МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи
УДК 517.538.2

Краснобаев Игорь Олегович

АППРОКСИМАЦИЯ ТИПА МЮНЦА-САСА

01.01.01 — вещественный, комплексный и
функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва, 2010

Работа выполнена на кафедре математического анализа механико-математического факультета Московского Государственного Университета имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Седлецкий Анатолий Мечиславович.
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Буслаев Виктор Иванович, кандидат физико-математических наук, доцент Шерстюков Владимир Борисович.
Ведущая организация:	Московский Технический Университет Связи и Информатики.

Защита диссертации состоится 4 марта 2011 г. в 16 час. 40 мин. на заседании диссертационного совета Д 501.001.85 при Московском Государственном Университете им. М. В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские Горы, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 4 февраля 2011 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д 501.001.85 при МГУ,
доктор физико-математических
наук, профессор

В. Н. Сорокин

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы

Тематика работы берет начало в известных теоремах Мюнца[1] и Саса[2]. Данными авторами рассматривается проблема описания полных систем степеней $\{x^{\mu_n}\}_{n=1}^{\infty}$ в пространствах $C_0[0,1]$ (пространстве непрерывных на отрезке $[0,1]$ функций $f(x)$, таких что $f(0)=0$) и $L^p(0,1)$.

С течением времени данная проблема, называемая теперь проблемой Мюнца-Саса, трансформировалась в эквивалентную проблему описания полных систем из экспонент

$$\{e^{-\lambda_n t}\}_{\lambda_n \in \Lambda}, \quad \Lambda = \{\lambda_n \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda_n > 0\}. \tag{1}$$

в пространствах C_0 (пространстве непрерывных на $[0,\infty)$ функций с sup - нормой, для которых $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$) и L^p на полупрямой R^+. Преимущество такой переформулировки проблемы заключается в возможности применения аналитических методов и методов функционального анализа, дающих наиболее полные результаты, хотя при этом приходится ограничиться показателями $p \geqslant 1$. Представляет интерес описание полных систем и в других функциональных пространствах на полупрямой, в частности, в весовых пространствах.

Развитию теории способствовали работы Р.Пэли и Н.Винера, Н.Левинсона, Л. Шварца, М. Грама, А. Зигеля, А.М. Седлецкого, П. Боруайна и Т. Эрдели, В.И. Ладыгина и других математиков, что привело к целому ряду значительных достижений.

Отправной точкой в нашем изложении является условие Саса

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Re}\lambda_n}{1+|\lambda_n|^2} = \infty. \tag{2}$$

Известно, что условие (2) достаточно для полноты системы (1) в L^p, $p \geqslant 2$ и в C_0 и необходимо для ее полноты в L^p, $1 \leqslant p \leqslant 2$. В частности, система (1) полна в L^2 тогда и только тогда, когда выполнено условие (2). Данное утверждение при $p=2$ составляет содержание известной теоремы Саса, переформулированной для системы (1).

---

[1]Müntz Ch. *Über den Approximationssatz von Weierstrass* H.A. Schwartz Festschrift. — Berlin: Hermann, 1914. — P.303-312.

[2]Szász O., *Über die Approximation stetiger Functionen durch lineare Aggregate von Potenzen* // Math. Ann. — 1916. — V.77. — P.482-496.

Условие (2) при $1 \leqslant p < 2$ не является достаточным (М. Грам[3]). Вопрос о необходимости условия (2) при $p > 2$ открыт.

В случае пространства C_0, условие (2) не является необходимым (А. Зигель[4]). Этот факт заостряет интерес к задаче отыскания необходимых условий полноты системы (1) в пространстве C_0.

Первым содержательным результатом в этом направлении является необходимое условие Саса[2]:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Re}\lambda_n + 1}{1 + |\lambda_n|^2} = \infty.$$

Зигелю[4] удалось улучшить результат, однако, более тонкое необходимое условие было получено Н.Левинсоном[5]. А именно,

Теорема А. *Пусть $\theta(x)$ — положительная, неубывающая при $x \geqslant 0$ функция с условием*

$$\int^{\infty} \frac{\theta(x)}{1+x^2}\,dx < \infty. \tag{3}$$

Если система (1) полна в C_0 и L^p, $\quad p > 2$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Re}\lambda_n + \exp(-\theta(|\lambda_n|))}{1 + |\lambda_n|^2} = \infty.$$

Необходимое условие, полученное Зигелем, содержится в Теореме Левинсона при $\theta(x) = |x|^{\alpha}$, $0 < \alpha < 1$.

Необходимое условие Теоремы А является более содержательным, чем необходимое условие Саса в том случае, когда *единственной предельной точкой* последовательности Λ является бесконечно удаленная точка. (Если последовательность Λ ограничена, то это условие, в сущности, ничем не отличается от необходимого условия Саса).

Теорема А была распространена А.М. Седлецким[6] на случай *конечного числа предельных* точек последовательности Λ на мнимой оси, одна из которых, возможно, совпадает с бесконечностью. А именно, если последовательность $\Lambda = \{\lambda_n : \operatorname{Re}\lambda_n > 0\}$ имеет вид

$$\Lambda = \Lambda^{\infty} \cup \Lambda^1 \cup \ldots \cup \Lambda^m,$$

[3]Grum M. *On the theorems of Müntz and Százs. Corrigendum and Addendum*// J. London Math. Soc. — 1957.—V.32. — P.517.

[4]Siegel A. *On the Müntz-Szász theorem for $C[0,1]$*// Proc. Amer. Math. Soc. —1972. —V.36. — P. 161-166.

[5]Levinson N. *On the Szász-Müntz theorem.* // J. Math. Anal. Appl. — 1974. — V.48. — P.264-269.

[6]Седлецкий А.М. *Классы аналитических преобразований Фурье и экспоненциальные аппроксимации.* — Москва: Физматлит. — 2005 г.

где

$$\Lambda^k = \{\lambda_{n,k} : \lambda_{n,k} \to i\gamma_k, n \to \infty, \gamma_k \in \mathbb{R}\}_{n=1}^{\infty}, \quad k = 1, ..., m,$$
$$\Lambda^\infty = \{\lambda_{n,\infty} : \lambda_{n,\infty} \to \infty, n \to \infty\}_{n=1}^{\infty},$$

а $\theta(x)$ — неотрицательная, неубывающая при $x \geqslant 0$ функция, удовлетворяющая условию (3), то из полноты системы (1) в C_0 и L^p, $p > 2$ следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Re}\lambda_{n,\infty} + \exp(-\theta(|\lambda_{n,\infty}|))}{1 + |\lambda_{n,\infty}|^2} +$$
$$+ \sum_{k=1}^{m} \sum_{n} \left(\operatorname{Re}\lambda_{n,k} + \exp\left(-\theta\left(\frac{1}{|\lambda_{n,k} - i\gamma_k|}\right)\right)\right) = \infty.$$

Все упомянутые необходимые условия содержательны в случае не более чем конечного множества предельных точек последовательности Λ на мнимой оси. Естественно, представляет интерес вопрос о необходимом условии (столь же содержательном) для множества предельных точек большей мощности.

В данной работе в **Главе 1** продолжается отыскание необходимого условия полноты системы (1) в пространствах L^p, $p > 2$ и C_0. А именно, рассматривается случай, когда множество предельных точек последовательности Λ на мнимой оси *счетно и отделимо.*

Как уже отмечалось, условие Саса (2) не является необходимым для полноты системы (1) в пространстве C_0 (при произвольном расположении точек Λ). Однако, как показывает Теорема А.М. Седлецкого[7], если

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log dist\,(iy, \Lambda)}{1 + y^2} dy > -\infty, \tag{4}$$

то условие (2) является необходимым. Доказательство этого факта существенно опирается на описание нулей функций класса A^∞ в круге, то есть класса всех не тождественных аналитических в единичном круге функций, все производные которых ограничены в нем. А именно, если ввести обозначения $D = \{z : \ |z| < 1\}$, $T = \{z : \ |z| = 1\}$, то для того, чтобы замкнутое множество $Z \subset \overline{D} = D \cup T$ являлось множеством нулей функции $f \in A^\infty$, необходимо и достаточно, чтобы множество $Z \cap D = \{r_k e^{i\theta_k}\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяло условию Бляшке в круге:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - r_k) < \infty$$

[7] Седлецкий А.М. *Классы аналитических преобразований Фурье и экспоненциальные аппроксимации.* — Москва: Физматлит. — 2005 г.

и выполнялось следующее условие

$$\int_{-\pi}^{\pi} \log dist\left(e^{i\theta}, Z\right) d\theta > -\infty. \tag{5}$$

Данное утверждение доказано Тэйлором и Вильямсом[8].

Нельсон[9] дал описание нулей функции класса A^∞ в другом виде

Теорема B. *(J.D. Nelson) Для того, чтобы замкнутое множество*

$$Z \subset \overline{D} = D \cup T$$

являлось множеством нулей функции $f \in A^\infty$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия

1. *множество $Z \cap D = \{r_k e^{i\theta_k}\}_{k=1}^{\infty}$ должно удовлетворять условию*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1 - r_k) < \infty,$$

2. *множество $M = (Z \cap T) \cup \{e^{i\theta_k}\}$ является множеством Карлесона.*

При этом под множеством Карлесона понимается замкнутое множество M меры нуль на единичной окружности, для которого

$$\int_{-\pi}^{\pi} \log dist\left(e^{i\theta}, M\right) d\theta > -\infty. \tag{6}$$

Разница представленных утверждений в том, что условие (5) на последовательность Z перешло в условие (6), накладываемое на множество M — множество радиальных проекций точек последовательности Z на единичную окружность.

В связи с этим был поставлен вопрос: можно ли в Теореме А.М. Седлецкого условие (4) заменить условием, аналогичным условию Карлесона для полуплоскости, которое принимает вид

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\log dist\,(iy, \{i\mathrm{Im}\,\lambda_n\})}{1+y^2} dy > -\infty. \tag{7}$$

Ответ прост. Так как $dist\,(iy, \lambda_n) \geqslant dist\,(iy, i\mathrm{Im}\,\lambda_n)$, то в классе последовательностей $\Lambda = \{\lambda_n \,:\, \mathrm{Re}\,\lambda_n > 0\}$, для которых выполняется условие (7),

[8]Taylor B.A. and Williams D.L., *Zeros of Lipschitz functions analytic in the unit disc*// Michigan Math. J. — 1971. — V.18. — P.129-139.

[9]Nelson,J.D. *A characterization of zero sets for A^∞*//Michigan Math. J. — 1971. — V.18. — P. 141-147.

условие (2) необходимо для полноты системы $e(\Lambda)$ в пространстве C_0. Тем не менее, переход от условия (4) к условию (7) послужил толчком к работе в следующем направлении.

Обозначим через $A^\infty(\operatorname{Re} z > 0)$ класс всех не тождественных аналитических в правой полуплоскости функций, ограниченных в ней вместе со всеми своими производными. Сформулированное выше утверждение дает повод рассматривать задачу описания нулей функций класса $A^\infty(\operatorname{Re} z > 0)$ (как самостоятельную задачу), как через точки λ_n, так и через их проекции на мнимую ось. Отчасти, поставленная задача объясняется и желанием получить для полуплоскости аналог Теоремы Нельсона.

При конформном отображении правой полуплоскости на единичный круг, ортогональные проекции точек λ_n на мнимую ось не перейдут в радиальные проекции их образов на единичную окружность, что и объясняет сложность распространения Теоремы Нельсона на полуплоскость. В **Главе 3** получено описание нулей функций A^∞ в полуплоскости через условие Бляшке на них и условие на проекции данных нулей на мнимую ось.

В работе также рассматривается вопрос о полноте системы (1) в весовых пространствах на полупрямой.

Пусть $w(t)$ — вес на $\mathbb{R}^+$ (то есть измеримая по Лебегу, почти всюду положительная функция на $\mathbb{R}^+$). Через $L^p_{w(t)}$ обозначаем пространство измеримых (относительно меры $w(t)dt$) на $\mathbb{R}^+$ функций с нормой

$$||f||_{p,w(t)} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^+} |f(t)|^p w(t) dt \right)^{1/p}, 1 \leqslant p < \infty.$$

К настоящему моменту наиболее изученным (с точки зрения полноты) является случай степенного веса: $w(t) = t^\alpha,\ \alpha > -1$. Так, известно, что условие Саса

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} \lambda_n}{1 + |\lambda_n|^2} = \infty. \tag{8}$$

является необходимым условием полноты системы (1) в пространствах

$$L^p_{t^\alpha}, \quad p \geqslant 1,\ \alpha \geqslant \max(0, p-2)$$

и является достаточным для полноты данной системы в пространствах

$$L^p_{t^\alpha}, \quad p > 1,\ -1 < \alpha \leqslant \min(0, p-2).$$

Однако, также известно, что условие (8) не является достаточным для полноты системы (1) в пространствах

$$L^p_{t^\alpha}, \quad p \geqslant 1,\ \alpha > \min(0, p/2 - 1)$$

и не является необходимым для полноты системы (1) в пространствах

$$L^p_{t^\alpha}, \quad p > 1,\ -1 < \alpha < \min(0, p/2 - 1). \tag{9}$$

В связи с этим, в частности, возникает вопрос об отыскании необходимых условий полноты системы (1) в пространствах (9). В **Главе 2** получено такое условие в случае, когда $p = 2$, $-1 < \alpha < 0$, при некотором ограничении на расположение точек Λ.

Цель работы

- Исследовать проблему описания полных систем из экспонент в пространстве C_0 на полупрямой и получить необходимое условие полноты системы экспонент $e(\Lambda)$ в указанном пространстве в случае, когда мощность множества предельных точек последовательности Λ на мнимой оси более чем конечна.

- Исследовать проблему описания полных систем из экспонент в весовых пространствах интегрируемых функций.

- Описать нули функций класса A^∞ в полуплоскости через их проекции на мнимую ось.

Научная новизна

В диссертации получены следующие новые результаты

- Найдено необходимое условие полноты систем экспонент $e(\Lambda)$ в пространствах C_0 и L^p, $p > 2$ на полупрямой в случае, когда множество предельных точек последовательности Λ на мнимой оси счетно и отделимо.

- Найдено необходимое условие полноты системы экспонент $e(\Lambda)$ в весовых пространствах $L^2_{w(x)}$ на полупрямой, где $w(x) = l(x)x^\alpha$, $-1 < \alpha < 0$, $l(x)$ — медленно меняющаяся функция, при определенных ограничениях на расположение точек Λ.

- Получено описание нулей функции класса A^∞ в полуплоскости через условие Бляшке на них и условие на их проекции на мнимую ось.

Методы исследования

В работе применяются методы комплексного анализа и теории аппроксимации.

Теоретическая и практическая ценность

Работа носит теоретический характер. Ее результаты могут найти применение в дальнейших исследованиях по теории аппроксимации и комплексному анализу.

Апробация работы

Основные результаты диссертации докладывались

- на семинаре механико-математического факультета Московского Государственного Университета имени М.В. Ломоносова "Негармонический анализ" под руководством профессора А. М. Седлецкого (2004-2010 гг.).
- на семинаре механико-математического факультета Московского Государственного Университета имени М.В. Ломоносова "Тригонометрические и ортогональные ряды" под руководством профессора Т.П. Лукашенко, профессора М.И. Дьяченко, профессора В.А. Скворцова, профессора М.К. Потапова (декабрь 2010 г.).
- на Воронежской зимней математической школе "Современные методы теории функций и смежные проблемы" (г. Воронеж, январь 2007 г.).
- на международной конференции "Ломоносов 2010" (г. Москва, апрель 2010 г.).
- на международной конференции "Математическая физика и ее приложения" (г. Самара, август 2010 г.).

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в 4 работах автора. Их список приведен в конце автореферата. Работ, написанных в соавторстве, нет.

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения и трех глав, разбитых в общей сложности на 4 параграфа. Объем диссертации 70 страниц. Список литературы включает 23 наименования.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во **введении** дан краткий обзор по теме диссертации, сформулированы рассматриваемые в диссертации задачи и изложены основные результаты.

Глава 1 диссертации посвящена задаче отыскания необходимого условия полноты системы

$$\{e^{-\lambda_n t}\}_{\lambda_n \in \Lambda}, \quad \Lambda = \{\lambda_n \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda_n > 0\}$$

в пространствах C_0 и L^p на полупрямой, $p > 2$ в случае, когда множество предельных точек последовательности $\{\lambda_n\}$ на мнимой оси счетно и отделимо. В **параграфе 1** приведены вспомогательные утверждения, используемые в данной главе.

В **параграфе 2** сформулирован и доказан основной результат первой главы.

Теорема (1.1). *Пусть последовательность*

$$\Lambda = \{\lambda_n : \operatorname{Re}\lambda_n > 0\}$$

имеет вид

$$\Lambda = \Lambda^1 \cup \Lambda^2 \cup \ldots \cup \Lambda^k \cup \ldots,$$

где

$$\Lambda^k = \{\lambda_{n,k}\}_{n=1}^{\infty}, \quad \lambda_{n,k} \to i\gamma_k, n \to \infty,$$

при этом числа $\gamma_k \in \mathbb{R}$ таковы, что

$$\inf_{n \neq m} |\gamma_n - \gamma_m| = \rho > 0.$$

Пусть $\theta(x)$ — неотрицательная, неубывающая при $x \geqslant 0$ функция, удовлетворяющая условию

$$\int_0^\infty \frac{\theta(x)}{1+x^2}dx < \infty.$$

Тогда, если система

$$e(\Lambda) = \left\{e^{-\lambda_n t} : \lambda_n \in \Lambda\right\}$$

полна в C_0 или $L^p(\mathbb{R}^+)$, $p > 2$, то для всякой неотрицательной последовательности $a_k \in l^1$ выполняется условие

$$\sum_k \sum_n \left(\operatorname{Re}\lambda_{n,k} + \exp\left(-a_k\theta\left(\frac{1}{|\lambda_{n,k} - i\gamma_k|}\right)\right)\right) = \infty\,.$$

Теорема (1.1) доказана в диссертации с помощью модификации доказательства Левинсона Теоремы А.

Глава 2 диссертации посвящена отысканию необходимого условия полноты системы

$$e(\Lambda) = \{e^{-\lambda_n t}\}_{\lambda_n \in \Lambda}, \quad \Lambda = \{\lambda_n \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda_n > 0\}$$

в весовом пространстве $L^2_{w(t)}$ на полупрямой с весом

$$w(t) = l(t)t^{\alpha}, \ -1 < \alpha < 0,$$

где $l(t)$ — медленно меняющаяся функция (на бесконечности), то есть положительная, измеримая при $t > A > 0$ функция такая, что при любом вещественном $\lambda > 0$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{l(\lambda t)}{l(t)} = 1.$$

В **параграфе 1** приведены основные вспомогательные определения и утверждения. В **параграфе 2** сформулировано и доказано необходимое условие полноты системы $e(\Lambda)$ в пространствах $L^2_{w(t)}$, $w(t) = l(t)t^{\alpha}, \ -1 < \alpha < 0$:

Теорема (2.1). *Пусть* $-1 < \alpha < 0$. *Пусть дана последовательность*

$$\lambda_n \in \{w : \operatorname{Im} w \in [A_1, A_2], \ 0 < \operatorname{Re} w < A\}, \ A_1, A_2 \in \mathbb{R}, \ A \in \mathbb{R}^+$$

и медленно меняющаяся функция $l(t)$ *такая, что*

$$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{-\alpha} \leqslant \frac{l(n-1)l(n+1)}{l(n)^2}, \ n \in \mathbb{N}. \tag{10}$$

Тогда, если система экспонент $e(\Lambda) = \{e^{-\lambda_n t} : \lambda_n \in \Lambda\}$ *полна в* $L^2_{l(t)t^{\alpha}}$, *то*

$$\sum_n \frac{(\operatorname{Re}\lambda_n)^{1+\alpha}}{l\left(\frac{1}{2\operatorname{Re}\lambda_n}\right)} = \infty.$$

В главе 2 показано, что условие (10) выполняется для достаточно широкого класса функций. В частности, оно верно для функций

$$l(t) = \ln^{\gamma} t, \ \gamma \in \mathbb{R}, \ t > t_0,$$

а также для всевозможных степеней итераций логарифма.

Теорема (2.1) доказана с помощью применения результата Шапиро и Шилдза[10] о нулях аналитических функций в круге специального вида.

[10] Shapiro H.S. and Shields A.L., *On the zeros of functions with finite Dirichlet integral and some related function spaces*// Math. Z. — 1962.—V.80. — P. 217-229.

В случае, когда последовательность λ_n ограничена, то есть удовлетворяет условиям Теоремы (2.1), условие Саса, о котором говорилось ранее, принимает вид:

$$\sum_n \operatorname{Re}\lambda_n = \infty.$$

Как уже говорилось, оно не следует из полноты системы $e(\Lambda)$ в пространстве $L^2_{t^\alpha}$, $-1 < \alpha < 0$. Однако, как показывает частный случай Теоремы (2.1) в случае, когда $l(t)$ тождественно равна 1, из полноты системы экспонент $e(\Lambda)$ в пространстве $L^2_{t^\alpha}$, $-1 < \alpha < 0$ следует условие, которое учитывает параметр α. А именно,

$$\sum (\operatorname{Re}\lambda_n)^{1+\alpha} = \infty.$$

В порядке выяснения точности показателя $1+\alpha$, присутствующего в сформулированной выше теореме, в **параграфе 2** доказано, что он является точным, если вместо пространства $L^2_{l(t)t^\alpha}$ рассмотреть подпространство в $L^2_{t^\alpha}$, состоящее из функций, сохраняющих постоянные значения на интервалах вида $(n, n+1)$.

В данном параграфе также доказано следствие Теоремы (2.1), предлагающее необходимые условия полноты системы $e(\Lambda)$ в пространствах $L^p_{t^\alpha}$ при $1 \leqslant p < 2$, $-p/2 < \alpha < 0$:

Следствие (2.1). *Пусть дана последовательность* $\Lambda = \{\lambda_n\}$ *такая, что*

$$\lambda_n \subset \{w : \operatorname{Im} w \in [A_1, A_2],\ 0 < \operatorname{Re} w < A\},\ A_1, A_2 \in \mathbb{R},\ A \in \mathbb{R}^+.$$

Если система

$$e(\Lambda) = \{e^{-\lambda_n t} : \lambda_n \in \Lambda\}$$

полна в пространстве $L^p_{t^\alpha}$ *при*

$$1 \leqslant p \leqslant 2,\ -\frac{p}{2} < \alpha < 0,$$

то

$$\sum_n (\operatorname{Re}\lambda_n)^{1+2\alpha/p} = \infty.$$

Глава 3 диссертации посвящена вопросу описания нулей функций класса A^∞ в полуплоскости через условие Бляшке на них и условие на их проекции на мнимую ось.

Пусть дана последовательность

$$\Lambda = \{\lambda_n \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda_n > 0\}.$$

Условие Бляшке для последовательности Λ выглядит следующим образом:

$$\sum_n \frac{\operatorname{Re}\lambda_n}{1+|\lambda_n|^2} < \infty, \tag{11}$$

а условие на проекции последовательности Λ на мнимую ось выглядит следующим образом:

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\log dist\,(y, \{\operatorname{Im}\lambda_n\})}{1+y^2} dy > -\infty. \tag{12}$$

В диссертации сначала доказана следующая теорема:

Теорема (3.1).

Если последовательность Λ удовлетворяет условиям (11) и (12), то существует функция f, принадлежащая классу $A^\infty(\operatorname{Re} z > 0)$ и обращающаяся в 0 в точках Λ.

Если для любой последовательности $\Lambda' = \{\lambda'_n\}$ такой, что

$$\operatorname{Im}\lambda'_n = \operatorname{Im}\lambda_n, \quad \sum_n \frac{\operatorname{Re}\lambda'_n}{1+|\lambda'_n|^2} < \infty,$$

существует функция $f \in A^\infty(\operatorname{Re} z > 0)$, обращающаяся в 0 в точках Λ', то последовательность Λ удовлетворяет условиям (11) и (12).

Теорема (3.1) является аналогом Теоремы Констрона[11] для круга, которая доказана в диссертации для полуплоскости. Она может быть улучшена при дополнительном требовании к последовательности Λ, что и является основным результатом этой главы, заключенным в следующей теореме:

Теорема (3.2). *Пусть дана последовательность*

$$\Lambda = \{\lambda_n \in \mathbb{C} : \ 0 < \operatorname{Re}\lambda_n < A \in \mathbb{R}^+\}.$$

Тогда последовательность Λ является множеством нулей функции из класса $A^\infty(\operatorname{Re} z > 0)$ тогда и только тогда, когда выполнены условия (11) и (12).

Теорема (3.2) доказана в диссертации с помощью модификации доказательства Теоремы B, предлагающей описание нулей функций класса A^∞ в круге. Потребность в модификации указанного доказательства была вызвана тем фактом, что при конформном отображении круга на полуплоскость, радиальные проекции точек единичного круга на единичную окружность не переходят в ортогональные проекции образов данных точек на мнимую ось,

[11]Caughran J.G. *Zeros of analytic functions with infinitely differentiable boundary values*//Proc. Amer. Math. Soc. — 1970. — V.24. — P.700-704.

а значит нельзя утверждать тот факт, что условия на радиальные и ортогональные проекции при конформном отображении перейдут друг в друга.

Теорема (3.2) являлась бы аналогом Теоремы B, доказанной Нельсоном, если бы не дополнительное требование к расположению точек λ_n в виде $\operatorname{Re}\lambda_n < A \in \mathbb{R}^+$.

Показано, что условие $\operatorname{Re}\lambda_n < A \in \mathbb{R}^+$ является существенным для справедливости Теоремы (3.2). А именно, доказано, что последовательность

$$\lambda_n = n^2 + i\log n$$

является множеством нулей некоторой функции из класса $A^\infty(\operatorname{Re} z > 0)$, но при этом для нее не выполняется условие (12).

Благодарности

Автор глубоко благодарен своему научному руководителю, профессору, доктору физико-математических наук Анатолию Мечиславовичу Седлецкому за постановку задач, помощь в различных вопросах и постоянное внимание к работе.

Список работ автора по теме диссертации

[1] *Краснобаев И. О.* Необходимое условие полноты системы $\{e^{-\lambda_n t} \mid \operatorname{Re}\lambda_n > 0\}$ в пространствах $C_0(\mathbb{R}_+)$ и $L^p(\mathbb{R}_+)$, $p > 2$. // Математические заметки, 2008, том 83, вып. 6, стр. 831–842.

[2] *Краснобаев И. О.* Необходимое условие полноты системы экспонент в пространстве $L^2_\alpha, -1 < \alpha < 0$. // "Депонированные научные работы", № 12, 2010. Москва: ВИНИТИ 20.10.2010, № 607-B2010 — 13 с.

[3] *Краснобаев И. О.* Необходимое условие полноты системы $\{e^{-\lambda_n t} \mid \operatorname{Re}\lambda_n > 0\}$ в пространствах $C_0(\mathbb{R}_+)$ и $L^p(\mathbb{R}_+)$, $p > 2$. // Тезисы докл. Воронежской зимней математической школы "Современные методы теории функций и смежные проблемы". Воронеж: ВГУ, 2007. С. 249.

[4] *Краснобаев И. О.* Условие на мнимые части точек последовательности как критерий полноты системы экспонент в пространствах C_0 и L^p. // Материалы международной конференции "Математическая физика и ее приложения". Самара: Книга. — 2010 г. — С. 183.