще, чем описание всех предполных классов в P_k^τ, полученное В.А.Буевичем.

С задачей полноты в P_k^τ тесно связана задача об А-полноте в P. Учитывая детерминированность функций из P можно, очевидно, считать, что для всякого $\tau \geq 1$ эти функции определены также на всех наборах слов длины τ. Пусть $\tau \geq 1$. О.-д.функция $g(x_1,\ldots,x_n)$ и о.-д.функция $f(x_1,\ldots,x_n)$ являются τ-эквивалентными, если для любого набора слов $(a_1,\ldots,a_n)$, каждое из которых имеет длину τ, выполнено равенство $g(a_1,\ldots,a_n) = f(a_1,\ldots,a_n)$. Множества $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{N}'$ из P называются τ-эквивалентными, если для любой о.-д.функции $f(x_1,\ldots,x_n)$ из $\mathfrak{N}$ в $\mathfrak{N}'$ существует τ-эквивалентная ей о.-д.функция $f'(x_1,\ldots,x_n)$ и наоборот. Подобным образом определяется и τ-эквивалентность множеств $\mathfrak{M}$ из P и $\mathfrak{M}'$ из P_k^τ. Множество $\mathfrak{N} \subseteq P$ называется А-полным, если для любого $\tau \geq 1$ замыкание множества $\mathfrak{N}$ τ-эквивалентно P_k^τ. Известно, что в общем случае не существует алгоритма для распознавания А-полноты конечных систем о.-д.функций. Поэтому представляет интерес поиск такого алгоритма для систем о.-д.функций, обладающих некоторыми наперед заданными свойствами.

Диссертация состоит из введения и двенадцати параграфов. В $$ 1-9 для любых $k \geq 2$, $\tau \geq 1$ дано полное решение задачи о S-полноте в P_k^τ — с использованием аппарата сохранения отношений описано множество всех S-предполных в P_k^τ классов. Совокупность отношений, классы сохранения которых совпадают с S-предполными в P_k^τ классами разбивается на шесть семейств — семейства $Z(k,\tau)$, $D(k,\tau)$, $N(k,\tau)$, $I(k,\tau)$, $L(k,\tau)$ и $V(k,\tau)$.

В $10 диссертации для любого $k \geq 2$ представлена ассимптотика числа S-предполных классов при τ, стремящемся к бесконечности.

В $11 диссертации для любых $k \geq 2$, $\tau \geq 1$ рассматривается задача, аналогичная классической задаче Слупецкого-Яблонского-Саломаа[22,23,24]

[22] Яблонский С.В. *Введение в дискретную математику.*, Москва, Наука, 1986

[23] Slupeski Y. *Kryterium petnosci wielowartosciowych systemow logici zdan.* Comptes rendus des seanses de la Societe des Sciences et des Lettres de Varsovie, 102-109, 1939

[24] Salomaa A. *On basis groups for the set of functions over a finite domain.* Ann.Acad. Sci. Finnicae,

для k-значных логик. Пусть $S(P_k^\tau(1))$ — множество всех S-функций из P_k^τ, существенно зависящих только от одной переменной. Пусть M_k^τ — совокупность всех S-множеств $\mathfrak{M}$ таких, что $S(P_K^\tau(1)) \subseteq \mathfrak{M}$. Возникает вопрос: каковой должна быть минимальная критериальная система для распознавания полноты S-множеств, принадлежащих M_k^τ. В терминах сохранения отношений эта критериальная система описана. Очевидно, она состоит из тех и только тех S-предполных в P_k^τ классов, которые содержат все одноместные S-функций из P_k^τ.

Пусть f — произвольная о.-д.функция из P. О.-д.функция f называется S-о.-д.функцией, если для любого $\tau \geq 1$ о.-д.функция f τ-эквивалентна некоторой S-функции из P_k^τ. По аналогии с предыдущим вводится понятие S-множества о.-д.функций. Пусть $S(P(1))$ — S-множество о.-д.функций, зависящих от одной переменной. В $11 показано, что существует алгоритм для распознавания А-полноты S-множеств $\mathfrak{M}$ таких, что $S(P(1)) \subseteq \mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M} \setminus S(P(1)) < \infty$.

В $12 диссертации при $k = 2$ задача об А-полноте обобщается на случай, когда множество $\mathfrak{M}$, содержащее в качестве подмножества множество $S(P(1))$ состоит из произвольных о.-д.функций (не обязательно S-о.-д.функций). Показано, что и в этом случае задача об А-полноте является алгоритмически разрешимой.

Цель работы

1) Для любых $k \geq 2$, $\tau \geq 1$ представить эффективное описание всех S-предполных классов в функциональной системе P_k^τ.

2) Получить ассимптотику числа S-предполных в P_k^τ классов при фиксированном k и при τ, стремящемся к бесконечности.

3) Изучить вопрос о существовании алгоритма для распознавания А-полноты S-множеств, содержащих все одноместные S-о.-д.функции.

4) Изучить вопрос о существовании алгоритма для распознавания А-полноты произвольных множеств о.-д.функций, содержащих все одноместные S-о.-д.функции.

Основные методы исследования

В диссертации используются методы дискретной математики и комбинаторного анализа.

Науная новизна

Результаты работы являются новыми и состоят в следующем:

1) С использованием аппарата сохранения отношений для любых $k \geq 2$, $\tau \geq 1$ полностью описано множество всех S-предполных в P_k^τ классов. Множество отношений, классы сохранения которых совпадают с S-редполными распадается на шесть семейств - семейства $Z(k,\tau)$, $D(k,\tau)$, $N(k,\tau)$, $I(k,\tau)$, $L(k,\tau)$ и $V(k,\tau)$.

Ser A 338, 1-15, 1963

2) При произвольном, но фиксированном $k \geq 2$ установлено асимптотическое поведение числа S-предполных классов при τ стремящемся к бесконечности.

3) Для любых $k \geq 2$, $\tau \geq 1$ из множества всех отношений, описывающих S-предполные в P_k^τ классы, выделены те отношения, классам сохранения которых принадлежат все одноместные S-функции. На этом основании для любого $k \geq 2$ указан алгоритм распознавания А-полноты S-множеств, содерхащих все S-о.-д. функции, зависящие от одной переменной.

4) При $k = 2$ решена задача о существовании алгоритма для распознавания А-полноты произвольных систем о.-д. функций, содержащих все одноместные S-о.-д. функции.

Теоретическая и практическая ценность

Диссертация носит теоретический характер.

Апробация результатов

Результаты диссертации докладывались автором на семинарах механико-математического факультета МГУ им. Ломоносова:

- семинаре "Дискретный анализ" под руководством д.ф.-м.н, проф. С.В.Алешина, д.ф.-м.н, проф. В.А.Буевича, к.ф.м.н, с.н.с. Носова М.В.;

- семинаре "Теория автоматов" под руководством д.ф.-м.н, проф. В.Б. Кудрявцева;

- семинаре "Математические вопросы кибернетики" под руководством д.ф.-м.н, проф. О.М.Касим-Заде;

- семинаре "Функции многозначной логики и смежные вопросы" под руководством д.ф.-м.н, проф. А.Б.Угольникова.

А также на семинаре под руководством член-корр. РАН К.В.Рудакова в Вычислительном центре РАН и на следующих научных семинарах и конференциях:

- международной конференции "Интеллектуальные системы и компьютерные науки" ((Москва, МГУ им.Ломоносова, 2006);

- 9 международном семинаре "Дискретная математика и ее приложения", посвященном 75-летию со дня рождения академика О.Б.Лупанова (Москва, МГУ им.Ломоносова, 2007);

- международной конференции "Современные проблемы математики, механики и их приложений", посвященной 70-летию ректора МГУ академика В.А.Садовничего (Москва, МГУ им.Ломоносова, 2009);

- международных научных конференциях студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов" (Москва, МГУ им. Ломоносова, 2007, 2008, 2009 и 2010 гг.);

- научных конференциях "Ломоносовские чтения" (Москва, МГУ им.Ломоносова, 2007, 2008 и 2009 гг.);

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в работах автора, список которых приведен в конце автореферата [1] — [7].

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из веедения, 12 параграфов и списка литературы. Полный объем диссертации - 92 страницы, список цитируемой литературы содержит 61 наименование.

Краткое содержание работы

Пусть $k \geq 2$, $\tau \geq 1$, $E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$. Пусть E_k^τ — множество всех слов длины τ, составленных из элементов E_k. Произвольный элемент a, принадлежащий множеству E_k^τ будем обозначать следующим образом: $a = (a(1), \ldots, a(\tau))$. Пусть $x, x_1, \ldots, y, y_1, \ldots$ — переменные, принимающие значения из E_k^τ. Всякую такую переменную (например, x) представим в виде $x = (x(1), \ldots, x(\tau))$. Для любого t $(1 \leq t \leq \tau)$ на множестве E_k^τ введем отношение t-эквивалентности. Элементы a_1 и a_2 из E_k^τ назовем t-эквивалентыми ($a_1 \sim^t a_2$), если $a_1(1) = a_2(1), \ldots, a_1(t) = a_2(t)$.

Определение Пусть $n \geq 1$. Через $E_k^\tau(n)$ обозначим множество

$$\underbrace{E_k^\tau \times \ldots \times E_k^\tau}_{n}.$$

Пусть $k \geq 2, \tau \geq 1$. Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$, отображающая множество $E_k^\tau(n)$ в E_k^τ называется детерминированной (д.функцией), если для всякого t $(1 \leq t \leq \tau)$ и для любой пары $(a_1, \ldots, a_n), (a'_1, \ldots, a'_n)$ наборов элиментов из E_k^τ такой, что $a_1 \sim^t a'_1, \ldots, a_n \sim^t a'_n$, $f(a_1, \ldots, a_n) \sim^t f(a'_1, \ldots, a'_n)$.

Заметим, что любая д.функция для заданного $\tau \geq 1$ может быть вычислена некоторым конечным автоматом за первые τ тактов его работы.

Пусть P_k^τ — множество всех д.функций, зависящих от переменных, которые принимают значения из множества E_k^τ. Будем считать, что на множестве P_k^τ задана операция суперпозиции. Пусть $\mathfrak{M} \subseteq P_k^\tau$. Замыкание множества $\mathfrak{M}$ относительно этой операции обозначим $[\mathfrak{M}]$.

Определение Пусть $k \geq 2, \tau \geq 1, \mathfrak{M} \subseteq P_k^\tau$. Множество $\mathfrak{M}$ называется полным в P_k^τ, если $[\mathfrak{M}] = P_k^\tau$.

Известно,[25] что для любых $k \geq 2, \tau \geq 1$ существуют конечные системы, полные в P_k^τ.

В качестве примера такой полной системы будем рассматривать систему, состоящую из двух д.функций: д.функции $g(x)$ — "задержки" и д.функции $h(x_1, x_2)$ — "штриха Шеффера".

Д. функция $g(x) = y$ такова, что $y(1) = 1$ и для любого t $(1 \leq t \leq \tau - 1)$ $y(t) = min\{x_1(t), x_2(t)\} + 1(modk)$.

[25]Гаврилов Г.П *О функциональной полноте в счетно-значной логике.* Проблемы кибернетики, вып.15, Москва, Наука, 1965, с.5-64

Определение Пусть $k \geq 2, \tau \geq 1$. Пусть $D = \{\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots\}$ – некоторая система подмножеств множества P_k^τ. Система D называется критериальной, если справедливо следующее: множество $\mathfrak{M} \subseteq P_k^\tau$ является полным в P_k^τ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M}$ не содержится целиком ни в одном из множеств системы D.

Из общих алгебраических соображений следует, что минимальной критериальной системой в P_k^τ является множество, состоящее из предполных классов в P_k^τ.

Определение Пусть $k \geq 2, \tau \geq 1$. Замкнутое множество $\mathfrak{N} \subset P_k^\tau$ называется предполным классом в P_k^τ, если $\mathfrak{N}$ не является полным, но для любой д.функции $f \notin \mathfrak{N}$ замыкание множества $\mathfrak{N} \cup \{f\}$ совпадает с P_k^τ.

Имеет место [26,27,28]

Теорема 1.1. Пусть $k \geq 2$, $\tau \geq 1$. Множество $\mathfrak{M} \subseteq P_k^\tau$ является полным в P_k^τ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M}$ не принадлежит целиком ни одному из предполных в P_k^τ классов, причем число предполных классов в P_k^τ конечно.

Определение Пусть $k \geq 2$, $\tau \geq 1$. Пусть $h \geq 1$, $T = (t_1, \ldots, t_h)$ — произвольный набор положительных целых чисел такой,что $\max\{t_1, \ldots, t_h\} \leq \tau$. Пусть $E_k^T = \underbrace{E_k^{t_1} \times \ldots \times E_k^{t_h}}_{h}$. Произвольное непустое множество $R \subseteq E_k^T$ называется отношением, заданным на E_k^T, а число h — арностью этого отношения.

Определение Пусть $k \geq 2$, $\tau \geq 1$. Д.функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ из P_k^τ сохраняет отношение $R \subset E_k^T$, если для любой совокупности $(a_1^1, \ldots, a_h^1)$, $\ldots, (a_1^n, \ldots, a_h^n)$ элементов из R набор $(f(a_1^1, \ldots, a_1^n), \ldots, f(a_h^1, \ldots, a_h^n))$ также принадлежит R. Множество $\mathfrak{M} \subseteq P_k^\tau$ сохраняет отношение R, если каждая д.функция из $\mathfrak{M}$ сохраняет это отношение.

Множество всех д.функций, сохраняющих некоторое отношение R обозначим через $U(R)$. Нетрудно видеть, что для любого R множество $U(R)$ замкнуто.

Можно показать [26,27,28] что справедлива

Теорема 1.2. Пусть $k \geq 2$, $\tau \geq 1$. Для того, чтобы произвольное множество д.функций $\mathfrak{M} \subseteq P_k^\tau$ было полным в P_k^τ необходимо и достаточно, чтобы для любых $h \geq 1$, $T = (t_1, \ldots, t_h)$, $R \subset E_k^T$ таких, что $\max\{t_1, \ldots, t_h\} \leq \tau$ и $U(R)$ не является полным в P_k^τ, в $\mathfrak{M}$ содержалась д.функция, не сохраняющая отношения R.

Прежде, чем приступить к доказательству теоремы 1.2., введем неко-

[26] Кон П. *Универсальная алгебра.*Москва, Мир, 1968

[27] Кудрявцев В.Б. *Функциональные системы.* Москва, Изд-во МГУ, 1982

[28] Мальцев А.И. *Итеративные алгебры Поста.* Новосибирск, Изд-во СО АНСССР, 1976

торые понятия и докажем две леммы. Рассмотрим два семейства отношений — семейство P_1 и семейство P_2.

Семейство P_1. Пусть $T_1 = \underbrace{\tau \times \ldots \times \tau}_{k^\tau}$, $A_1 \in E_k^{T_1}$, причем A_1 — некоторый набор, содержащий все элементы множества E_k^τ, некоторым образом упорядоченные. Пусть $A_1 = (a_1, \ldots, a_{k^\tau})$. Рассмотрим набор $\tilde{A} = (\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_{k^\tau})$ из $E_k^{T_1}$ такой, что для любого i $(1 \leq i \leq k^\tau)$ $\tilde{a}_i = g(a_i)$. Отношение R принадлежит семейству P_1 тогда и только тогда, когда R является подмножеством $E_k^{T_1}$, содержит элемент A_1, но не содержит элемента $\tilde{A}$. Очевидно, для любого R из P_1 $U(R) \neq P_k^\tau$.

Семейство P_2. Пусть $B = ((b_{11}, b_{12}), \ldots, (b_{k^{2\tau}1}, b_{k^{2\tau}2}))$ — набор, содержащий все элементы множества $E_k^\tau \times E_k^\tau$, некоторым образом упорядоченные. Пусть $T_2 = \underbrace{\tau \times \ldots \times \tau}_{k^{2\tau}}$, $B_1 = (b_{11}, \ldots, b_{k^{2\tau}1})$, $B_2 = (b_{12}, \ldots, b_{k^{2\tau}2})$. Очевидно, $B_1 \in E_k^{T_2}$, $B_2 \in E_k^{T_2}$. Рассмотрим набор $B_3 = (b_1, \ldots, b_k^{2\tau})$ такой, что для любого i $(1 \leq i \leq k^{2\tau})$ $b_i = h(b_{i1}, b_{i2})$. Отношение R принадлжеит семейству P_2 тогда и только тогда, когда R является подмножеством $E_k^{T_2}$, содержит элементы B_1 и B_2, но не содержит элемента B_3. Очевидно, для любого R из P_2 $U(R) \neq P_k^\tau$.

В терминах сохранения отношений для любого $k \geq 2$ описаны [29] все предполные классы в P_k^τ при $\tau = 1$, т. е. в P_k, а в [1-4] в тех же терминах описаны все предполные классы в P_k^τ для любых $k \geq 2, \tau > 1$. Следует отметить, что описание в общем случае является довольно сложным. Поэтому возникает вопрос об исследовании на полноту в P_k^τ систем, обладающих некоторыми наперд заданными, но в то же время достаточно общими свойствами.

Определение Пусть $k \geq 2$, $\tau \geq 1$. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_k^\tau$. Д. функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ назовем S-функцией, если в любом состоянии вычисляющего ее автомата реализуется функция k-значной логики, не выпускающая ни одного значения из множества E_k.

Очевидно, д.функция $h(x_1, x_2)$ является S-функцией, а д.функция $g(x)$ таковой не является.

Определение Пусть $\mathfrak{M} \subset P_k^\tau$. Множество $\mathfrak{M}$ назовем S-множеством, если любая д.функция из $\mathfrak{M}$ является S-функцией.

Легко убедиться в том, что существуют S-множества, образующие полные системы в P_k^τ и состоящие из конечного числа S-функций.

Например, таковой является система, состоящая из S-функции $h(x_1, x_2)$ и S-функции $\tilde{g}(x_1, x_2) = y$ такой, что $y(1) = 1$, если $x_1(1) = x_2(1)$ и $y(1) = x_1(1)$, если $x_1(1) \neq x_2(1)$; $y(t) = x_1(t-1)$, если $x_1(1) = x_2(1), \ldots$,

---

[29] Яблонский С.В., Гаврилов Г.П, Кудрявцев В.Б. *Функции алгебры логики и классы Поста* Москва, Наука, 1966, 177

$x_1(t-1) = x_2(t-1)$; $x_1(t) = x_2(t)$; $y(t) = x_1(t)$, если существует $t' \leq t$ такое, что $x_1(t') \neq x_2(t)$ $(1 \leq t \leq \tau - 1)$.

Пусть $\mathfrak{M} \subseteq P_k^\tau$, причем $\mathfrak{M}$, вообще говоря, не является S-множеством. Через $S(U(\mathfrak{M}))$ обозначим подмножество $\mathfrak{M}$, содержащее все S-функции из $\mathfrak{M}$.

Определение Пусть $k \geq 2, \tau \geq 1$. Пусть $D = \{\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots\}$ — некоторая система подмножеств множества P_k^τ. Систему D назовем S-критериальной, если справедливо следующее: S-множество $\mathfrak{M} \subset P_k^\tau$ является полным в P_k^τ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M}$ целиком не содержится ни в одном из множеств системы D.

Очевидно, любая критериальная система является также и S-критериальной. Однако обратное не верно. Пусть $\{\mathfrak{N}_1, \ldots, \mathfrak{N}_m\}$ — совокупность предполных классов в P_k^τ. Тогда множество $\{S(\mathfrak{N}_1), \ldots, S(\mathfrak{N}_m)\}$ образуют S-критериальную систему в P_k^τ.

Определение Пусть $k \geq 2$, $\tau \geq 1$. S-множество $\mathfrak{N} \subset P_k^\tau$ называется S-предполным классом в P_k^τ, если $\mathfrak{N}$ не является полным в P_k^τ, но для любой S-функции $f \notin \mathfrak{N}$ замыкание множества $\mathfrak{N} \cup \{f\}$ совпадает с P_k^τ.

Легко убедиться в том, что множество всех S-предполных классов в P_k^τ является подмножеством множества $\{S(\mathfrak{N}_1), \ldots, S(\mathfrak{N}_m)\}$, но не совпадает с ним.

Теорема 1.3. Пусть $k \geq 2$, $\tau \geq 1$. Любая S-критериальная система в P_k^τ в качестве своего подмножества содержит множество всех S-предполных классов. Пусть $D = \{\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2 \ldots\}$ — такая система. Множество $\mathfrak{M}_i$ $(i \geq 1)$ является S-предполным классом в P_k^τ тогда и только тогда, когда для любого $j \geq 1$, $j \neq i$,$\mathfrak{M}_i \not\subseteq \mathfrak{M}_j$.

Теорема 1.4. Пусть $k \geq 2$, $\tau \geq 1$. S-множество $\mathfrak{M} \subset P_k^\tau$ является полным в P_k^τ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M}$ не принадлежит целиком ни одному из S-предполных классов.

Множество всех S-предполных классов в терминах сохранения отношений для всякого $k \geq 2$ при $\tau = 1$ описано. [30,31] Интерес представляет аналогичное описание для любых $k \geq 2$, $\tau \geq 1$.

Рассмотрим шесть семейств отношений — семейства $Z(k,\tau)$, $D(k,\tau)$, $N(k,\tau)$, $I(k,\tau)$, $L(k,\tau)$ и $V(k,\tau)$.

Семейство $Z(k,\tau)$ ($Z(k,\tau) \neq \emptyset$ для любых $k \geq 2$, $\tau \geq 1$. Унарное отношение R принадлежит семейству $Z(k,\tau)$ тогда и только тогда, когда для некоторого t $(1 \leq t \leq \tau)$ $R \subset E_k^t$, причем при $\tau \geq 2, t \geq 2$ имеет место следующее: для любого $a \in E_k^{t-1}, a = (a(1), \ldots, a(t-1))$ существуют $a(t) \in E_k$, $a'(t) \in E_k$ такие, что $a(t) \neq a'(t), (a(1), \ldots, a(t-1), a(t))$

[30]Кудрявцев В.Б. *Теорема полноты для одного класса автоматов без обратных связей.* ДАН СССР, 1960, т.132, №2, с.272-274

[31]Гаврилов Г.П. *О функциональной полноте в счетно-значной логике.* Проблемы кибернетики,вып.15, Москва, Наука, 1965, с.5-64

принадлежит, а $(a(1),\dots,a(t-1),a'(t))$ не принадлежит R.

Семейство $D(k,\tau)$ ($D(k,\tau)\neq\emptyset$ для любых $k\geq 3$, $\tau\geq 1$. Бинарное отношение R принадлежит семейству $D(k,\tau)$ тогда и только тогда, когда для некоторого t $(1\leq t\leq\tau)$ $R\subset E_k^t(2)$, R является определенным на E_k^t отношением эквивалентности, причем имеет место следующее. Существует принадлежащий R набор (a_1,a_2) такой, что $a_1(1)=a_2(1),\dots,a_1(t-1)=a_2(t-1)$. Кроме того, для любого $a\in E_k^t$ существует $a'\in E_k^t$ такое, что $a(t)\neq a'(t)$, набор (a,a') не принадлежит R и при $\tau\geq 2$, $t\geq 2$ $a(1)=a'(1),\dots,a(t-1)=a'(t-1)$.

Семейство $N(k,\tau)$ ($N(k,\tau)\neq\emptyset$ для любых $k\geq 2$, $\tau\geq 1$. Бинарное отношение R принадлежит семейству $N(k,\tau)$ тогда и только тогда, когда для некоторого t $(1\leq t\leq\tau)$ $R\subset E_k^t(2)$, существует определенная на E_k^t подстановка σ_R, разлагающаяся в произведение циклов одинаковой простой длины $p\geq 2$, график которой совпадает с R, причем, если $\tau\geq 2$, $t\geq 2$ и набор (a_1,a_2) принадлежит R, то $a_1(1)=a_2(1),\dots,a_1(t-1)=a_2(t-1)$. Таким образом, для любого $a\in E_k^t(a,\sigma_R(a))\in R$ и для всякого набора (a_1,a_2) из R $a_2=\sigma_R(a_1)$.

Пусть $k\geq 2$, $\tau\geq 1$. Пусть Σ — множество всех подстановок (перестановок), определенных на E_k. Пусть $t\in\{1,\dots,\tau\}$ и Φ_t — совокупность отображений множества E_k^t в Σ такая, что при $t=1$ для любых $\varphi\in\Phi_t, a\in E_k, a'\in E_k$ $\varphi(a)=\varphi(a')$, а при $\tau\geq 2, t\geq 2$ для любых $\varphi\in\Phi_t$, $a\in E_k^t$, $a'\in E_k^t$ $\varphi(a)=\varphi(a')$, если $a(1)=a'(1),\dots,a(t-1)=a'(t-1)$. Подстановку, которую отображение $\varphi\in\Phi_t$ ставит в соответствие элементу $a\in E_k^t$ обозначим через $\sigma_{\varphi(a)}$.

Семейство $I(k,\tau)$ ($I(k,\tau)\neq\emptyset$ для любых $k\geq 5$, $\tau\geq 1$. Пусть $h\geq 5$, $m\geq 1$, $k=h^m$. Бинарное отношение R принадлежит подсемейству $I_h(k,\tau)$ семейства отношений $I(k,\tau)$ если для некоторых t $(1\leq t\leq\tau)$, $\varphi\in\Phi_t$ имеет место следующее: $R\subset E_k^t(2)$, набор (a_1,a_2) принадлежит R тогда и только тогда, когда для любого i $(1\leq i\leq m)$ i-ые компоненты чисел $\sigma_{\varphi(a_1)}(a_1(t)),\sigma_{\varphi(a_1)}(a_2(t))$ при разложении их по степеням числа h различны, причем при $\tau\geq 2, t\geq 2$ $a_1(1)=a_2(1),\dots,a_1(t-1)=a_2(t-1)$. Семейство отношений $I(k,\tau)$ есть объединение семейств $I_h(k,\tau)$, взятое по всем $h\geq 5$, таким, что $h^m=k$, $m\geq 1$.

Пусть $k=p^m$, где p — простое число, $p\geq 2, m\geq 1$. Пусть $G=\langle E_k,\oplus\rangle$ — произвольная элементарная абелева p-группа. В каждой такой группе всякий ненулевой элемент имеет порядок p. Пусть $\tau\geq 1$.

Семейство $L(k,\tau)$ ($L(k,\tau)\neq\emptyset$ для любого $\tau\geq 1$, если $k=p^m$, где p — простое число, $p\geq 2$, $m\geq 1$. Отношение R, арность которого равна четырем, принадлежит семейству $L(k,\tau)$, если для некоторых t $(1\leq t\leq\tau)$ $\varphi\in\Phi_t$ имеет место следующее: $R\subset E_k^t(4)$, набор (a_1,a_2,a_3,a_4) принадлежит R тогда и только тогда, когда $\sigma_{\varphi(a_1)}(a_1(t))\oplus\sigma_{\varphi(a_1)}(a_2(t))=\sigma_{\varphi(a_1)}(a_3(t))\oplus\sigma_{\varphi(a_1)}(a_4(t))$, причем при $\tau\geq 2$, $t\geq 2$ $a_1(1)=a_2(1)=$

$a_3(1) = a_4(1), \ldots, a_1(t-1) = a_2(t-1) = a_3(t-1) = a_4(t-1)$.

Заметим, что семейства отношений $Z(k,\tau), D(k,\tau), N(k,\tau), I(k,\tau)$ и $L(k,\tau)$ совпадают с семействами отношений, с помощью которых [30,31] описываются все S-предполные классы в k-значных логиках.

Семейство $V(k,\tau)$ ($V(k,\tau) \neq \emptyset$ для любых $k \geq 2$, $\tau \geq 2$. Бинарное отношение R принадлежит семейству $V(k,\tau)$, если для некоторых t ($t \leq \tau$), $\varphi \in \Phi_t$ имеет место следующее: $R \subset E_k^t(2)$, набор (a_1, a_2) принадлежит R тогда и только тогда, когда либо $a_1(t-1) = a_2(t-1)$, $a_1(t) = a_2(t)$, либо $a_1(t-1) \neq a_2(t-1)$ и существует $\alpha \in E_k$ такое, что $a_1(t) = \sigma_{\varphi(a_1)}(\alpha)$, $a_2(t) = \sigma_{\varphi(a_2)}(\alpha)$, причем при $\tau \geq 3$, $t \geq 3$ $a_1(1) = a_2(1), \ldots, a_1(t-2) = a_2(t-2)$.

Пусть $k \geq 2$, $\tau \geq 1$, $W(k,\tau)$ — объединение семейств $Z(k,\tau)$, $D(k,\tau)$, $N(k,\tau)$, $I(k,\tau)$, $L(k,\tau)$ и $V(k,\tau)$.

В диссертации доказываются

Теорема 1.4. Пусть $k \geq 2$, $\tau \geq 1$. Произвольное S-множество $\mathfrak{M} \subset P_k^\tau$ является полным тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M}$ не сохраняет ни одного отношения R из $W(k,\tau)$.

Теорема 1.5. Пусть $k \geq 2$, $\tau \geq 1$. Пусть $\mathfrak{N}$ — произвольный S-предполный класс в P_k^τ. Тогда существует отношение $R \in W(k,\tau)$ такое, что $\mathfrak{N} = S(U(R))$.

Теорема 1.6. Пусть $k \geq 2$, $\tau \geq 1$. Пусть $R \in W(k,\tau)$. Тогда множество $S(U(R))$ образует S-предполный класс в P_k^τ.

Теорема 1.7. Пусть $k \geq 2$, $\tau \geq 1$. Имеет место следующее

а) Пусть $R \in W(k,\tau)$, $R' \in W(k,\tau) \backslash N(k,\tau)$, $R \neq R'$. Тогда $S(U(R)) \neq S(U(R'))$

б) Пусть $R \in N(k,\tau)$, $R' \in N(k,\tau)$. Тогда равенсто $S(U(R)) = S(U(R'))$ равносильно тому, что одна из подстановок σ_R и $\sigma_{R'}$, графики которых образуют отношения R и R' соответственно, является степенью другой.

Определение Пусть $k \geq 2$, $\tau \geq 1$, $\rho(k,\tau)$ — число S-предполных в $P(k,\tau)$ классов.

Имеет место

Теорема 1.8. Пусть $\tau \longrightarrow \infty$. Тогда

$$\rho(2,\tau) \sim 3 \cdot 2^{2^{\tau-1}}, \rho(3,\tau) \sim 3 \cdot 6^{3^{\tau-1}}, \rho(4,\tau) \sim 24^{4^{\tau-1}}.$$

а, если $k \geq 5$, то $\rho(k,\tau) \sim (p+2)(k!)^{k^{\tau-1}}$.

Пусть $N(2,\tau)$, $L_2(2,\tau)$, $L_3(3,\tau)$, $L_4(4,\tau)$, $I_1(k,\tau)$ — семейства отношений, таких, что класс сохранения любого отношения из этих семейств содержит все одноместные S-о.-д функции. Пусть $W_1(k,\tau)$ — объединение этих семейств.

Пусть M — множество всех таких систем S-о.-д.функций $\mathfrak{M}$ из P, что $S(P(1)) \subset \mathfrak{M}$ и множество $\mathfrak{M} \setminus S(P(1))$ конечно.

Теорема 1.9. Пусть $k \geq 2$. Произвольное множество о.д. функций $\mathfrak{M}$, принадлежащее совокупности S-множеств M, является А-полным тогда и только тогда, когда для любого $\tau \geq 1$ $\mathfrak{M}$ не сохраняет ни одного отношения из $W_1(k, \tau)$

Теорема 1.10 Пусть $k \geq 2$. Существует алгоритм для распознавания А-полноты произвольных систем о.-д.функций, принадлежащих множеству M.

Пусть $k = 2$. Пусть N — множество всех систем $\mathfrak{N}$ из P, состоящее из произвольных о.-д.функций, таких что $S(P(1)) \subset \mathfrak{N}$ и множество $\mathfrak{N} \setminus S(P(1))$ конечно.

Теорема 1.11. Существует алгоритм для распознавания А-полноты систем о.-д. функций, принадлежащих множеству N.

Благодарности Автор выражает свою глубокую благодарность доктору физико-математических наук профессору Вячеславу Александровичу Буевичу за научное руководство, постановку задачи и помощь в работе. Автор также благодарит коллектив кафедры Математической теории интеллектуальных систем за внимание и поддержку.

Публикации автора по теме диссертации

[1] Буевич В.А., Подколзина М.А. *Задача о полноте S-множеств детерминированных функций* // Вестник Московского Университета. Серия 1. Математика. Механика., 2008, № 5, с. 57-59. (Подколзиной М.А. принадлежат теоремы 3, 4 и доказательство некоторых вспомогательных утверждений в теоремах 1, 2)

[2] Подколзина М.А. *О числе S-предполных классов в функциональной системе P_k^t.* Вестник Московского Университета. Серия 1. Математика. Механика., 2008, № 6, с. 43-45

[3] Подколзина М.А. *О полноте и А-полноте S-множеств детерминированных функций, содержащих все одноместные детерминированные S-функции* Дискретная математика, том 21, вып.2, М., 2009, с. 75-88

[4] Буевич В.А., Подколзина М.А. *Критерий полноты S-множеств детерминированных функций.* Математические вопросы кибернетики.16, Москва. Физматлит, 191-238, 2007 (Подколзиной М.А. принадлежат результаты, изложенные в параграфах 4 (утверждения 7-14), 5, 6, 7, 8)

[5] Буевич В.А., Подколзина М.А. *О полноте S-множеств детерминированных функций.* Тезисы докладов 9 Международного семинара "Дискретная математика и ее приложения", Москва, 2007, с.152-155

[6] Подколзина М.А. *Об одной системе конечных множеств автоматных отображений, для которой задача об А-полноте алгоритмически разрешима.* Тезисы докладов 9 Международного семинара "Дискретная математика и ее приложения", Москва, 2007, с.175-176

[7] Подколзина М.А. *К задаче о полноте S-множеств детерминированных функций* тезисы докладов международной конференции "Современные проблемы математики, механики и их приложений", Москва, 2009, с.370