Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова
Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 519.21

Соболев Виталий Николаевич

ОПТИМИЗАЦИЯ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЙ В ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ

Специальность 01.01.05 -
теория вероятностей и математическая статистика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва, 2010 г.

Работа выполнена на кафедре
теории вероятностей механико-математического факультета
Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова

Научный руководитель доктор физико–математических наук
Сенатов Владимир Васильевич

Официальные оппоненты доктор физико–математических наук,
профессор
Круглов Виктор Макарович

доктор физико–математических наук,
профессор
Хохлов Юрий Степанович

Ведущая организация Санкт - Петербургское отделение
Математического института
им. В.А. Стеклова РАН

Защита состоится 4 марта 2011 г. в 16 часов 40 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.85 при Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, Главное здание МГУ им. М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова (Главное здание МГУ, 14 этаж).

Автореферат разослан 4 февраля 2011 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 501.001.85,
доктор физико-математических наук,
профессор В.Н. Сорокин

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность исследования. Изучение распределений сумм независимых случайных величин - одна из традиционных задач теории вероятностей. Ее актуальность связана с тем, что, с одной стороны, суммы таких величин часто встречаются в практических задачах, с другой стороны, эти распределения являются свертками распределений слагаемых, а свертки в явном виде вычисляются лишь в исключительных случаях и даже в этих случаях расчеты по полученным формулам связаны с преодолением существенных технических трудностей. Сказанное объясняет актуальность получения приближённых формул для распределений сумм независимых случайных величин. Фундаментальным результатом в этом разделе теории вероятностей является центральная предельная теорема (ЦПТ), которая утверждает, что при достаточно широких условиях сумма многих независимых случайных величин имеет приближённо нормальное распределение.

В работе рассматривается простейшая схема суммирования, в которой исходные случайные величины $X_1, X_2, \ldots$ независимы, одинаково распределены и их второй момент конечен. При выполнении последнего условия без ограничения общности можно считать, что математические ожидания исходных случайных величин равны нулю, а их дисперсии - единице. Для этой схемы суммирования ЦПТ утверждает, что при $n \to \infty$

$$F_n(x) = \mathbf{P}\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n}{\sqrt{n}} < x\right) \to \Phi(x)\,,\ -\infty < x < \infty,$$

причем эта сходимость равномерна по всем действительным x, то есть при больших n функции распределения $F_n(x)$ можно заменять на $\Phi(x)$. Здесь и далее

$\Phi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \varphi(u)du\,,\ -\infty < x < \infty\,,$ - функция распределения стандартного нормального закона, $\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}$ - ее плотность.

Замена функций распределения $F_n(x)$ на $\Phi(x)$ обоснована лишь в том случае, когда известна оценка разности $F_n(x)$ и $\Phi(x)$, поэтому одной из актуальных задач в теории суммирования независимых случайных величин является задача о точности аппроксимации в ЦПТ или, как иногда говорят, о скорости сходимости в ЦПТ.

Содержательные оценки близости $F_n(x)$ и $\Phi(x)$ можно получать лишь для случайных величин $X_1, X_2, \ldots,$ у которых существует момент порядка выше второго, и самым известным результатом о точности аппроксимации в ЦПТ является теорема Берри-Эссеена, которая утверждает, что

$$\rho\left(F_n, \Phi\right) = \sup_{-\infty<x<\infty} |F_n(x) - \Phi(x)| \leqslant c\frac{\beta_3}{\sqrt{n}}\,,$$

где $\beta_3 = \mathtt{E}\left|X_1\right|^3 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |x|^3\, dF(x)$ - третий абсолютный момент исходных случайных величин X_1, X_2, ... , а - $c > 0$ постоянная.

История улучшения верхних оценок постоянной c насчитывает не одно десятилетие. Среди последних работ по этой тематике отметим работы В.Ю. Королева, И.Г. Шевцовой[1] и И.С. Тюрина[2]. Нижняя оценка $c \geqslant \frac{3+\sqrt{10}}{6\sqrt{2\pi}} = 0,4097...$ была получена К.-Г. Эссееном[3] в 1956 г. Последняя оценка вместе с неравенством $\beta_3 \geqslant 1$ (для распределений с нулевым средним и единичной дисперсией) показывает, что точность оценки Берри-Эссеена невелика: для того, чтобы $\rho\left(F_n, \Phi\right) \leqslant 10^{-3}$ необходимо $n \geqslant 160\,000$, для n порядка нескольких сотен оценка Берри-Эссеена мало содержательна.

Малая точность оценки Берри-Эссеена связана с тем, что она справедлива для очень широкого класса распределений исходных случайных величин; в некоторых случаях скорость сходимости в ЦПТ оказывается существенно выше, чем в теореме Берри-Эссеена. Так, из одной теоремы И.А. Ибрагимова[4] следует, что если у распределения F конечен момент $\beta_{m+2} = \mathtt{E}\left|X_1\right|^{m+2} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |x|^{m+2}\, dF(x)$, где m - натуральное число, и моменты $\alpha_j = \mathtt{E}X_1^j = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^j dF(x)$ совпадают с соответствующими моментами нормального закона $\Phi(x)$ для

[1] Королев В.Ю., Шевцова И.Г. Уточнение неравенства Берри–Эссеена с приложениями к пуассоновским и смешанным пуассоновским случайным суммам. // Обозрение прикл. и промышл. матем., 2010, т. 17, в. 1, с. 25–56.

[2] Тюрин И.С. О скорости сходимости в теореме Ляпунова. // Теория вероятностей и ее применения, 2010, т. 55, в. 2, с. 250-270.

[3] Essen C.-G. A moment inequality with an application to the central limit theorem. // Skand. Aktuarrietidskr., 1956, vol. 39, p. 160–170.

[4] Ибрагимов И.А. Об асимптотических разложениях Чебышева-Крамера. // Теория вероятн. и ее примен., 1967, т. 12, выпуск 3, с. 596-619.

$j = 1, 2, ..., m+1$, то при некоторой гладкости $F(x)$

$$\rho(F_n, \Phi) = O\left(\frac{1}{n^{m/2}}\right), \, n \to \infty, \tag{1}$$

и известны[5] явные оценки этой величины $O\left(\frac{1}{n^{m/2}}\right)$.

Таких оценок уже при не очень больших m хватило бы для большинства практических расчетов, однако применению этих оценок препятствует упомянутое условие на совпадение моментов α_j, $j = 1, 2, ..., m+1$, с соответствующими моментами нормального закона, а это условие является необходимым для справедливости (1). Однако, последнее ограничение можно обойти, если аппроксимировать $F_n(x)$ суммами функции $\Phi(x)$ и слагаемых, которые убывают при росте n как $\frac{1}{\sqrt{n}}$ и быстрее, и связанных с моментами α_j, $j \geqslant 3$, функции распределения $F(x)$. Такие суммы называются асимптотическими разложениями $F_n(x)$.

Исследованиями асимптотических разложений в ЦПТ занимались В.Ю. Бенткус, А. Бикялис, Й.П. Грам, Б.В. Гнеденко, И.А. Ибрагимов, Г. Крамер, А.А. Марков, Л.В. Осипов, В.В. Петров, Ю.В. Прохоров, Л.В. Розовский, Л. Саулис, В.А. Статулявичус, П. Сурвила, В.В. Ульянов, П.Л. Чебышев, К. Шарлье, Ф. Эджворт, К.-Г. Эссеен. Они получили важные результаты, которые, однако, обладали существенным недостатком: оценки точности аппроксимации, которую гарантируют асимптотические разложения, было невозможно доводить до численных значений.

Первые результаты с явными оценками точности появились в конце 20-го века в работах R. Shimizy[6] и V. Dobric, B.K. Ghosh[7], в которых к нормальному закону $\Phi(x)$ добавлялось только одно слагаемое. Точность такой аппроксимации (при некоторых дополнительных условиях) есть $O\left(\frac{1}{n}\right)$, $n \to \infty$, причем для величин $O\left(\frac{1}{n}\right)$ были указаны явные оценки.

Асимптотические разложения более высокой точности с явными оценками были получены в самом конце 20-го века и их построение было связано с использованием сопровождающих зарядов. Основная идея состояла в следующем. Функции распределения $F_n(x)$ нормированных сумм, введенные выше, суть многократные

---

[5] Сенатов В.В. Центральная предельная теорема: Точность аппроксимации и асимптотические разложения. М.: Книжный дом Либроком, 2009, с. 90.

[6] Shimizu R. On the remainder term for the central limit theorem. // Ann. Inst. Stat. Math., 1974, V.26, p. 195-201.

[7] Dobric V., Ghosh B.K. Some analogs of Berry-Esseen bound for first order Chebychev-Edgeworth expansions. // Stat. Decis., 1996, V.14, №4, p. 383-404.

нормированные свертки распределения $F(x)$ исходных случайных величин, то есть $F_n(x) = F^{*n}(x\sqrt{n})$, где ^{*n} означает свертку n одинаковых распределений. Если для данной функции распределения $F(x)$ подобрать заряд (знакопеременную меру) с функцией распределения $G(x)$ такой, что многократные нормированные свертки $G_n(x) = G^{*n}(x\sqrt{n})$ вычисляются достаточно просто и такой, что функции $F_n(x)$ и $G_n(x)$ при росте n сближаются друг с другом быстрее, чем они сближаются с функцией распределения нормального закона $\Phi(x)$, то в качестве аппроксимации для $F_n(x)$ можно взять функции $G_n(x)$ или асимптотические разложения последних. Функции $G_n(x)$ естественно назвать сопровождающими для $F_n(x)$. Для некоторых функций распределения $F(x)$ сопровождающие заряды для $F_n(x)$ можно подобрать так, чтобы $G_n(x)$ были функциями распределения, однако, в общем случае приходиться использовать заряды.

Выбирать заряды с указанными выше свойствами можно различными способами. Основное требование к ним, как подсказывает упоминавшаяся выше теорема Ибрагимова, состоит в том, чтобы они имели достаточное количество моментов, и первые несколько моментов совпадали с соответствующими моментами функции распределения $F(x)$.

В.В. Сенатов[8] для распределений $F(x)$ с конечным абсолютным моментом порядка $m + 2$, где $m \geqslant 2$ - целое число, строил сопровождающие функции распределения $G_n(x)$, используя функции распределения G с плотностями

$$q(x) = \varphi(x) + \sum_{s=3}^{m+1} \frac{\theta_s}{s!} H_s(x)\varphi(x)\,, \tag{2}$$

где $H_s(x) = (-1)^s \varphi^{(s)}(x) / \varphi(x)$, $s = 0, 1, 2, ..$, - многочлены Чебышева-Эрмита, а числа $\theta_s = \theta_s(F) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} H_s(x) dF(x)$, $s = 3, ..., m + 1$, - моменты Чебышева-Эрмита функции распределения $F(x)$. Моменты $\theta_s(F)$ можно вычислять по формуле

$$\frac{\theta_s(F)}{s!} = \sum_{j=0}^{[s/2]} \frac{(-1)^j}{j! 2^j} \frac{\alpha_{s-2j}(F)}{(s-2j)!}\,,$$

[8] Сенатов В.В. Центральная предельная теорема: Точность аппроксимации и асимптотические разложения. М.: Книжный дом Либроком, 2009, с. 128.

где $\alpha_{s-2j}(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x^{s-2j} dF(x)$ - обычные моменты функции распределения F.

Для моментов Чебышева-Эрмита справедливы равенства

$$i^s \theta_s(F) = \left(e^{t^2/2} f(t) \right)^{(s)} \Big|_{t=0}, s = 0, 1, 2, ...m + 2\,,$$

где f - характеристическая функция функции распределения F, i - мнимая единица, аналогичные равенствам

$$i^s \alpha_s(F) = (f(t))^{(s)} \Big|_{t=0}, s = 0, 1, 2, ...m + 2\,,$$

для моментов и

$$i^s \kappa_s(F) = (\ln f(t))^{(s)} \Big|_{t=0}, s = 0, 1, 2, ...m + 2\,,$$

для семиинвариантов.

Характеристическая функция заряда с плотностью (2) есть

$$g(t) = e^{-\frac{t}{2}^2} \left(1 + \sum_{s=3}^{m+1} \frac{\theta_s}{s!} (it)^s \right), \tag{3}$$

то есть эта характеристическая функция есть произведение характеристической функции $e^{-t^2/2}$ стандартного нормального закона и отрезка ряда Тейлора функции $e^{t^2/2} f(t)$ в окрестности нуля.

С помощью таких зарядов были получены (при соответствующих ограничениях) асимптотические разложения для функций распределения $F_n(x)$ и асимптотические разложения в локальных формах ЦПТ. Точность аппроксимации, которую гарантируют эти разложения, составляет $O\left(\frac{1}{n^{m/2}}\right)$, $n \to \infty$, для величин $O\left(\frac{1}{n^{m/2}}\right)$ были указаны явные оценки, в которых участвовала величина абсолютного момента F порядка $m + 2$. При этом налагались ограничения, состоящие в том, что все значения $|\theta_s|$, $s = 3, ..., m + 1$, невелики, а оценки остаточных частей разложений были очень громоздкими. Упомянутые ограничения на значения моментов можно ослабить, но для этого суммы $X_1 + ... + X_n$ случайных величин необходимо разбивать на блоки, содержащие по несколько слагаемых.

А.Е. Кондратенко[9] использовал заряды, определяющиеся с помощью семиинвариантов, а именно, заряды с характеристическими функциями

[9] Кондратенко А.Е. Точность аппроксимации свёрток распределений асимптотическими разложениями. Кандидатская диссертация. М.: МГУ, 2001.

$$g(t) = e^{-\frac{t}{2}^2 + \sum\limits_{s=3}^{m+1} \frac{\kappa_s}{s!}(it)^s},$$

то есть с характеристическими функциями, которые суть e в степени, совпадающей с разложением $\ln f(t)$ в отрезок ряда Тейлора в окрестности нуля. С помощью таких зарядов были получены разложения, аналогичные тем, что упоминались выше и с более простыми оценками остаточных частей, но класс распределений F, для которых можно использовать такие заряды, был достаточно узким. В частности, при $m = 3$ требовалось, чтобы величина $\kappa_4 = \alpha_4 - 3$ была меньше нуля, то есть $\alpha_4 < 3$, что является очень сильным ограничением.

Здесь надо отметить, что построением асимптотических разложений с использованием семиинвариантов в середине 1960-х занимался В.В. Петров[10]. Сопровождающие заряды он не использовал, ограничения на значения семиинвариантов у него отсутствовали, но при этом оценки точности разложений содержали величины, для которых утверждалось лишь их существование.

Комбинируя идеи построения приведённых выше зарядов, В.В. Сенатов рассмотрел заряды с характеристическими функциями

$$g(t) = e^{-\frac{t}{2}^2} e^{\frac{\theta_3}{3!}(it)^3}, g(t) = e^{-\frac{t}{2}^2 + \frac{\theta_3}{3!}(it)^3}\left(1 + \tfrac{\theta_4}{4!}(it)^4\right),$$

$$g(t) = e^{-\frac{t}{2}^2 + \frac{\theta_3}{3!}(it)^3 + \frac{\theta_5}{5!}(it)^5}\left(1 + \frac{\theta_4}{4!}(it)^4\right). \tag{4}$$

С помощью этих зарядов были получены асимптотические разложения в случае, когда распределение F имеет конечный момент β_{m+2}, для $m = 2, 3, 4$ и 5, эти разложения гарантировали точность $O\left(\frac{1}{n^{m/2}}\right)$, оценки остаточных частей разложений были относительно просты, а единственное ограничение для $m \geqslant 4$ на моменты состояло в том, что $\theta_4 = \alpha_4 - 3 < 6$ (и это ограничение можно ослабить, разбивая суммы случайных величин на блоки из нескольких слагаемых).

Цель работы. Целью диссертации является решение следующих задач, связанных с оптимизацией асимптотических разложений в ЦПТ:

1. Снять ограничения на значения моментов в асимптотических разложениях, для которых известны явные оценки остаточных частей.

2. Построить асимптотические разложения с явными оценками остаточных частей, точность которых выше $O\left(\frac{1}{n^{5/2}}\right)$, $n \to \infty$.

---

[10]Петров В.В. О локальных предельных теоремах для сумм независимых случайных величин. // Теория вероятн. и ее примен., 1964, т. 9, в. 2, с. 343-352.

3. Исследовать возможность построения асимптотических разложений в ЦПТ, которые дают сколь угодно высокую точность аппроксимации, если исходное распределение имеет достаточное количество моментов.

Научная новизна. Основные результаты работы являются новыми и состоят в следующем:

1. Предложен новый вид сопровождающих зарядов, которые позволяют строить асимптотические разложения в ЦПТ без ограничений на моменты исходных случайных величин. С помощью этих зарядов получены новые асимптотические разложения в ЦПТ, гарантирующие точность аппроксимации $O\left(\frac{1}{n^3}\right)$, $n \to \infty$, с явной оценкой остатка.

2. Получены новые формы асимптотических разложений в ЦПТ, которые дают сколь угодно высокую точность аппроксимации, если исходное распределение имеет достаточное количество моментов. Эти формы разложений дают наилучшие из оценок остаточных частей, известных в настоящее время.

3. Получена новая формула для многочленов, участвующих в асимптотических разложениях Эджворта-Крамера. Получено новое представление для моментов Чебышева-Эрмита.

Методы исследования. В работе используются метод характеристических функций, в частности, формулы обращения для преобразования Фурье, метод сопровождающих зарядов, а также другие методы теории вероятностей и математического анализа.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы специалистами в теории вероятностей и смежных областях, таких как математическая статистика, теория случайных процессов.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на Большом семинаре кафедры теории вероятностей механико-математического факультета МГУ под руководством чл.-корр. РАН, проф. А. Н. Ширяева (мех-мат МГУ, 2010 г.), на семинаре "Прикладные задачи теории вероятностей, математической статистики и теории массового обслуживания" под руководством проф. Ю.С. Хохлова, проф. В.В. Рыкова, проф. А.В. Печинкина (РУДН, 2010 г.), на семинаре "Теория риска и смежные вопросы" на факультете ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова под руководством проф. В.Ю. Королёва

(ВМК МГУ, 2010 г.), на "VIII Международных Колмогоровских чтениях" (Ярославль, 2010 г.).

Публикации. По теме диссертации опубликовано две работы в журналах из перечня ВАК, список которых приведен в конце автореферата.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, разбитых на параграфы и пункты, заключения и списка литературы, включающего 96 наименований. Общий объем диссертации составляет 138 страниц.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении приводятся необходимые обозначения и известные результаты, которые используются при построении асимптотических разложений. Здесь же рассматриваются известные асимптотические разложения вида Грама-Шарлье и Эджворта-Крамера.

В первой главе излагается история использования зарядов при построении асимптотических разложений. Здесь же вводятся заряды, которые используются при построении трех асимптотических разложений, о которых пойдёт речь ниже. Это - заряды с характеристическими функциями вида

$$g(t) = e^{-\frac{t}{2}^2 + \sum\limits_{k=1}^{[m/2]} \theta_{2k+1}(it)^{2k+1}}, \; m = 4, 5, 6\,,$$

где $\theta_{2k+1} = \frac{1}{(2k+1)!}\int_{-\infty}^{\infty} H_{2k+1}(x)dF(x)$ - нормированные моменты Чебышева-Эрмита исходных случайных величин с функцией распределения $F(x)$. Мы сохраняем для этих чисел то же самое обозначение, что и для моментов Чебышева-Эрмита; это не приведет к недоразумениям, поскольку далее используются только они. Для этих зарядов и для функции распределения $F(x)$ исходных случайных величин моменты нечетных порядков $2k+1$, $k = 1, ..., [m/2]$, совпадают.

Во втором пункте главы 1 вводятся ограничения на функцию распределения исходных случайных величин. Основное ограничение, которое используется при построении асимптотических разложений для плотностей $p_n(x)$ функций распределения нормированных сумм случайных величин $F_n(x)$ с общей функцией распределения $F(x)$, состоит в следующем.

Условие 1. Пусть у исходных случайных величин с нулевым средним, единичной дисперсией и функцией распределения $F(x)$ существует конечный абсолютный момент порядка $m+2$, где m - целое число, $m \geqslant 2$, и существует число $\nu > 0$ такое, что для характеристической функции $f(t)$ функции распределения F выполняется условие $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^{\nu} dt < \infty$.

Условие, связанное со сходимостью указанного интеграла, гарантирует существование непрерывной плотности $p_n(x) = F_n'(x)$ функции распределения нормированной суммы исходных случайных величин при всех $n \geqslant \nu$ и гарантирует выполнение строгого неравенства $\alpha(T) = \max\{|f(t)| : t \geqslant T\} < 1$ для любого $T > 0$.

При построении всех асимптотических разложений, полученных в диссертации, используется пара (μ, T), где неотрицательная четная функция $\mu(t)$, $e^{-\frac{t^2}{2}} \leqslant \mu(t) \leqslant 1$ и число $T > 0$ таковы, что $|f(t)| \leqslant \mu(t)$ при $|t| \leqslant T$. С помощью пары (μ, T) определяются числа

$$B_{k,n-l} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} |t|^k \mu^{n-l}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) dt\,,\ l,k,n \in \{0,1,2,...\}\,,\ n \geqslant l.$$

Для распределений F с конечным третьим моментом можно положить $\mu(t) = e^{-\frac{t^2}{3}}$, $T = \frac{1}{\beta_3}$. Для распределений с конечным четвертым моментом пару (μ, T) можно подобрать так, что $B_{k,n-l} \to B_k$ при $n \to \infty$, $l,k \in \{0,1,2,...\}$, где B_k - k-й абсолютный момент стандартного нормального закона, делённый на $\sqrt{2\pi}$.

Во втором пункте главы 1 рассматриваются также некоторые алгебраические формулы и преобразования, необходимые в дальнейшем для построения асимптотических разложений. Доказываются две вспомогательные леммы.

В следующих двух пунктах первой главы сформулированы и доказаны теоремы 1-3.

Теорема 1. *Пусть справедливо условие* 1 при $m = 4$. *Тогда для любых действительных* x *и* $n \geqslant \max(\nu, 6)$

$$p_n(x) = \varphi(x) + \tfrac{\theta_3}{n^{1/2}} H_3(x)\varphi(x) + \tfrac{\theta_4}{n} H_4(x)\varphi(x) + \tfrac{\theta_3^2}{2n} H_6(x)\varphi(x) +$$
$$+ \tfrac{\theta_5}{n^{3/2}} H_5(x)\varphi(x) + \tfrac{n-1}{n}\tfrac{\theta_3\theta_4}{n^{3/2}} H_7(x)\varphi(x) + \tfrac{\theta_3^3}{3! n^{3/2}} H_9(x)\varphi(x) + R_{pn}(x)\,,$$

где

$$|R_{pn}(x)| \leq \tfrac{\|\theta_6\| B_{6,n-1}}{n^2} + \tfrac{\theta_3^2}{2}\tfrac{B_{6,n}}{n^2} + \tfrac{|\theta_3\theta_5| B_8}{n^2} + \tfrac{|\theta_4|\|\theta_4\| B_{8,n-1}}{2n^2} + \tfrac{\theta_3^2|\theta_4|}{2}\tfrac{B_{10}}{n^2} +$$

$$+\frac{\theta_3^4}{4!}\frac{B_{12}}{n^2}+\frac{\left\|\theta_7^{(5)}\right\|B_{7,n-1}}{n^{5/2}}+\frac{|\theta_4\theta_5|B_9}{2n^{5/2}}+\frac{|\theta_4|\left\|\theta_5^{(3)}\right\|B_{9,n-1}}{2n^{5/2}}+$$
$$+\frac{|\theta_3\theta_5|B_{8,n}}{n^3}+\frac{\theta_3^2|\theta_4|B_{10,n}}{4n^3}+\frac{\theta_5^2}{2}\frac{B_{10}}{n^3}+\frac{\theta_5^2}{2}\frac{B_{10,n-1}}{n^4}+L_0(T\sqrt{n})+$$
$$+\frac{|\theta_4|}{n}L_4\left(T\sqrt{n}\right)+\frac{|\theta_3\theta_4|}{n^{3/2}}L_7\left(T\sqrt{n}\right)+\frac{\sqrt{n}}{\pi}\alpha^{n-\nu}\left(T\right)\int\limits_T^\infty\left|f\left(t\right)\right|^\nu dt\ .$$

Здесь и далее величины $\|\theta_{k+2}\|$ определяются равенствами $\|\theta_{k+2}\| = \sum\limits_{j=0}^{\frac{k}{2}+1}\frac{\alpha_{k+2-2j}}{(k+2-2j)!}\frac{1}{2^j j!}$ для чётных k, а для нечётных k - этой же формулой, в которой верхний предел суммирования заменяется на $\frac{k-1}{2}+1$, величины α_{k+2-2j} заменяются на их абсолютные значения для $j \geqslant 1$, а для $j = 0$ вместо α_{k+2} используется абсолютный момент порядка $k+2$. Величины $\left\|\theta_{k+2}^{(k)}\right\|$ определяются этой же формулой, в которой слагаемые, связанные с моментами порядков $k+1$ и $k+2$ опускаются. Величины $L_k(u)$ определяются равенствами

$$L_k(u)=\frac{1}{\pi}\int\limits_u^\infty t^k e^{-t^2/2}dt,\ k=0,1,\dots . \tag{5}$$

Отметим, что последние четыре слагаемых в оценке величины $|R_{pn}(x)|$ при росте n убывают экспоненциально быстро.

В теореме 2 рассматриваются разложения $p_n\left(x\right)$ при $m = 5$. В главной части этого разложения участвуют многочлены Чебышева-Эрмита вплоть до двенадцатого порядка, а остаточная часть разложения есть $O\left(\frac{1}{n^{5/2}}\right)$, $n \to \infty$, и указана явная оценка этой величины $O\left(\frac{1}{n^{5/2}}\right)$.

Теорема 3. *Пусть справедливо условие* 1 *при* $m = 6$. *Тогда для любых действительных* x *и* $n \geqslant \max\left(\nu, 8\right)$

$$p_n(x)=\varphi(x)+\frac{\theta_3}{n^{1/2}}H_3(x)\varphi(x)+\frac{\theta_4}{n}H_4(x)\varphi(x)+$$
$$+\left[\frac{\theta_6}{n^2}+\frac{n-1}{n}\frac{\theta_3^2}{2n}\right]H_6(x)\varphi(x)+$$
$$+\frac{\theta_5}{n^{3/2}}H_5(x)\varphi(x)+\left[\frac{\theta_7}{n^{5/2}}+\frac{n-1}{n}\frac{\theta_3\theta_4}{n^{3/2}}\right]H_7(x)\varphi(x)+$$
$$+\left[\frac{\theta_3^3}{3!}+\left(\theta_3\theta_6+\theta_4\theta_5-\frac{\theta_3^3}{2}\right)\frac{n-1}{n^2}\right]\frac{1}{n^{3/2}}H_9(x)\varphi(x)+$$
$$+\left[\theta_3\theta_5+\frac{n-1}{n}\frac{\theta_4^2}{2}\right]\frac{1}{n^2}H_8(x)\varphi(x)+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\frac{\theta_3^2\theta_4}{2n^2}H_{10}(x)\varphi(x)+$$
$$+\frac{\theta_3^4}{4!n^2}H_{12}(x)\varphi(x)+\left[\frac{\theta_3^2}{2}\theta_5+\theta_3\frac{\theta_4^2}{2}\right]\frac{1}{n^{5/2}}H_{11}(x)\varphi(x)+$$
$$+\left(\frac{n-1}{n}\right)^3\frac{\theta_3^3\theta_4}{3!n^{5/2}}H_{13}(x)\varphi(x)+\frac{\theta_3^5}{5!n^{5/2}}H_{15}(x)\varphi(x)+R_{pn}(x)\,,$$

где

$$|R_{pn}(x)| \le \frac{\|\theta_8\|B_{8,n-1}}{n^3} + \frac{|\theta_3\theta_5|B_{8,n}}{n^3} + \left(|\theta_3\theta_7| + \frac{\theta_5^2}{2}\right)\frac{B_{10}}{n^3} + \frac{\theta_3^6}{6!}\frac{B_{18}}{n^3} +$$
$$+\frac{|\theta_4|}{2}\left(\|\theta_6\| + \frac{\theta_3^2}{2} + \left|\theta_6 - \frac{\theta_3^2}{2}\right|\right)\frac{B_{10,n-2}}{n^3} + \frac{\|\theta_4\|\theta_4^2 B_{12,n-4}}{6n^3} + |\theta_3\theta_4\theta_5|\frac{B_{12}}{n^3} +$$
$$+\frac{\theta_3^2\theta_4^2 B_{14}}{4n^3} + \frac{\left|\theta_3^3\theta_5\right|B_{14}}{3!n^3} + \frac{\left|\theta_3^4\theta_4\right|}{4!}\frac{B_{16}}{n^3} + \frac{\left|\theta_3^3\right|}{3!}\frac{B_{9,n}}{n^{7/2}} + \frac{\left\|\theta_9^{(7)}\right\|B_{9,n-1}}{n^{7/2}} + \frac{|\theta_4\theta_7|B_{11}}{2n^{7/2}} +$$
$$+\left|\theta_6 - \frac{\theta_3^2}{2}\right||\theta_5|\frac{B_{11}}{n^{7/2}} + \frac{|\theta_4|}{2}\frac{\left\|\theta_7^{(5)}\right\|B_{11,n-2}}{n^{7/2}} + \frac{\theta_4^2|\theta_5|B_{13,n-2}}{3!n^{7/2}} + \frac{\left\|\theta_5^{(3)}\right\|\theta_4^2 B_{13,n-4}}{3!n^{7/2}} +$$
$$+\frac{\theta_5^2}{2}\frac{B_{10,n-1}}{n^4} + |\theta_5\theta_7|\frac{B_{12}}{n^4} + \frac{1}{2}\left|\theta_6 - \frac{\theta_3^2}{2}\right|\left(\|\theta_6\| + \frac{\theta_3^2}{2} + \frac{|\theta_3\theta_4\theta_5|}{2}\right)\frac{B_{12,n-2}}{n^4} +$$
$$+\frac{\theta_3^2\theta_4^2 B_{14,n-3}}{12n^4} + \frac{|\theta_4|\theta_5^2 B_{14}}{2n^4} + \left|\theta_6 - \frac{\theta_3^2}{2}\right||\theta_7|\frac{B_{13}}{2n^{9/2}} + \left|\theta_6 - \frac{\theta_3^2}{2}\right||\theta_5|\frac{\theta_3^2}{2}\frac{B_{17}}{n^{9/2}} +$$
$$+\frac{\theta_4^2|\theta_7|B_{15}}{3!n^{9/2}} + \frac{1}{2}\left|\theta_6 - \frac{\theta_3^2}{2}\right|\frac{\left\|\theta_7^{(5)}\right\|B_{13,n-2}}{n^{9/2}} + \frac{\theta_7^2}{2}\frac{B_{14}}{n^5} + \frac{|\theta_4|}{2}\frac{\theta_5^2}{2}\frac{B_{14,n-2}}{n^5} +$$
$$+\frac{1}{2}\left|\theta_6 - \frac{\theta_3^2}{2}\right|\left(\frac{|\theta_3\theta_5|B_{14,n}}{n^5} + \frac{\theta_5^2}{2}\frac{B_{16,n-2}}{n^6}\right) + L_0(T\sqrt{n}) + \frac{|\theta_4|L_4(T\sqrt{n})}{n} +$$
$$+\left|\theta_6 - \frac{\theta_3^2}{2}\right|\left(\frac{L_6(T\sqrt{n})}{n^2} + |\theta_3|\frac{L_9(T\sqrt{n})}{n^{5/2}}\right) + \frac{|\theta_3\theta_4|L_7(T\sqrt{n})}{n^{3/2}} + \frac{\theta_4^2 L_8(T\sqrt{n})}{2n^2} +$$
$$+\frac{|\theta_4\theta_5|L_9(T\sqrt{n})}{n^{5/2}} + \frac{\left|\theta_3^2\theta_4\right|L_{10}(T\sqrt{n})}{2n^2} + \frac{|\theta_3|\theta_4^2 L_{11}(T\sqrt{n})}{2n^{5/2}} + \frac{\left|\theta_3^3\theta_4\right|L_{13}(T\sqrt{n})}{3!n^{5/2}} +$$
$$+\frac{\sqrt{n}}{\pi}\alpha^{n-\nu}(T)\int\limits_T^\infty |f(t)|^\nu\,dt\,.$$

Оценки остаточных частей асимптотических разложений, представленные в этих теоремах, достаточно громоздки, однако, это не мешает их применению, поскольку все вычисления достаточно просты, а сумма большого количества слагаемых, например, в оценке теоремы 3, оказывается достаточно малой величиной. Это иллюстрируется с помощью "модельного" распределения, у которого функция распределения F имеет плотность $p(x)$, равную e^{-x-1} при $x \geqslant -1$ и 0 при $x < -1$; для него можно взять $\mu(t) = \left(1+t^2\right)^{-1/2}$, а в качестве T - любое положительное число. В этом случае оценка остаточной части разложения (в которой величины $B_{k,n-l}$ заменяются их асимптотическими значениями B_k и можно переходить к пределу при $T \to \infty$) теоремы 3 не превосходит величины

$$\frac{482{,}5}{n^3} + \frac{172}{n^{7/2}} + \frac{718}{n^4} + \frac{7065}{n^{9/2}} + \frac{1814}{n^5} + \frac{1348}{n^6}\,,$$

которая уже при $n > 78$ не более 10^{-3}.

Соответствующие оценки остаточных частей разложений для функций распределения, о которых пойдет речь в главе 3, заведомо лучше оценок рассматриваемых в теоремах 1-4. В то же время для функций распределения нормированных сумм случайных величин, имеющих указанное выше “модельное” распределение, теорема Берри-Эссеена гарантирует точность аппроксимации нормальным законом порядка 10^{-3} для $n \geqslant 987\,755$.

Вторая глава диссертационной работы называется ”О новых формах асимптотических разложений в ЦПТ”.

В этой главе рассматриваются асимптотические разложения плотностей $p_n(x)$ распределений нормированных сумм независимых случайных величин в предположении, что условие 1 выполнено для натурального $m \geqslant 2$, при этом ограничения сверху на величину m не налагаются. Эти разложения дают сколь угодно точные представления плотностей $p_n(x)$, если у исходных случайных величин существует достаточное количество моментов.

Хорошо известны два типа таких разложений, это разложения Грама-Шарлье и разложения Эджворта-Крамера. В втором пункте второй главы рассматривается связь между этими разложениями.

Так называемые короткие разложения Грама-Шарлье для плотностей при выполнении условия 1 можно записать в виде

$$p_n(x) = \varphi(x) + \sum_{l=3}^{m+1} \theta_l(F_n) H_l(x)\varphi(x) +$$

$$+ \sum_{l=m+2,\, l\neq 3m-4}^{3m-3} \theta_l^{(m+1)}(F_n) H_l(x)\varphi(x) + R\,, \tag{6}$$

и для величины $R = O\left(\frac{1}{n^{m/2}}\right)$, $n \to \infty$, можно указать явную оценку. Для величин $\theta_l(F_n)$ и $\theta_l^{(m+1)}(F_n)$, $l \geqslant 3$, известны формулы, дающие их выражения через n и числа $\theta_j(F)$, $3 \leqslant j \leqslant m+1$.

Разложения Эджворта-Крамера при выполнении условия 1 можно записать в виде

$$p_n(x) = \varphi(x) + \sum_{j=1}^{m-1} \frac{K_j(x)}{n^{j/2}} \varphi(x) + R, \tag{7}$$

где $R = O\left(\frac{1}{n^{m/2}}\right)$, $n \to \infty$, а $K_j(x)$ -многочлены, являющиеся линейными комбинациями многочленов Чебышева-Эрмита с коэффициентами, зависящими только от моментов распределения исходных случайных величин и не зависящими от n. Разложение (7) можно получить из разложения (6). Для этого нужно заметить, что величины $\theta_l(F_n)H_l(x)\varphi(x)$ и $\theta_l^{(m+1)}(F_n)H_l(x)\varphi(x)$ при $l \geqslant 6$ суть суммы слагаемых, которые при росте n стремятся к нулю с разными скоростями, их можно записать в виде сумм величин $\frac{C(F)}{n^{j/2}}H_l(x)\varphi(x)$, где $\frac{j}{2} \geqslant \frac{l}{2} - \left[\frac{l}{3}\right]$, а числа $C(F)$ не зависят от

n, затем сгруппировать указанные слагаемые с одним и тем же значением j, $j = 1, ..., m-1$, а слагаемые $\frac{C(F)}{n^{j/2}} H_l(x)\varphi(x)$ с $j \geqslant m$ перенести из главной части разложения в остаточную часть R из (7). Разложение (7) можно получать не обращаясь к разложению (6). Так, в частности, упоминавшиеся результаты В.В. Петрова были получены без обращения к разложениям Грама-Шарлье.

Взглянув на главную часть разложения теоремы 3, легко заметить, что среди величин $C(F)$, введённых выше, присутствуют (с некоторыми коэффициентами) собственно величины $\theta_j = \theta_j(F)$, $j \geqslant 3$, произведения пар θ_j, в том числе квадраты, произведения троек этих величин, в том числе кубы, и т. д. Это наводит на мысль сгруппировать слагаемые $\frac{C(F)}{n^{j/2}} H_l(x)\varphi(x)$ в главной части разложения по количеству сомножителей (моментов Чебышева-Эрмита исходного распределения), формирующих величины $C(F)$.

В третьем пункте "Одна новая форма асимптотических разложений" второй главы получена новая форма асимптотических разложений с явной оценкой остатка, основанная на вышеупомянутой идее группировки слагаемых. Для этого вводятся числа

$$\Theta_{s,l} = \sum_{t_1+...+t_s=l} \theta_{t_1}...\theta_{t_s}\,,\ s = 1, 2, ..., m-1\,,\ l = 3s, ..., m-1+2s\,, \quad (8)$$

где суммирование ведется по наборам неотрицательных целых чисел t_1,...,t_s таким, что $t_1 + ... + t_s = l$ и $t_j \geqslant 3$, $j = 1, ..., m-1$, и величины

$$\|\Theta_{s,l}\| = \sum_{t_1+...+t_s=l} |\theta_{t_1}...\theta_{t_s}|\ , \quad (9)$$

где суммирование ведется по тем же наборам неотрицательных целых чисел t_1,...,t_s, что и в (8) .

Теорема 4. *При выполнении условия* 1 *для любого* $n \geqslant \max(\nu, m+1)$ *при все действительных* x

$$p_n(x) = \varphi(x) + \sum_{s=1}^{m-1} C_n^s \sum_{l=3s}^{m-1+2s} \frac{\Theta_{s,l}}{n^{l/2}} H_l(x)\varphi(x) + R\,, \quad (10)$$

где

$$|R| \leqslant \frac{1}{n^{m/2}} \Bigg(\|\theta_{m+2}\|\, B_{m+2,n-1} + \left\|\theta_{m+3}^{(m+1)}\right\| \frac{B_{m+3,n-1}}{\sqrt{n}} +$$

$$+ \sum_{s=2}^{m-1} \frac{1}{s!} \sum_{l=3}^{m+2-s} \|\Theta_{s-1,m-1+2s-l}\| \times$$

$$\times \left[\|\theta_{l+1}\|\, B_{m+2s,n-1} + \left\|\theta_{l+2}^{(l)}\right\| \frac{B_{m+2s+1,n-1}}{\sqrt{n}} \right] +$$

$$+\sum_{s=1}^{m-1}\frac{1}{(s+1)!}\left\|\Theta_{s,m-1+2s}\right\|\zeta_3 B_{m+2s+2,n-1}\Bigg)+$$

$$+\frac{\sqrt{n}}{\pi}\alpha^{n-\nu}(T)\int\limits_T^{\infty}|f(t)|^{\nu}\,dt+\frac{1}{T\sqrt{n}}e^{-T^2n/2}+\sum_{s=1}^{m-1}C_n^s\sum_{l=3s}^{m-1+2s}\frac{|\Theta_{s,l}|}{n^{l/2}}L_l(T\sqrt{n})\,.$$

При $m=2$ *сумму по* $2\leqslant s\leqslant m-1$ *в оценке величины* R *следует опустить.*

В теореме 4 используется идеальная метрика $\zeta_3=\zeta_3(F,\Phi)$. Идеальные метрики ζ_s, $s>0$, введенны В.М. Золотарёвым[11]. Расстояние $\zeta_3=\zeta_3(F,\Phi)$ можно определить как

$$\zeta_3(F,\Phi)=\sup\left\{\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty}u(x)\left(F(dx)-\Phi(dx)\right)\right|\,:\,u\in\mathfrak{F}_3\right\},$$

где $\mathfrak{F}_3$ - множество комплекснозначных дважды дифференцируемых функций $u(x)$, $-\infty<x<\infty$, таких что, $\left|u^{(2)}(x)-u^{(2)}(y)\right|\leqslant|x-y|$ для любых действительных x и y.

Для остаточной части разложения теоремы 4 в диссертации приводится ещё одна оценка.

В этой же части доказываются другие представления разложения из теоремы 4. Так,

разложению (10) *можно придать вид*

$$p_n(x)=\varphi(x)+\sum_{j=1}^{m-1}\frac{1}{n^{j/2}}\sum_{s=1}^{j}\frac{C_n^s}{n^s}\Theta_{s,j+2s}H_{j+2s}(x)\varphi(x)+R\,,\qquad(11)$$

или

$$p_n(x)=\varphi(x)+\sum_{j=0}^{m-2}\frac{1}{n^{j/2}}\sum_{s=1}^{m-1-j}\frac{C_n^s}{n^{3s/2}}\Theta_{s,j+3s}H_{j+3s}(x)\varphi(x)+R\,,\qquad(12)$$

где величины R *- те же, что и в утверждении теоремы* 4.

Отметим, что $\frac{C_n^s}{n^s}\to\frac{1}{s!}$ при $n\to\infty$. В предположении существования восьмого момента исходного распределения F (это то же условие, что в теореме 3) вторая из оценок остаточной части разложения теоремы 4 для экспоненциального распределения, рассмотренного выше, даёт

[11] Золотарев В.М. Современная теория суммирования независимых случайных величин. М.: Наука, 1986.

(при замене величин $B_{k,n-1}$ их асимптотическими значениями B_k и при переходе к пределу при $T \to \infty$) величину

$$\tfrac{307}{n^3} + \tfrac{830}{n^{7/2}}\,,$$

которая уже при $n > 74$ позволяет гарантировать точность не хуже 10^{-3}, а при $n > 156$ - не хуже 10^{-4}.

В четвертом пункте второй главы рассматривается связь между новой формой разложений и разложениями вида Грама-Шарлье. В нем доказана

Теорема 5. *Для нормированных моментов Чебышева-Эрмита $\theta_l(F_n)$ справедливо представление*

$$\theta_l(F_n) = \frac{1}{n^{l/2}} \sum_{s=1}^{[l/3]} C_n^s \Theta_{s,l}\,. \tag{13}$$

Формула (13) делает многие известные на данный момент утверждения о величинах $\theta_l(F_n)$ достаточно очевидными. Например, из (13) следует соотношение $\theta_l(F_n) = O\left(\frac{1}{n^{l/2-[l/3]}}\right)$, $l \geqslant 3$, при $n \to \infty$.

Далее в этом пункте доказана

Теорема 6. *Разложение, представленное в теореме 4, можно записать в виде разложения Грама-Шарлье*

$$p_n(x) = \varphi(x) + \sum_{l=3}^{m+1} \theta_l(F_n) H_l(x)\varphi(x) +$$

$$+ \sum_{l=m+2,\, l\neq 3m-4}^{3m-3} \widehat{\theta}_l^{(m+1)}(F_n) H_l(x)\varphi(x) + R\,,$$

где величина R - та же, что и в утверждении теоремы 4, а $\widehat{\theta}_l^{(m+1)}(F_n)$ - усеченный нормированный квазимомент Чебышева-Эрмита.

Усеченный нормированный квазимомент Чебышева-Эрмита можно вычислять по формуле

$$\widehat{\theta}_l^{(m+1)}(F_n) = \sum \frac{n!}{(n-k_3-\ldots-k_{m+1})!\, n^{l/2}} \frac{\theta_3^{k_3}}{k_3!} \cdots \frac{\theta_{m+1}^{k_{m+1}}}{k_{m+1}!}\,, \tag{14}$$

где суммирование ведется по всем таким наборам неотрицательных целых чисел $k_3, \ldots, k_{m+1}$, что $3k_3 + \ldots + (m+1)\,k_{m+1} = l$, $k_3 + \ldots + k_{m+1} \leqslant n$ и $k_3 + \ldots + k_{m+1} \geqslant \frac{l-m+1}{2}$.

Формула (14) отличается от формулы для квазимомента $\theta_l^{(m+1)}(F_n)$ Чебышева-Эрмита наличием дополнительного ограничения

$k_3+...+k_{m+1} \geqslant \frac{l-m+1}{2}$, то есть формула (14) содержит меньшее число слагаемых по сравнению с аналогичной суммой для квазимоментов Чебышева-Эрмита.

В пятом пункте второй главы указывается явная связь между новой формой разложений и разложениями вида Эджворта-Крамера (7). В нём показано, как разложения вида (10) позволяют получать разложения Эджворта-Крамера с новой явной формулой для многочленов $K_j(x)$, участвующих в (7). Для этого величины C_n^s представляются в виде $C_n^s = \sum\limits_{k=1}^{s} c_{s,k} n^k$ и доказывается

Теорема 7. *Многочлены $K_j(x)$, $j = 1, 2, ..., m-1$, участвующие в разложении Эджворта-Крамера (7), допускают следующее представление*

$$K_j(x) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{j-1}{3}\right]} \sum_{l=1}^{j-3k} c_{k+l,l} \Theta_{k+l,\, j+2l} H_{j+2l}(x)\,.$$

Также в этом пункте доказывается то, что *многочлены $K_j(x)$, $j = 1, 2, ..., m-1$, участвующие в разложении Эджворта-Крамера (7), допускают следующее представление*

$$K_j(x) = \sum_{s=0}^{j-1} \sum_{l=0}^{\left[\frac{s}{3}\right]} c_{j-s+l, j+s} \Theta_{j-s+l, 3j-2s} H_{3j-2s}(x)\,.$$

В шестом пункте главы 2 находится явный вид коэффициентов $c_{s,k}$, которые участвуют в построении многочленов $K_j(x)$ из теоремы 7.

В главе 3 показано как строить асимптотические разложения для функций распределения, используя результаты глав 1 и 2. Для этого в условии 1 ограничение $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^{\nu}\, dt < \infty$ можно заменить более слабым: условием Крамера и сходимостью интеграла $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{|f(t)|^{\nu}}{t} dt$. В этом случае справедливы формулы обращения для функций распределения. Применительно к теореме 4 формула обращения для функций распределения имеет вид

$$F_n(x) - \Phi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \frac{f^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - e^{-\frac{t^2}{2}}}{-it} dt\,,\ -\infty < x < \infty\,. \qquad (15)$$

Сравнивая (15) с представлением

$$p_n(x) - \varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\left[f^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - e^{-\frac{t^2}{2}}\right]dt\,,$$

используемым при доказательстве теоремы 4, нетрудно понять, как из разложений теоремы 4 для плотностей $p_n(x)$ можно получить разложения с явной оценкой остатка для функций распределения $F_n(x)$. При переходе от разложений для $p_n(x)$ к разложениям для $F_n(x)$ происходит замена знака перед всеми слагаемыми, кроме слагаемого $\Phi(x)$, на противоположный, а каждый многочлен Чебышева-Эрмита $H_l(x)$ из главных частей разложений для $p_n(x)$ заменяется на многочлен $H_{l-1}(x)$. Применительно к остаточной части разложения величины $B_{k,n-1}$, L_l должно заменить на величины $B_{k-1,n-1}$, L_{l-1} соответственно, а слагаемые $\frac{\sqrt{n}}{\pi}\alpha^{n-\nu}(T)\int\limits_{T}^{\infty}|f(t)|^{\nu}\,dt$ и $\frac{1}{T\sqrt{n}}e^{-T^2n/2}$ на слагаемые $\frac{\alpha^{n-\nu}(T)}{\pi}\int\limits_{T}^{\infty}\frac{|f(t)|^{\nu}}{t}dt$ и $\int\limits_{T\sqrt{n}}^{\infty}\frac{e^{-t^2/2}}{t}dt.$

Далее в главе 3 указан способ построения разложений для решетчатых распределений. Проводится сравнение разложений, полученных с использованием и без использования сопровождающих зарядов. А также приводятся численные иллюстрации, некоторые из которых рассмотрены выше.

В заключительной части работы проводится сопоставление построенных асимптотических разложений и разложений Грама-Шарлье и Эджворта-Крамера.

Автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю доктору физико-математических наук Владимиру Васильевичу Сенатову за постоянное внимание к данной работе и полезное обсуждение ее результатов.

Публикации автора по теме диссертации

1. Соболев В.Н. Об асимптотических разложениях в центральной предельной теореме // Теория вероятн. и её примен., 2007, т. 54, в. 3, с. 490-505.

2. Соболев В.Н. Об асимптотических разложениях в ЦПТ // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика., 2010, № 28, в. 3(18), с. 35-47.