Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 511

Пупырев Юрий Александрович

Арифметические приложения теории гипергеометрических рядов

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2011

Работа выполнена на кафедре теории чисел Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научные руководители:	доктор физико-математических наук, профессор Галочкин Александр Иванович,
	кандидат физико-математических наук, доцент Зудилин Вадим Валентинович
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Сорокин Владимир Николаевич
	кандидат физико-математических наук Злобин Сергей Алексеевич
Ведущая организация:	Московский педагогический государственный университет

Защита диссертации состоится 18 февраля 2011 г. в 16 ч. 45 м. на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: РФ, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, МГУ, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 18 января 2011 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д.501.001.84 при МГУ
доктор физико-математических наук,
профессор

А.О. Иванов

Общая характеристика работы

Актуальность темы

В диссертации с помощью приближений Паде гипергеометрических функций получены арифметические результаты в области теории чисел.

В 1873 году Эрмит построил совместные приближения функций $e^z, \dots, e^{mz}$ рациональными функциями. То есть, он нашел в явном виде многочлены $Q_0(z), \dots, Q_m(z)$ такие, что кратности нуля в точке $z = 0$ функций $Q_0(z)e^{kz} - Q_k(z)$ будут максимально возможными в зависимости от степеней многочленов Q_k. Значения этих многочленов в точке $z = 1$ использовались Эрмитом для построения совместных приближений к $e, e^2, \dots, e^m$ рациональными числами, что позволило ему доказать трансцендентность e.

Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ – различные комплексные числа, $n_0, n_1, \dots, n_m$ – неотрицательные целые числа, и определим

$$f(x) = x^{n_0}(x - \alpha_1)^{n_1} \cdots (x - \alpha_m)^{n_m}.$$

Полагая $M = n_0 + n_1 + \dots + n_m$, получим

$$Q_0(z)e^{\alpha_k z} - Q_k(z) = z^{M+1}e^{\alpha_k z}\int_0^{\alpha_k} e^{-zt}f(t)\,dt, \tag{1}$$

где $\deg Q_k(z) \le M - n_k$. При подстановке $z = 1$ в (1), мы получим равенство, которое Эрмит использовал для доказательства трансцендентности e, а Линдеман в 1882 году для доказательства трансцендентности π.

Таким образом, конструкция совместных приближений $e_k^\alpha z$ рациональными функциями $Q_k(z)/Q_0(z)$ позволила построить совместные приближения чисел e_k^α рациональными числами $Q_k(1)/Q_0(1)$.

Подобная конструкция существует и для гипергеометрической функции. Рассмотрим следующий ряд, называемый *Гауссовой гипергеометрической функцией*:

$$F(z) = F(a, b, c; z) = {}_2F_1\left(\begin{matrix} a,\ b \\ c \end{matrix} \,\middle|\, z\right) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(a)_\nu (b)_\nu}{(c)_\nu}\, z^\nu,$$

где $a, b, c \in \mathbb{C}$ и $c \ne 0, -1, -2, \dots$; здесь $(\alpha_0) = 1$ и $(\alpha)_\nu = \alpha(\alpha + 1) \cdots (\alpha + \nu - 1)$. Если a или b принадлежат множеству $\{0, -1, -2, \dots\}$, то

$F(z)$ – многочлен; в противном случае это ряд с радиусом сходимости, равным 1.

Гаусс нашел следующее разложение в цепную дробь:

$$\frac{F(a,b,c;z)}{F(a,b+1,c+1;z)} = 1 + \frac{a_1 z|}{|1} + \frac{a_2 z|}{|1} + \cdots \,, \tag{2}$$

где комплексные числа

$$a_{2k+1} = -\frac{(a+k)(c-b+k)}{(c+2k)(c+2k+1)}\,, \qquad a_{2k} = -\frac{(b+k)(c-a+k)}{(c+2k-1)(c+2k)}\,.$$

Эта цепная дробь сходится к

$$\frac{F(a,b,c;z)}{F(a,b+1,c+1;z)}$$

в области $0 < \arg(z-1) < 2\pi$. Числитель $A_n(z)$ и знаменатель $B_n(z)$ подходящей дроби – это многочлены с комплексными коэффициентами и

$$\deg B_n \le \left[\frac{n}{2}\right], \qquad \deg A_n \le \left[\frac{n+1}{2}\right].$$

Имеет место подобное (1) равенство

$$\begin{aligned} &B_n(z)F(a,b,c;z) - A_n(z)F(a,b+1,c+1;z) \\ &\qquad = (-1)^n a_1 \cdots a_{n+1} z^{n+1} f_{n+1}(z), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} f_{2k}(z) &= F(a+k, b+k, c+2k; z), \\ f_{2k+1}(z) &= F(a+k, b+k+1, c+2k+1; z). \end{aligned}$$

Из (2) следует такое разложение:

$$F(a,1,c;z) = \frac{1|}{|1} + \frac{a_1^*|}{|1} + \frac{a_2^*|}{|1} + \cdots \,,$$

где коэффициенты a_i^* получаются из a_i подстановкой $b = 0$ и заменой c на $c-1$.

В 1907 году Паде нашел явное представление для рациональных приближений $F(a,1,c;z)$ с различными ограничениями на степени числителей и знаменателей подходящих дробей.

Якоби нашел следующее представление для остатка и знаменателя приближения Паде функции $F(a,1,c;1/x)$ в окрестности бесконечности. Пусть $\operatorname{Re} a > 0$, $\operatorname{Re}(c-a) > 0$, и пусть

$$\begin{aligned} Q_n(x) &= F(-n, c+n-1, a, x) \\ &= \frac{x^{1-a}(1-x)^{1+a-c}}{(a)_n} \cdot \left(\frac{d}{dx}\right)^n (x^{a+n-1}(1-x)^{c-a+n-1}) \end{aligned}$$

– многочлен Якоби, $\deg Q_n(x) = n$. Пусть многочлен $P_n(x)$ степени $n-1$ определен равенством

$$P_n(x) = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}\frac{Q_n(t)-Q_n(x)}{t-x}\,dt.$$

Тогда имеем следующее тождество:

$$xP_n(x) - Q_n(x)F\left(a,1,c;\frac{1}{x}\right) = x\frac{n!}{(a)_n}\int_0^1 \frac{t^{a+n-1}(1-t)^{c-a+n-1}}{(t-x)^{n+1}}\,dt.$$

Обобщенная гипергеометрическая функция определяется рядом

$$ {}_{m+1}F_m\left(\begin{matrix} a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_m \\ b_1,\ \ldots,\ b_m \end{matrix}\ \middle|\ z\right) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(a_0)_\nu (a_1)_\nu \cdots (a_m)_\nu}{(b_1)_\nu \cdots (b_m)_\nu}\frac{z^\nu}{\nu!}\,; \qquad (3)$$

условие

$$\operatorname{Re}(a_0 + a_1 + \cdots + a_m) < \operatorname{Re}(b_1 + \cdots + b_m)$$

обеспечивает сходимость ряда (3) в области $|z| \le 1$. Важную роль в анализе гипергеометрических рядов играют формулы суммирования и преобразования; в качестве примеров укажем формулу суммирования Гаусса

$$F(a,b,c;1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}\,,$$

формулу суммирования Пфаффа–Заальшютца

$$ {}_3F_2\left(\begin{matrix} -n,\ a,\ b \\ c,\ 1+a+b-c-n \end{matrix}\ \middle|\ 1\right) = \frac{(c-a)_n(c-b)_n}{(c)_n(c-a-b)_n}\,, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Классическая проблема Варинга утверждает, что для любого целого $k \ge 2$ существует s с тем условием, что каждое натуральное число представляется в виде суммы не более s слагаемых вида a^k, где a – натуральное число. Наименьшее s с таким свойством обозначается $g(k)$. Известно, что неравенство

$$\left\| \left(\frac{3}{2}\right)^k \right\| \ge \left(\frac{3}{4}\right)^k \qquad (4)$$

влечет представление

$$g(k) = 2^k + \left[\left(\frac{3}{2}\right)^k\right] - 2, \tag{5}$$

где $[\,\cdot\,]$ и $\|\cdot\|$ обозначают соответственно целую часть числа и расстояние до ближайшего целого, $\|x\| = \min(\{x\}, 1 - \{x\})$.

В 1957 г. Малер[1] использовал обобщение Риду известной теоремы Рота, чтобы показать, что неравенство

$$\left\|\theta\left(\frac{u}{v}\right)^k\right\| \le C^k$$

для целых u и v и вещественного θ имеет лишь конечное число решений в целых k для любого $C < 1$. В частности, в случае $\theta = 1$, $u/v = 3/2$, $C = 3/4$ получается неравенство (4), а вместе с ним и представление (5), для всех $k \ge K$, где K – абсолютная, но *неэффективная* постоянная.

В связи с этим возникла задача получить нетривиальную (с $C > 1/2$) и эффективную (в терминах K) оценку вида

$$\left\|\left(\frac{3}{2}\right)^k\right\| > C^k \qquad \text{для всех} \quad k \ge K. \tag{6}$$

Первое продвижение в решении этой задачи сделали в 1975 г. Бейкер и Коэтс.[2] Применив эффективные оценки линейных форм для p-адических логарифмов, они показали справедливость (6) с $C = 2^{-(1-10^{-64})}$.

В 1981 г. Бэйкерс[3] существенно улучшил этот результат, доказав, что неравенство (6) выполняется с $C = 2^{-0.9} = 0.5358\ldots$ при $k \ge 5000$. Доказательство Бэйкерса основано на приближениях Паде к остатку биномиального ряда $(1-z)^m = \sum_{n=0}^m \binom{m}{n}(-z)^m$.

В 1990 г. Дубицкас[4] использовал конструкцию Бэйкерса для получения оценки (6) с $C = 0.5769\ldots$.

[1] K. Mahler, "On the fractional parts of powers of real numbers. II", *Mathematika* **4**, 1957, 122–124.

[2] A. Baker, J. Coates, "Fractional parts of powers of rationals", *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **77**, 1975, 269–279.

[3] F. Beukers, "Fractional parts of powers of rationals", *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **90**:1, 1981, 13–20.

[4] А.К. Дубицкас, "Оценка снизу величины $\|(3/2)^k\|$", *УМН* **45**:4, 1990, 153–154.

В этом же году Кубина и Вундерлих[5] проверили неравенство (4) для всех $k \le 471600000$.

В 1993 г. Беннет[6,7] рассмотрел обобщение проблемы Варинга, именно, задачу о порядке $g_N(k)$ аддитивного базиса

$$S_N^{(k)} = \{1^k, N^k, (N+1)^k, \dots\}, \qquad N \ge 2,$$

множества целых положительных чисел. Он установил лучшие на данный момент оценки для последовательностей $\|(1+1/N)^k\|$:

$$\left\| \left(1+\frac{1}{N}\right)^k \right\| > 3^{-k} \qquad \text{при} \quad 4 \le N \le k \cdot 3^k$$

и с их помощью получил представление

$$g_N(k) = N^k + \left[\left(1+\frac{1}{N}\right)^k \right] - 2 \tag{7}$$

при $4 \le N \le (k+1)^{(k-1)/k} - 1$.

В 2003 г. Хабсигер,[8] пользуясь, как и Дубицкас, конструкцией Бэйкерса, получает оценку (6) с $C = 0.5770\dots$; его работа также содержит оценку

$$\left\| \left(\frac{3}{2}\right)^k \right\| > 0.57434^k \qquad \text{при} \quad k \ge 5, \tag{8}$$

полученную на основе вычислений работ Делмера, Дезуера и Кубины, Вундерлиха.

Наконец, в 2007 г. Зудилин,[9] модифицировав конструкцию Бэйкерса, а именно, рассмотрев приближения Паде к остатку ряда $1/(1-z)^{m+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m+n}{m} z^n$ и получив точные оценки p-адических порядков возникающих биномиальных коэффициентов, пришел к оценке

$$\left\| \left(\frac{3}{2}\right)^k \right\| > 0.5803^k \qquad \text{для всех} \quad k \ge K,$$

[5] J. Kubina, M. Wunderlich, “Extending Waring's conjecture up to 471 600 000”, *Math. Comp.* **55**:192, 1990, 815–820.

[6] M.A. Bennett, “Fractional parts of powers of rational numbers”, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **114**:2, 1993, 191–201.

[7] M.A. Bennett, “An ideal Waring problem with restricted summands”, *Acta Arith.* **66**:2, 1994, 125–132.

[8] L. Habsieger, “Explicit lower bounds for $\|(3/2)^k\|$”, *Acta Arith.* **106**:3, 2003, 299–309.

[9] W. Zudilin, “A new lower bound for $\|(3/2)^k\|$”, *J. Théor. Nombres Bordeaux* **19**:1, 2007, 311–323.

где K – некоторая эффективная постоянная. Конструкция его работы позволила ему также получить оценки

$$\left\| \left(\frac{4}{3}\right)^k \right\| > 0.4914^k \qquad \text{при} \quad k \geq K_1,$$
$$\left\| \left(\frac{5}{4}\right)^k \right\| > 0.5152^k \qquad \text{при} \quad k \geq K_2,$$

где K_1 и K_2 – эффективные постоянные. Указанная оценка снизу для $\|(4/3)^k\|$ дополняет результат Беннета о порядке аддитивного базиса $\{1^k, 3^k, 4^k, \dots\}$, который требует выполнения $\|(4/3)^k\| > (4/9)^k$ при $k \geq 6$, с тем условием, что последнее неравенство будет проверено в диапазоне $6 \leq k \leq K_1$.

В качестве обобщения предыдущей темы могут рассматриваться последовательность дробных долей степеней фиксированного числа $\alpha > 1$ и более общая последовательность $\{\xi\alpha^n\}$, $n = 1, 2, \dots$, где $\xi \neq 0$ и $\alpha > 1$ – вещественные числа.

Для натуральных $s = 1, 2, \dots$ определим q-ряды

$$\zeta_q(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{s-1}(n) q^n \qquad q \in \mathbb{C}, |q| < 1, \tag{9}$$

где $\sigma_{s-1}(n) = \sum_{d|n} d^{s-1}$ обозначает сумму степеней делителей. Несложно проверить предельные соотношения

$$\lim_{q\to 1}(1-q)^s \zeta_q(s) = (s-1)! \cdot \zeta(s), \qquad s = 2, 3, \dots,$$

где $\zeta(s)$ – значения дзета-функции Римана (дзета-значения). Это обстоятельство мотивирует название *q-дзета-значения* для рядов (9).

Для четных $s \geq 2$ ряды $E_s(q) = 1 - 2s\zeta_q(s)/B_s$, где $B_s \in \mathbb{Q}$ – числа Бернулли, известны как *ряды Эйзенштейна.* Поэтому из устройства пространства модулярных форм следует, что функции $\zeta_q(2)$, $\zeta_q(4)$, $\zeta_q(6)$ алгебраически независимы над $\mathbb{Q}[q]$, в то время как остальные четные q-дзета-значения являются многочленами (с коэффициентами из $\mathbb{Q}$) от $\zeta_q(4)$ и $\zeta_q(6)$.

Цель работы

- Получение эффективных оценок снизу дробных долей некоторых последовательностей действительных чисел с помощью рациональных аппроксимаций и гипергеометрической конструкции.
- Доказательство трансцендентности и алгебраической независимости некоторых q-рядов.

Научная новизна

В диссертации решены следующие новые задачи.

1. Доказана эффективная нижняя оценка для $\|(4/3)^k\|$ в зависимости от k.

2. Получена оценка на расстояние $\|3^{1/3}2^k\|$ при k, превосходящих некоторую эффективную границу.

3. Доказаны теоремы о линейной и алгебраической незавасимости над $\mathbb{C}(q)$ некоторых q-рядов.

Основные методы исследования

В работе используются следующие методы исследования: приближения Паде, гипергеометрические ряды и арифметический метод в улучшении знаменателей рациональных приближений.

Теоретическая и практическая ценности работы

Диссертация имеет теоретический характер. Предложенные в диссертации методы и полученные результаты представляют интерес для специалистов теории чисел.

Апробация работы

Результаты диссертации докладывались на следующих научно-исследовательских семинарах и научных конференциях:

- Научно-исследовательский семинар по теории чисел (Чл.-корр. РАН Ю.В. Нестеренко, проф. Н.Г. Мощевитин), неоднократно в 2009–2010 гг.

- Семинар “Диофантовы приближения и трансцендентные числа” (Чл.-корр. РАН Ю.В. Нестеренко, асс. Е.А. Уланский), 2009 г.
- International scientific conference “Diophantine and analytic problems in number theory” (Moscow, MSU, 2007).

Публикации

Результаты автора по теме диссертации опубликованы в трех работах, список которых приведен в конце автореферата [1]–[4].

Структура и объем диссертации

Диссертационная работа состоит из введения, трех глав и библиографии (25 наименований). Общий объем диссертации составляет 65 страниц.

Краткое содержание работы

Во введении к диссертации излагается история рассматриваемых вопросов, показана актуальность темы и сформулированы основные результаты. Также приведены формулировки известных ранее результатов в рассматриваемых областях, снабженные подробными ссылками.

Содержание главы 1

В главе 1 проведена эффективизация нижней оценки для $\|(4/3)^k\|$, а именно, получен следующий результат.

Теорема 1. Для $\|(4/3)^k\|$ имеем

$$\left\|\left(\frac{4}{3}\right)^k\right\| > 0.4910^k \qquad \text{при} \quad k \geq 5\,868\,122\,745\,713\,241\,570.$$

Кроме того, получена оценку

Теорема 2. Для $\|(3/2)^k\|$ имеем

$$\left\|\left(\frac{3}{2}\right)^k\right\| > 0.5795^k \qquad \text{при} \quad k \geq 871\,387\,440\,264.$$

Величины наименьших значений параметра k в теоремах 1 и 2 обусловлены необходимостью оценивать количество простых в большом числе интервалов: при этом требуется высокая точность. Проверка неравенств в теоремах при меньших k остается за пределами вычислительных возможностей.

Содержание главы 2

В главе 2 автор получает оценки вида

$$\|\xi\alpha^k\| > C^k \qquad \text{для всех} \quad k \geq K$$

для конкретных значений ξ и α. Так, доказана следующая

Теорема 3. Имеет место оценка

$$\|3^{1/3}2^k\| > 0.3568^k \qquad \text{при} \quad k > K. \tag{10}$$

Заметим, что из наилучшей на данный момент эффективной оценки меры числа $3^{1/3}$

$$\mu(3^{1/3}) = 2.692661368\ldots$$

следовала бы оценка

$$\|3^{1/3}2^k\| > 0.3093^k \qquad \text{при} \quad k > K.$$

Содержание главы 3

В главе 3 мы получаем следующие результаты.

Пусть даны ненулевые многочлены $P_i(q) \in \mathbb{C}[q], i = 1, \ldots, k$. Определим линейную комбинацию

$$P(q) = P(s_1, \ldots, s_k; q) = \sum_{i=1}^{k} P_i(q)\zeta_q(s_i),$$

где $s_1 > \cdots > s_k \geq 1$ и $s_1, \ldots, s_k \in \mathbb{Z}$.

Теорема 4. Начиная с некоторого p_0, зависящего от $s_1, s_2, \ldots, s_k$ и многочлена $P_1(q)$, каждый первообразный корень p-й степени из единицы $p \geq p_0$, является особой точкой функции $P(q)$. В частности, множество всех особых точек функции $P(q)$ всюду плотно на окружности $|q| = 1$, и она трансцендентна.

В качестве следствия теоремы 4 получено решение следующей задачи, сформулированной в Зудилиным[10].

Задача 0.1. Доказать, что q-дзета-значения $\zeta_q(1), \zeta_q(2), \zeta_q(3), \ldots$ как функции от q линейно независимы над $\mathbb{C}(q)$.

Следствие. Функции $\zeta_q(s)$, $s \geq 1$, линейно независимы над $\mathbb{C}(q)$.

Также, Зудилиным[11] поставлена

Задача 0.2. Доказать, что q-функциональное множество, включающее три четные q-дзета-значения $\zeta_q(2), \zeta_q(4), \zeta_q(6)$ и все нечетные q-дзета-значения $\zeta_q(1), \zeta_q(3), \zeta_q(5), \ldots$, состоит из алгебраически независимых над $\mathbb{C}(q)$ функций.

В этом направлении доказаны следующие теоремы.

Теорема 5. При любом $s > 1$ функции $\zeta_q(1)$ и $\zeta_q(s)$ алгебраически независимы над $\mathbb{C}(q)$.

Теорема 6. Пусть для некоторого набора $s_1, s_2, \ldots, s_k \in \mathbb{N}$ чисел таких, что $s_i > 1$, $i = 1, \ldots, k$, функции $\zeta_q(s_1), \zeta_q(s_2), \ldots, \zeta_q(s_k)$ алгебраически независимы над $\mathbb{C}(q)$. Тогда функции $\zeta_q(1)$ и $\zeta_q(s_1), \zeta_q(s_2), \ldots, \zeta_q(s_k)$ также алгебраически независимы над $\mathbb{C}(q)$.

Теорема 7. Функции $\zeta_q(1)$ и $\zeta_q(2)$, $\zeta_q(4)$, $\zeta_q(6)$ алгебраически независимы над $\mathbb{C}(q)$.

Благодарности

Автор выражает благодарность своим научным руководителям кандидату физико-математических наук, доценту В.В. Зудилину за постановку задач и внимание к работе и доктору физико-математических наук, профессору А.И. Галочкину за помощь в ее подготовке.

Автор благодарит весь коллектив кафедры теории чисел механико-математического факультета МГУ и лично доктора физико-математических наук, чл.-корр. РАН Ю.В. Нестеренко и доктора физико-математических наук, профессора Н.Г. Мощевитина за помощь и пожддержку.

[10] В.В. Зудилин, “О диофантовых задачах для q-дзета-значений”, *Матем. заметки* **72**:6, 2002, 936–940.

[11] В.В. Зудилин, “О диофантовых задачах для q-дзета-значений”, *Матем. заметки* **72**:6, 2002, 936–940.

Работы автора по теме диссертации

[1] Ю. А. Пупырев, "О линейной и алгебраической независимости q-дзета-значений", *Матем. заметки* **78**:4, 2005, 608–613.

[2] Ю. А. Пупырев, "Эффективизация нижней оценки для $\|(4/3)^k\|$", *Матем. заметки* **85**:6, 2009, 927–935.

[3] Ю. А. Пупырев, "Рациональные приближения числа $\sqrt[3]{3}$", *Матем. заметки* **87**:5, 2009, 736–747.

[4] Yu. A. Pupyrev "Linear and algebraic independence of q-zeta-values", *Abstracts of International scientific conference "Diophantine and analytic problems in number theory"* MSU, 2007, 29.

Пупырев Юрий Александрович

Арифметические приложения теории гипергеометрических рядов

Подписано в печать 17.01.2011

Формат 60×90 1/16   Усл. печ. л. 0,75   Тираж 100 экз.

Отпечатано в Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН

Москва, 119991, ул. Губкина, 8.