Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Механико–математический факультет

На правах рукописи

Гриневич Петр Петрович

# Итерационные методы решения задачи Стокса с переменной вязкостью

01.01.07 – Вычислительная математика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук

Москва
2011

Работа выполнена на *кафедре вычислительной математики Механико–математического факультета Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова*

Научный руководитель: *доктор физико–математических наук, профессор Ольшанский Максим Александрович*

Официальные оппоненты:

*доктор физико–математических наук, профессор Агошков Валерий Иванович*

*кандидат физико–математических наук Коньшин Игорь Николаевич*

Ведущая организация: *Московский энергетический институт (технический университет)*

Защита состоится 9 марта 2011 г. в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета *Д.501.002.16* при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: *Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы д.1, МГУ, Главное здание, Механико–математический факультет, аудитория 14-08.*

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико–математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова(14 этаж, Главное здание).

Автореферат разослан 9 февраля 2011 г.

Ученый секретарь

диссертационного совета,

*д.ф.-м.н., профессор* *А.А. Корнев*

# Общая характеристика работы

### Актуальность работы

Решение многих современных прикладных задач приводит к системам линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с седловой точкой. Характерной особенностью таких систем является знаконеопределенность. В симметричном случае имеются как положительные, так и отрицательные собственные значения. Важной областью, требующей решения задач с седловой точкой, является численное решение линеаризованных уравнений Навье–Стокса, описывающих течение несжимаемой вязкой жидкости. Уравнения Навье–Стокса являются основными уравнениями гидродинамики и, соответственно, играют важную роль в современной науке. В ходе их решения, как правило, возникает необходимость проводить вычисления на мелких сетках, как следствие, решаемые системы имеют большую размерность. Знаконеопределенность, большой размер и зависимость от физических параметров и параметров моделирования делает процедуру выбора метода решения таких систем нетривиальной. Решению таких систем посвящено много работ как отечественных (Г.М. Кобельков, Ю.А. Кузнецов и др.), так и зарубежных (Р. Гловински, Х. Элман, М. Бенци и др.) авторов.

Уравнения Навье–Стокса во многих случаях хорошо описывают поведение жидкостей и газов. Однако, многие вещества в природе описываются моделями с переменным коэффициентом вязкости, зависящим от внешних факторов. Примером могут служить биологические жидкости (например, кровь), нефть, зубная паста, кетчуп, крахмал, разведенный в воде и многие другие вещества. Для моделирования подобных веществ можно рассматривать модифицированные уравнения Навье–Стокса, при этом вязкость является не постоянным параметром среды, а функцией, зависящей от динамических, кинематических или других характеристик среды в данной точке пространства, например, тензора скоростей деформации, давления, температуры, и т.д. Число обусловленности возникающих при дискретизации линейные систем зависит от отношения максимальной вязкости к минимальной. Данное обстоятельство предъявляет дополнительное требование к методам решения СЛАУ, а именно — независимость числа итераций от отношения максимального значения коэффициента вязкости к минимальному и от градиента коэффициента вязкости как функции пространственной переменной. Численные аспекты решения уравнений Навье–Стокса с переменной вязкостью является темой ряда современных исследований: среди них работы Жонга и др.[1], Омори и Саито[2], Ремана и др.[3], Ольшанского и Ройскена[4].

В численном анализе методов решения задачи Стокса важную роль играет условие LBB (Ладыженской–Бабушки–Брецци) и его непрерывный аналог, неравенство Нечаса. В диссертации неравенство Нечаса обобщается на случай переменной вязкости и на основе этого обобщения получены оценки эффективности предлагаемого итерационного метода. Некоторые другие обобщения неравенства Нечаса получены в работе Боровикова и Дубинского[5].

[1] *S.J. Zhong, M.T. Zuber, L. Moresi, M. Gurnis.* Role of temperature-dependent viscosity and surface plates in spherical shell models of mantle convection // Journal of Geophysical Research, Vol. 105, Iss. B5, 2000, pp. 11063–11082.

[2] *K. Ohmori, N. Saito.* On the convergence of finite element solutions to the interface problem for the Stokes system // Journal of Computational and Applied Mathematics, Vol. 198, Iss. 1, 2007, pp. 116–128.

[3] *M. ur Rehman, T. Geenen, C. Vuik, G. Segal, S.P. MacLachlan.* On iterative methods for the incompressible Stokes problem // International Journal for Numerical Methods in Fluids, DOI:10.1002/fld.2235.

[4] *M.A. Olshanskii, A.Reusken.* Analysis of a Stokes interface problem // Numerische Mathematik, Vol. 103, Iss. 1, 2006, pp. 129–149.

[5] *И.А. Боровиков,Ю.А. Дубинский.* Некоторые разложения модулей Соболева–Клиффорда и нелинейные вариационные задачи // Труды Математического института им. В. А. Стеклова РАН, Том 260, 2008, с. 57–74.

Одной из задач, где возникают уравнения Навье–Стокса с переменной вязкостью, является моделирование среды Бингама. Среда Бингама является вязко–пластичной средой, которая при напряжениях ниже порогового значения ведет себя как твердое тело, а при превышающих пороговое значение — как вязкая жидкость. Течению среды Бингама посвящено большое количество литературы, среди отечественных работ можно отметить монографию Климова и др.[6]. Одним из подходов численному решению уравнений Бингама является регуляризация — модель, когда среда Бингама рассматривается как жидкость с переменной вязкостью. Задача Бингама трудно поддается математическому анализу и ее точные решения найдены только для узкого круга модельных задач, например, для течения среды между двумя параллельными пластинами и некоторых других. По этой причине численные методы, зачастую, являются единственным способом анализа многих процессов. Численными методами для решения уравнений Бингама занимаются многие исследователи, среди них Р. Гловински, М. Берковьер, М. Энгельман, Т. Папанастасио и другие.

Задачи с переменной вязкостью появляются и во многих других научных областях, например, в геологии. В мантии Земли температура неоднородна, а вязкость магмы напрямую зависит от температуры.

**Цель диссертационной работы**

Работа преследует следующие цели.

1. Построение эффективного метода решения систем линейных алгебраических уравнений, возникающих при дискретизации задачи Стокса с переменной вязкостью. Поскольку в реальных приложениях отношение максимальной вязкости к минимальной может быть

[6] *Д.М. Климов, А.Г. Петров, Д.В. Гергиевский.* Вязкопластические течения. Динамический хаос, устойчивость, перемешивания. Москва: Наука, 2005.

очень большим, к такому методу решения СЛАУ в настоящей работе предъявляется требование независимости (или слабой зависимости) количества итераций от этого отношения, а также от шага сетки.

2. Теоретический анализ эффективности предлагаемого метода решения систем линейных алгебраических уравнений. В частности, получение оценок скорости сходимости в терминах экстремальных значений коэффициента вязкости и других параметров систем уравнений.

3. Проверка эффективности предлагаемого метода на модельных задачах: регуляризованной задаче моделирования течения среды Бингама в канале и каверне, а также на линейной задаче, возникающей при моделировании всплытия раскаленного пузыря в мантии Земли.

**На защиту выносятся следующие основные результаты и положения:**

1. Доказано обобщенное неравенство Нечаса для случая переменной вязкости. Доказано обобщение неравенства для случая, когда область представлена в виде объединения непересекающихся подобластей.

2. Предложен переобуславливатель для дополнения по Шуру для дискретной задачи Стокса, учитывающий переменную вязкость. Получена оценка на собственные значения переобусловленного дополнения по Шуру. Получена оценка скорости сходимости метода Узавы-сопряженных градиентов.

3. Предлагаемый переобуславливатель применен для численного решения регуляризованной задачи Бингама и линейной задачи , возникающей при моделировании всплытия раскаленного пузыря в магме. Для задачи о течении среды Бингама в канале получены оценки собственных значений.

4. Проведены численные эксперименты с использовании предлагаемого переобуславливателя для задачи течения среды Бингама и линейной задачи, возникающей при моделировании всплытия раскаленного пузыря.

**Научная новизна работы**

Научная новизна диссертации заключается в доказательстве обобщения неравенства Нечаса для переменной вязкости, построении переобуславливателя для дополнения по Шуру, учитывающего переменную вязкость, а также в анализе его эффективности и эффективности метода Узавы-сопряженных градиентов с применением предлагаемого переобуславливателя. Проведено сравнение с переобуславливанием дополнения по Шуру при помощи матрицы масс.

**Практическая ценность работы**

В диссертации предложен итерационный метод решения задачи Стокса с переменной вязкостью с переобуславливателем для дополнения по Шуру, учитывающим переменную вязкость. Как теоретические оценки, так и результаты применения к двум модельным задачам показывают, что количество итераций практически не зависит как от шага сетки, так и от отношения максимального значения вязкости к минимальному. Предлагаемый переобуславливатель может быть легко реализован в рамках существующих программных пакетов вычислительной гидродинамики.

**Публикации.** По теме диссертации опубликовано 6 работ, 3 из них — в изданиях из "Перечня ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук“.

**Апробация работы.**

1. Международная конференция “X-я Белорусская математическая конференция”. Белоруссия, Минск, 2008.

2. Доклад на семинаре Кафедры вычислительной математики Математического факультета Технического университета Дортмунда под руководством Ш. Турека. Германия, Дортмунд, 2009.

3. XVI Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых “Ломоносов”. Москва, 2009.

4. International Workshop on “Computational Mathematics and Applications”. Финляндия, Тампере, 2009.

5. XVII Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых “Ломоносов”. Москва, 2010.

6. Доклад на семинаре Кафедры вычислительной математики, Механико–математический факультет МГУ под руководством Г.М. Кобелькова. Москва, 2010.

7. Доклад на семинаре Кафедры механики композитов под руководством В.И. Горбачева, Механико–математический факультет МГУ. Москва, 2010.

8. Доклад на семинаре “Технологии математического моделирования

течений со свободной границей" под руководством Ю.В. Василевского и М.А. Ольшанского, ИВМ РАН. Москва, 2010.

9. Доклад на семинаре Кафедры математического моделирования МЭИ(ТУ) под руководством А.А. Амосова и Ю.А. Дубинского. Москва, 2010.

**Структура и объем диссертации.**

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы, содержащего 70 наименований. Общий объем работы — 105 страниц, работа включает 22 иллюстрации и 18 таблиц.

## Содержание работы

Во введении обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, показана практическая значимость полученных результатов, представлены выносимые на защиту научные положения.

В первой главе приводится формулировка задачи Стокса с переменной вязкостью, доказывается обобщение неравенства Нечаса на случай весовой нормы. Приводится матричная постановка дискретной задачи, предлагается переобуславливатель для дополнения по Шуру и при помощи обобщенного неравенства Нечаса получаются оценки его эффективности.

В §1.1 дается формулировка задачи Стокса с переменной вязкостью. Основные уравнения, рассматриваемые в первой главе, имеют вид

$$
\begin{aligned}
-\mathbf{div}\nu(\mathbf{x})\mathbf{Du} + \nabla p = \mathbf{f} \quad &\text{в} \quad \Omega \\
-\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad &\text{в} \quad \Omega \\
\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \quad &\text{на} \quad \partial\Omega.
\end{aligned}
$$

Через $\mathbf{Du}$ обозначен тензор скоростей деформации $\frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + \nabla^T\mathbf{u})$. Вязкость $\nu$ в первой главе считается зависящей только от пространственных координат $\mathbf{x}$.

В §1.2 получен основной теоретический результат первой главы диссертации — неравенство Нечаса в весовой норме. Оно является обобщением хорошо известного неравенства Нечаса [7].

$$0 < c_0 \le \inf_{q\in L_0^2} \sup_{\mathbf{v}\in\mathbf{H}_0^1} \frac{(q, \operatorname{div}\mathbf{v})}{\|q\|\,\|\nabla\mathbf{v}\|},$$

которое, в свою очередь, является непрерывным аналогом условия Ладыженской–Бабушки–Брецци (LBB): если константа

$$c_{0,h} = \inf_{q_h\in\mathbb{Q}_h} \sup_{\mathbf{v}_h\in\mathbb{V}_h} \frac{(q_h, \operatorname{div}\mathbf{v}_h)}{\|q_h\|\,\|\nabla\mathbf{v}_h\|} \tag{1}$$

равномерно по шагу сетки отделена от нуля, то пара конечноэлементных пространств $\mathbb{V}_h$ и $\mathbb{Q}_h$ (для скорости и давления, соответственно) приводит к устойчивой дискретной задаче. Под равномерным отделением от нуля понимается существование такой константы $c^* > 0$, что при всех $h$ выполняется $c_{0,h} > c^*$. Результат сформулирован в виде Теоремы 1.

**Теорема 1. (Неравенство Нечаса в весовой норме)** *Пусть область $\Omega$ связна и имеет кусочно-гладкую липшицеву границу. Предположим, что функция $\nu > 0$ достаточно гладкая, чтобы все нормы в (3)–(4) имели смысл. Тогда для всякой функции $q \in L^2_\nu(\Omega)$, для которой также выполнено $(q, \nu^{-\frac{1}{2}}) = 0$, будет выполнено неравенство*

$$\tilde{c}_\nu \|\nu^{-\frac{1}{2}} q\| \le \sup_{\mathbf{v}\in\mathbf{H}_0^1} \frac{(q, \operatorname{div}\mathbf{v})}{\|\nu^{\frac{1}{2}}\mathbf{D}\mathbf{v}\|}. \tag{2}$$

*Константа $\tilde{c}_\nu$ в двумерном случае задается формулой*

$$\tilde{c}_\nu = \tilde{c}_0 (1 + c(k, r)\|\nu^{\frac{1}{2}}\|_{L^k} \|\nabla\nu^{-\frac{1}{2}}\|_{L^r})^{-1} \tag{3}$$

[7] *J. Nečas.* Les Méthodes Directes en Théeorie des Èquations Elliptiques. Paris: Masson, 1967.

*с произвольными $k > 2$ и $r > \frac{2k}{k-2}$, константой $c(k,r)$, зависящей от констант неравенств вложения $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ в $L^t(\Omega)$ с $t = t(k,r)$ и константой $\tilde{c}_0$, зависящей от константы $c_0$ в неравенстве Нечаса. В трехмерном случае константа $\tilde{c}_\nu$ определяется по формуле*

$$\tilde{c}_\nu = \tilde{c}_0(1 + c\|\nu^{\frac{1}{2}}\|_{L^k}\|\nabla\nu^{-\frac{1}{2}}\|_{L^r})^{-1} \qquad (4)$$

*с произвольными $k > 3$ и $r = \frac{3k}{k-3}$.*

Из Теоремы 1 следует обобщение на случай, когда область $\Omega$ представлена в виде объединения конечного числа подобластей $\Omega_i$, которое сформулировано как Теорема 2.

**Теорема 2. (Обобщение Теоремы 1 на случай нескольких подобластей)** *Пусть $\overline{\Omega} = \cup_{i=1}^N \overline{\Omega}_i$, $\Omega_i$ — связные непересекающиеся подобласти с кусочно–гладкой липшицевой границей; функция $\nu > 0$ — кусочно-гладкая на всей области $\Omega$ (т.е. гладкая на каждой из подобластей $\Omega_i$). Тогда для любой такой $q \in L^2(\Omega)$, для которой выполняются условия $(q, \nu^{-1})_{L^2(\Omega_i)} = (q, \nu^{-\frac{1}{2}})_{L^2(\Omega_i)} = 0$ будет выполнено неравенство (2) с константой $\tilde{c}_\nu = \min_{1\le i\le N} \tilde{c}_\nu(\Omega_i)$, где $\tilde{c}_\nu(\Omega_i)$ — константы, определяемые соотношениями (3) или (4), вычисленные в областях $\Omega_i$.*

Иногда при помощи удачного разбиения удается добиться того, что $\min_i \tilde{c}_\nu(\Omega_i) \gg \tilde{c}_\nu(\Omega)$. Ценой этого улучшения являются два условия ортогональности на каждой подобласти: $(q, \nu^{-1})_{L^2(\Omega_i)} = (q, \nu^{-\frac{1}{2}})_{L^2(\Omega_i)} = 0$.

В §1.3 и §1.4 рассмотрены дискретизация задачи и построение СЛАУ. Дискретизация проводилась двумя методами, а именно — методом конечных элементов (isoP2–P1) и методом конечных разностей на разнесенных сетках. Дается описание построения дискретной задачи при помощи обоих методов. Излагается вариационная постановка, дается определение конечноэлементных пространств для метода конечных элементов, вводятся сетки и задаются сеточные аналоги для непрерывных операторов при использовании метода конечных разностей. Оба метода приводят к решению системы линейных алгебраических уравнений с седловой точкой вида

$$\mathcal{A} \cdot \begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}. \tag{5}$$

В §1.5 описывается метод решения полученной дискретной задачи. Для решения используются методы на подпространствах Крылова (MINRES или GMRES) со специальным переобуславливателем вида

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} \hat{A} & 0 \\ 0 & \hat{S} \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \mathcal{P}_1 = \begin{pmatrix} \hat{A} & 0 \\ B & -\hat{S} \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Здесь $\hat{A}$ — переобуславливатель для блока $A$, $\hat{S}$ — переобуславливатель для дополнения по Шуру $S = BA^{-1}B^T$. Лемма 2 дает оценку эффективности матрицы масс, примененной в качестве переобуславливателя для дополнения по Шуру в случае переменной вязкости.

**Лемма 2.** *Если выполняется условие LBB, то есть для константы $c_{0,h}$ из (1) выполнено $c_{0,h} \geq c^* > 0$, где $c^*$ не зависит от $h$, то справедливы неравенства*

$$c^{*2}\nu_{\max}^{-1} M \leq S \leq \nu_{\min}^{-1} M \quad \text{на пространстве} \quad \mathbb{Q}_h.$$

**Следствие.**

$$\operatorname{cond}(\hat{S}^{-1}S) \leq \frac{1}{c^{*2}} \frac{\nu_{\max}}{\nu_{\min}}, \qquad \text{если} \quad \hat{S} = M.$$

При большом отношении максимального значения вязкости к минимальному, использование матрицы масс становится неэффективным. Поэтому вместо стандартной матрицы масс для дополнения по Шуру предлагается применять переобуславливатель

$$\{M_\nu\}_{i,j} := (\nu^{-1}\psi_j, \psi_i) \tag{7}$$

при использовании метода конечных элементов (через $\psi_i$ обозначены базисные функции для давления) и

$$M_\nu = \operatorname{diag}\{\nu^{-1}(x_{i,j})\} \tag{8}$$

при использовании метода конечных разностей. Переобуславливатель $M_\nu$ строится с учетом функции $\nu$, что важно при большом отношении максимального значения вязкости к минимальному.

Эффективность переобуславливателя $M_\nu$ зависит от констант $c_\nu$ и $C_\nu$ в соотношении спектральной эквивалентности

$$c_\nu M_\nu \leq S \leq C_\nu M_\nu. \tag{9}$$

Из Леммы 2 следует оценка константы $c_\nu$ в соотношении $c_\nu M_\nu \leq S$, когда используется переобуславливатель $M_\nu$, задаваемый формулой (7).

**Лемма 3.** Для константы $c_\nu$ из соотношения (9) верна оценка

$$c_\nu \geq c^{*2} \frac{\nu_{\min}}{\nu_{\max}},$$

$c^*$ *— константа из условия LBB* (1).

Оценку константы $C_\nu$ дает Теорема 4.

**Теорема 3.** *Пусть $\nu \in L^\infty(\Omega)$ и $\Omega \in \mathbb{R}^d$ и $M_\nu$ задано в* (7). *Тогда $C_\nu = d$.*

Лемма 3 и Теорема 3 дают оценку эффективности переобуславливателя $M_\nu$ не лучше, чем дает Теорема 3 для матрицы масс $M$. Оценка $c_\nu$ может быть улучшена, если сузить пространство функций $q_h$. Последующие рассуждения верны, если справедлив дискретный аналог Теоремы 1, сформулированный в виде Предположения 1.

**Предположение 1.** *Предположим, что справедливо следующее.*

*Пусть рассматриваемая расчетная область — многоугольник и $\{\tau_h\}$ — семейство регулярных (то есть таких, где треугольники мо-*

*гут либо иметь общее ребро, либо общую вершину, либо не пересекаться вовсе) триангуляций. При этом* $\overline{\Omega} = \cup_{K\in\tau_h}\overline{K}$. *Пусть также для каждой триангуляции* $\tau_h$ *определены пространства* $\mathbb{V}_h$ *и* $\mathbb{Q}_h$ *и для пары пространств* $\mathbb{V}_h$ *и* $\mathbb{Q}_h$ *выполнено LBB–условие* (1). *Предположим, что для всех* $q_h \in \mathbb{Q}_h \subset L^2_\nu(\Omega)$, *для которых также выполнено условие ортогональности* $(q_h, \nu^{-\frac{1}{2}}) = 0$, *справедливо неравенство*

$$\tilde{c}_{\nu,h}\|\nu^{-\frac{1}{2}}q_h\| \le \sup_{\mathbf{v}_h\in\mathbb{V}_h}\frac{(q_h, \operatorname{div}\mathbf{v}_h)}{\|\nu^{\frac{1}{2}}\mathbf{D}\mathbf{v}_h\|} \tag{10}$$

*с некоторой константой* $\tilde{c}_{\nu,h}$, *которая выражается в двумерном случае как*

$$\tilde{c}_{\nu,h} = \tilde{c}_{0,h}(1 + c(k,r)\|\nu^{\frac{1}{2}}\|_{L^k}\|\nabla\nu^{-\frac{1}{2}}\|_{L^r})^{-1} \tag{11}$$

*с произвольными* $k > 2$ *и* $r > \frac{2k}{k-2}$, *константой* $c(k,r)$, *зависящей от констант неравенств вложения* $\mathbf{H}^1_0(\Omega)$ *в* $L^t(\Omega)$ *с* $t = t(k,r)$ *и константой* $\tilde{c}_{0,h}$, *зависящей от константы* $c^*$ *в неравенстве LBB и не зависящей от* $h$. *Предположим, что в трехмерном случае константа* $\tilde{c}_\nu$ *записывается как*

$$\tilde{c}_{\nu,h} = \tilde{c}_{0,h}(1 + c\|\nu^{\frac{1}{2}}\|_{L^k}\|\nabla\nu^{-\frac{1}{2}}\|_{L^r})^{-1} \tag{12}$$

*с произвольными* $k > 3$ *и* $r = \frac{3k}{k-3}$ *и константой* $\tilde{c}_{0,h}$, *зависящей от константы в неравенстве LBB и не зависящей от* $h$.

Если Предположение 1 справедливо, то верно его обобщение на случай, когда расчетная область представлена в виде объединения подобластей.

**Теорема 4. (Дискретный аналог Теоремы 2.)** *Пусть расчетная область* $\Omega$ *представлена в виде объединения связных подобластей* $\Omega_i$, *то есть* $\overline{\Omega} = \cup_{i=1}^N\overline{\Omega}_i$. *Пусть также границы подобластей проходят только по ребрам треугольников. Тогда неравенство* (10) *бу-*

*дет выполняться для всех функций $q_h \in \mathbb{Q}_h$, для которых справедливы соотношения $(q_h, \nu^{-1})_{L^2(\Omega_i)} = (q_h, \nu^{-\frac{1}{2}})_{L^2(\Omega_i)} = 0$, с константой $\tilde{c}_{\nu,h} = \min_{1\le i\le N} \tilde{c}_{\nu,h}(\Omega_i)$, где $\tilde{c}_{\nu,h}(\Omega_i)$ — константа, вычисленная на $i$–й подобласти.*

Если верно Предположение 1 и, как следствие, Теорема 4, то справедлив результат, сформулированный как Теорема 5. Хотя формально она и не дает оценку константы $c_\nu$ из неравенства (9) (это связано с тем, что на функции $q_h$ накладываются дополнительные условия ортогональности), но из нее следует оценка на собственные значения переобусловленного дополнения по Шуру, начиная с $2N+1$–го, где $N$ — количество подобластей, на которые разбита расчетная область.

**Теорема 5.** *Пусть функция $q_h \in \mathbb{Q}_h \subset L^2_\nu(\Omega)$ удовлетворяет условиям ортогональности $(q_h, \nu^{-1})_{L^2(\Omega_i)} = (q_h, \nu^{-\frac{1}{2}})_{L^2(\Omega_i)} = 0$ на каждой подобласти. Если справедливо Предположение 1, то выполняется соотношение $\tilde{c}^2_{\nu,h} \langle M_\nu q, q\rangle \le \langle Sq, q\rangle$, где $\tilde{c}_{\nu,h}$ — константа из Теоремы 4.*

В §1.6 дается оценка собственных значений для переобусловленной матрицы дополнения по Шуру. Для $\lambda(M_\nu^{-1}S)$ в диссертации получены оценки

$$0 = \lambda_1 < \lambda_2 \le \lambda_3 \dots \le \lambda_m \le d, \quad c^{*2}\frac{\nu_{\min}}{\nu_{\max}} \le \lambda_2, \quad \tilde{c}^2_{\nu,h} \le \lambda_{2N+1}, \qquad (13)$$

где $d$ — размерность пространства, $N$ — количество подобластей, на которые разбита область $\Omega$, $c^*$ — константа из условия LBB (1), а $\tilde{c}_{\nu,h}$ — константа из Теоремы 4.

Далее в этом разделе приводится оценка скорости сходимости метода Узавы-сопряженных градиентов для систем линейных алгебраических уравнений с блочной матрицей вида (5) и переобуславливателем для дополнения по Шуру $M_\nu$, которая сформулирована в Теореме 6.

**Теорема 6.** *Пусть система с матрицей $A$ решается точно. Тогда* *для погрешности на $k$-й итерации метода Узавы-сопряженных градиентов решения задачи* (5) *при использовании переобуславливателя $M_\nu$ выполнены оценка*

$$\|e^k\|_S \le c\left(\frac{d}{c^{*2}}\frac{\nu_{\max}}{\nu_{\min}}\right)^{2N-1}\left(\frac{1-\sqrt{\tilde{c}^2_{\nu,h}/d}}{1+\sqrt{\tilde{c}^2_{\nu,h}/d}}\right)^{k-2N+1}\|e^0\|_S,$$

*где $c^*$ — константа из LBB–условия* (1).

Показано, что влияние возможного присутствия $2N-1$ малого собственного значения приводит к незначительному росту числа итераций метода Узавы-сопряженных градиентов.

Во второй главе описывается применение теоретических результатов первой главы к решению двух модельных задач: задачи Бингама о течении вязкопластичной жидкости в канале и задаче моделирования мантийной конвекции.

В §2.1 даются уравнения и определяющие соотношения модели Бингама. Соотношения, связывающие тензор скоростей деформации $\mathbf{Du}$ и девиатор тензора напряжений $\boldsymbol{\tau}$, имеют вид

$$\tau^{ij} = 2\mu D^{ij}\mathbf{u} + \tau_s\frac{D^{ij}\mathbf{u}}{|\mathbf{Du}|}, \qquad \text{если} \qquad |\mathbf{Du}| > 0;$$

$$|\boldsymbol{\tau}| \le \tau_s, \qquad \text{если} \qquad |\mathbf{Du}| = 0,$$

где $\tau_s$ — предел пластичности, а $\mu$ — коэффициент вязкости. В жидкой зоне коэффициент пропорциональности между девиатором тензора напряжений и тензором скоростей деформаций часто называют эффективной вязкостью.

В диссертации рассматривается подход к численному решению задачи Бингама, основанный на регуляризации, последующей дискретизации на каждом шаге нелинейного процесса и применении нового переобусловленного итерационного метода для решения линейных вспомогательных задач. Важным свойством предлагаемого в настоящей диссертации метода является отсутствие параметров, требующих тонкой настройки.

В §2.2 дается описание регуляризованной задачи. Регуляризация — подход к решению задачи Бингама, при котором среда рассматривается как жидкая во всей расчетной области, а в жестких зонах эффективная вязкость считается конечной. Величина вязкости в жестких зонах существенным образом определяется параметром регуляризации $\varepsilon$. Рассматриваются два варианта регуляризации:

$$\nu_\varepsilon(|\mathbf{Du}|) = 2\mu + \frac{\tau_s}{\sqrt{|\mathbf{Du}^2 + \varepsilon^2|}} \qquad \text{– Берковьера–Энгельмана;}$$

$$\nu_\varepsilon(|\mathbf{Du}|) = 2\mu + \tau_s \frac{1 - \exp(-\frac{|\mathbf{Du}|}{\varepsilon})}{|\mathbf{Du}|} \qquad \text{– Папанастасио.}$$

В §2.3 определяется итерационный метод, используемый для решения регуляризованной задачи Бингама. Нелинейные уравнения решаются методом Пикара:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}^n \\ p^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}^{n-1} \\ p^{n-1} \end{pmatrix} - \tilde{F}(\mathbf{u}^{n-1})^{-1} \circ \left[ F(\mathbf{u}^{n-1}) \circ \begin{pmatrix} \mathbf{u}^{n-1} \\ p^{n-1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ 0 \end{pmatrix} \right],$$

где через $F$ обозначен линейный при заданной функции $\mathbf{a}$ оператор

$$F(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} -\mathbf{div}\nu(|\mathbf{Da}|)\mathbf{D} & \nabla \\ -\mathrm{div} & 0 \end{pmatrix},$$

а через $\tilde{F}(\mathbf{u}^{n-1})^{-1}$ — приближенное решение линейной задачи (5), возникающей при дискретизации оператора $F$.

В §2.4 выводится оценка собственных значений матрицы $M_\nu^{-1}S$ для задачи о течении среды Бингама в канале. Это одна из немногих задач вязкопластичности, где известно аналитическое решение $\mathbf{u} = (u, v)$:

$$u = \begin{cases} \frac{1}{8}(1-2\tau_s)^2, & \text{если } \frac{1}{2}-\tau_s \le y \le \frac{1}{2}+\tau_s, \\ \frac{1}{8}\left[(1-2\tau_s)^2-(1-2\tau_s-2y)^2\right], & \text{если } 0 \le y < \frac{1}{2}-\tau_s, \\ \frac{1}{8}\left[(1-2\tau_s)^2-(2y-2\tau_s-1)^2\right], & \text{если } 1 \ge y > \frac{1}{2}+\tau_s, \end{cases}$$

$$v = 0, \quad p = -x.$$

С помощью разбиения области на три подобласти, соответствующие ядру течения в центре и жидким зонам по краям, непосредственно оценена константа в обобщенном неравенстве Нечаса (2) и, используя соотношения (13), получена оценка на собственные значения переобусловленного матрицей $M_\nu$ дополнения по Шуру: для любого $s \in (0, 1]$ существует не зависящая от $\varepsilon$ константа $c_2 > 0$, что

$$c_1\varepsilon < \lambda_2, \qquad c_2\varepsilon^s \le \lambda_7 \le \dots \le \lambda_m \le d = 2,$$

где константа $c_1$ не зависит от $\varepsilon$.

Последний раздел второй главы посвящен применению результатов первой главы к задаче моделирования мантийной конвекции. Рассматривается линейная задача, возникающая при моделировании всплытия раскаленного пузыря в магме. Считается, что вязкость $\nu$ в этом случае зависит только от температуры $T$, а температура — только от пространственных координат. Приводятся алгоритм разбиения области на подобласти для данной задачи и вычисленные значения констант в обобщенном неравенстве Нечаса (2).

Таким образом, во второй главе описано применение метода, предлагаемого в первой главе, к модельным задачам и получены оценки его эффективности.

В третьей главе представлены результаты численного решения трех модельных задач, включая течение среды Бингама в канале и каверне, а также линейную задачу, возникающую при моделирования всплытия раскаленного пузыря в магме.

В §3.1 и §3.2 представлены и проанализированы результаты решения задач течения среды Бингама в канале и в каверне, соответственно. Приводятся графики, на которых изображены все собственные значения переобусловленного дополнения по Шуру с использованием как матрицы масс $M$, так и предлагаемого в работе переобуславливателя $M_\nu$. Приводится количество нелинейных и линейных итераций для разных конфигураций метода решения СЛАУ. Расчеты проводились с обеими регуляризациями и разными значениями параметра $\varepsilon$ от $10_{-1}$ до $10^{-5}$. Дано также сравнение блочно – диагонального $\mathcal{P}$ и блочно – треугольного $\mathcal{P}_1$ (6) переобуславливателей для матрицы $\mathcal{A}$. Вычисления показали, что для данной модельной задачи численное решение хорошо приближает аналитическое и выбор регуляризации слабо влияет на эффективность метода. При этом, использование блочно – треугольного переобуславливателя $\mathcal{P}_1$ приводит к заметно более высокой скорости сходимости, чем использование блочно – диагонального (6).

Для задачи о каверне представлены графики с приближениями жестких зон для различных значений предела пластичности $\tau_s$ и регуляризационного параметра $\varepsilon$. Эти результаты (вид и размеры жестких зон) хорошо согласуются с результатами расчетов в других работах. Это свидетельствует о том, что выбранные численные параметры позволяют воспроизводить важные физические эффекты.

Из численных экспериментов по решению регуляризованной задачи Бингама в канале и в каверне можно сделать следующий вывод: предлагаемый в диссертации итерационный метод решения систем линейных алгебраических уравнений показывает практически полное отсутствие зависимости числа итераций как от шага сетки, так и от параметра регуляризации (соответственно, от отношения максимального значения вязкости к минимальному), что хорошо согласуется с теоретическими оценками (в задаче о течении в канале).

В §3.3 обсуждаются результаты численного решения линейной задачи, возникающей при моделировании всплытия раскаленного пузыря в магме. Сравнивается эффективность переобуславливателей $M$ и $M_\nu$. Численные эксперименты показали, что число линейных итераций в задаче моделирования мантийной конвекции с увеличением отношения максимальной вязкости к минимальной растет незначительно. Хотя теоретические оценки, судя по всему, не являются оптимальными в этом случае.

В заключении сформулированы основные результаты диссертации.

## Основные результаты

1. Доказано обобщенное неравенство Нечаса для случая переменной вязкости. Доказано обобщение неравенства для случая, когда область представлена в виде объединения непересекающихся подобластей.

2. Предложен переобуславливатель для дополнения по Шуру для дискретной задачи Стокса, учитывающий переменную вязкость. Получена оценка на собственные значения переобусловленного дополнения по Шуру. Получена оценка скорости сходимости метода Узавы-сопряженных градиентов.

3. Предлагаемый переобуславливатель применен для численного решения регуляризованной задачи Бингама и линейной задачи , возникающей при моделировании всплытия раскаленного пузыря в магме. Для задачи о течении среды Бингама в канале получены

оценки собственных значений переобусловленного дополнения по Шуру и теоретически доказано, что зависимость от параметра регуляризации оценок собственных значений для предлагаемого метода меньше, чем для обычно используемого переобуславливателя на основе матрицы масс.

4. Проведены численные эксперименты, хорошо согласующиеся с теоретическими результатами для задачи течения среды Бингама в канале и показавшие практическую независимость числа линейных итераций как от шага сетки, так и от отношения максимального значения вязкости к минимальному для задачи течения среды Бингама в каверне и линейной задачи, возникающей при моделировании всплытия раскаленного пузыря в магме при использовании предлагаемого переобуславливателя.

## Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность доктору физико-математических наук, профессору М.А. Ольшанскому за постановку задачи и помощь в работе. Автор выражает благодарность всем сотрудникам кафедры вычислительной математики за поддержку и внимание к работе.

## Работы автора по теме диссертации

1. *P.P. Grinevich, M.A. Olshanskii.* An iterative method for the Stokes type problem with variable viscosity // SIAM Journal on Scientific Computing, Vol. 31, Iss. 5, 2009, pp.3959–3978.

2. *П.П. Гриневич, М.А. Ольшанский.* Итерационный метод решения

регуляризованной задачи Бингама // Вычислительные методы и программирование, Том 10, 2010, стр. 78–87.

3. *П.П. Гриневич.* Об итерационном методе решения задачи Стокса с переменной вязкостью // Вестник МГУ, №3, 2010, стр. 38–41.

4. *П.П. Гриневич., М.А. Ольшанский* Итерационные методы для регуляризованной модели среды Бингама. X Белорусская Математическая Конференция: Тезисы докладов Международной научной конференции. Минск, 3–7 ноября 2008 – Мн.: Институт математики НАН Беларуси, 2008, с. 5–6.

5. *P.P. Grinevich, M.A. Olshanskii* An iterative method for solving regularized Bingham fluid equations. Тезисы докладов международной конференции “International Workshop on Computational Mathematics and Applications”. Department of Mathematics, Tampere Institute of Technology, 2009, c.9.

6. *П.П. Гриневич.* Об итерационном методе решения задачи Стокса с переменной вязкостью. Материалы Международного молодежного научного форума “ЛОМОНОСОВ-2010”, М.: МАКС Пресс, 2010.