Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова

Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 514

Деркач Мария Михайловна

МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ ПОЛНЫХ ИНВОЛЮТИВНЫХ НАБОРОВ ПОЛИНОМОВ НА ПОЛУПРЯМЫХ СУММАХ АЛГЕБР ЛИ

01.01.04 — Геометрия и топология

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва, 2011

Работа выполнена на кафедре дифференциальных уравнений Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научные руководители:	академик РАН Фоменко Анатолий Тимофеевич, доктор физико-математических наук, профессор Болсинов Алексей Викторович.
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук профессор Карасев Михаил Владимирович, кандидат физико-математических наук Морозов Павел Валерьевич.
Ведущая организация:	Воронежский государственный университет.

Защита диссертации состоится 11 марта 2011 г. в 16 часов 40 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.84 при Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ, механико-математический факультет, ауд. 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 11 февраля 2011 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д 501.001.84 при МГУ,
доктор физико-математических наук,
профессор А. О. Иванов

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

Диссертация посвящена исследованию интегрируемости гамильтоновых систем алгебраическими и геометрическими методами. Как известно, многие классические уравнения механики (в частности, гамильтоновы системы) записываются как системы дифференциальных уравнений на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Для полной интегрируемости такой системы в общем случае необходимо $(n-1)$ независимых первых интегралов. Однако есть класс многообразий, называемых симплектическими многообразиями, где для полной интегрируемости системы иногда достаточно $n/2$ независимых первых интегралов.

Один из простейших примеров симплектического многообразия — это орбита коприсоединенного действия группы Ли. Если в $\mathbb{R}^n$ ввести структуру алгебры Ли так, чтобы на орбите коприсоединенного действия векторное поле, задающее исследуемую систему, было гамильтоновым, то для полной интегрируемости системы достаточно найти набор интегралов, удовлетворяющих теореме Лиувилля. В таких случаях число независимых интегралов должно быть равно половине размерности орбиты.

Эта задача допускает естественное обобщение: вместо рассмотрения конкретной системы уравнений можно поставить вопрос об отыскании максимального коммутативного набора полиномов для произвольной алгебры Ли. Из таких наборов зачастую получаются интересные механические системы. А именно: взяв любую функцию из набора в качестве гамильтониана, можно получить гамильтонову систему, которая будет интегрируема ввиду наличия полного набора коммутирующих полиномиальных интегралов.

Напомним ряд необходимых определений.

Определение 1. *Алгеброй Ли* $\mathfrak{g}$ над полем $\mathbb{K}$ называется линейное пространство, на котором введена билинейная, кососимметрическая операция коммутатор $[\cdot,\cdot]\colon \mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$, удовлетворяющая тождеству Якоби $[[\xi,\eta],\zeta]+[[\eta,\zeta],\xi]+[[\zeta,\xi],\eta]=0$ для любых $\eta,\zeta,\xi\in\mathfrak{g}$. Если рассматривать конечномерные алгебры Ли, то двойственное пространство $\mathfrak{g}^*$ (т.е. пространство линейных функционалов на $\mathfrak{g}$) будет конечномерным линейным пространством.

Ниже, если не оговорено противное, рассматриваются лишь вещественные алгебры Ли.

На двойственном пространстве $\mathfrak{g}^*$ рассматриваются гладкие функции $f\colon \mathfrak{g}^* \to \mathbb{R}$. На множестве таких функций $C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ существует скобка Пуассона–Ли

$$\{\cdot;\ \cdot\}\colon C^\infty(\mathfrak{g}^*) \times C^\infty(\mathfrak{g}^*) \to C^\infty(\mathfrak{g}^*),$$

определяемая в каждой точке $x \in \mathfrak{g}^*$ равенством

$$\{f, g\}(x) = c_{ij}^k x_k \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^j}. \qquad (1)$$

В механических системах первые интегралы чаще всего являются полиномиальными функциями на $\mathfrak{g}^*$, например, полная энергия механической системы — это квадратичный полином от элементов самой алгебры. Для полиномиальных функций f и g скобку Пуассона–Ли можно определить следующим эквивалентным способом:
1). Если f и g — линейные (т.е. $f, g \in \mathfrak{g}$), то $\{f, g\} = [f, g]$,
2). $\{,\}$ — билинейная,
3). $\{,\}$ — кососимметричная,
4). Скобка удовлетворяет правилу Лейбница $\{fg,\, h\} = \{f, h\}g + \{g, h\}f$ для любых полиномов f, g, h.

Определение 2. Говорят, что две функции находятся *в инволюции* (или *коммутируют*), если их скобка Пуассона–Ли равна нулю.

Еще одно важное понятие — это *коприсоединенное действие группы.* Пусть конечномерной алгебре Ли $\mathfrak{g}$ соответствует группа Ли G, т.е. гладкое многообразие, имеющее структуру группы с гладкими операциями умножения и взятия обратного элемента. Тогда алгебра Ли — это касательное пространство в единице этой группы. На алгебре $\mathfrak{g}$ естественно определено *присоединенное действие ее группы* $\mathrm{Ad}\colon G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ по следующему правилу: пусть $g(t)$ кривая в группе G, проходящая через единицу группы в начальный момент времени $t = 0$, касательный вектор к которой в единице группы совпадает с наперед заданным вектором $\xi \in \mathfrak{g}$. Тогда для любого элемента $h \in G$, $hg(t)h^{-1}$ — тоже кривая в группе G, проходящая через единицу группы в начальный момент времени $t = 0$, а значит касательный вектор к ней в единице группы также лежит в алгебре $\mathfrak{g}$. Этот вектор и является результатом действия оператора Ad_h на вектор ξ. Действие, двойственное к присоединенному действию группы, называется *коприсоединенным действием* $\mathrm{Ad}^*\colon G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g}^*)$ и играет важную роль в теории гамильтоновых систем, а именно: орбиты O^* коприсоединенного действия являются *симплектическими многообразиями* (т.е. многообразиями, на которых можно ввести замкнутую невырожденную 2-форму[1]). Для симплектических многообразий верна теорема Лиувилля, позволяющая уменьшить необходимое количество первых интегралов.

Теорема 1. *Пусть на гладком симплектическом многообразии M^{2n} заданы гамильтонова система*[2] $v = \operatorname{sgrad} H$ *и набор гладких функций* $f_1, \ldots, f_n$ *со следующими свойствами:*

- $f_1, \ldots, f_n$ *— первые интегралы системы,*
- *они функционально независимы на* M^{2n},
- *они попарно коммутируют относительно скобки Пуассона* $\{f, g\} = \omega(\operatorname{sgrad} f, \operatorname{sgrad} g)$,
- *векторные поля* $\operatorname{sgrad} f_i$ *полны, т.е. естественный параметр вдоль интегральных траекторий полей определен на всей числовой прямой.*

Пусть T_ξ *— совместная поверхность уровня интегралов* $f_1, \ldots, f_n$. *Тогда*

i) *Если многообразие* T_ξ *связно, регулярно и компактно, то оно диффеоморфно n-мерному тору. Этот тор называется тором Лиувилля*

ii) *Слоение Лиувилля в окрестности тора Лиувилля тривиально, т.е. диффеоморфно прямому произведению* $T^n \times D^n$.

iii) *В достаточно малой окрестности* $U = T^n \times D^n$ *существует такая система координат* $s_1, \ldots, s_n, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ *(называемых переменными действие-угол), что*

   - $s_1, \ldots, s_n$ *— координаты на диске* D^n, $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ *— координаты на торе* T^n,
   - *симплектическая форма* ω *принимает в этих координатах канонический вид:* $\omega = d\varphi_i \wedge ds_i$,
   - *В переменных действие-угол гамильтонов поток выпрямляется на каждом торе Лиувилля в окрестности* U, *т.е. гамильтоновы уравнения принимают вид*

$$\dot{s}_i = 0, \quad \dot{\varphi}_i = q_i(s_1, \ldots, s_n), \; i = 1, \ldots, n.$$

[1] Болсинов А.В., Фоменко А.Т. “Интегрируемые гамильтоновы системы”, Геометрия. Топология. Классификация. Тома 1 и 2. - Издательский дом “Удмуртский университет”, Ижевск, 1999.

[2] Определение косого градиента функции sgrad и более подробную формулировку и доказательство теоремы Лиувилля можно найти, например, в книге Болсинов А.В., Фоменко А.Т. “Интегрируемые гамильтоновы системы”, Геометрия. Топология. Классификация. Тома 1 и 2. - Издательский дом “Удмуртский университет”, Ижевск, 1999.

Как было сказано выше, орбита O^* является симплектическим многообразием, при этом симплектическая 2-форма ω вводится каноническим образом. На пространстве гладких функций на любом симплектическом многообразии M можно ввести операцию *скобки Пуассона* по следующему правилу: $\{f, g\} = \omega(\operatorname{sgrad} f, \operatorname{sgrad} g)$. Оказывается, что если M — это орбита коприсоединенного действия O^*, то ограничение скобки Пуассона–Ли, введенной формулой (1), на M совпадает со скобкой Пуассона, существующей на ней как на симплектическом многообразии с канонической формой ω.

Модельным примером описанной выше конструкции может служить система, описывающая движение твердого тела в трехмерном пространстве. Соответствующая система дифференциальных уравнений может быть записана в виде

$$\begin{cases} \dot{K} = [K, \Omega] + [e, u], \\ \dot{e} = [e, \Omega]. \end{cases} \tag{2}$$

Здесь K — кинетический момент, Ω — угловая скорость тела, а физический смысл векторов e и u определяется выбранной задачей. Эта система уравнений на $\mathbb{R}^6(K, e)$ имеет два естественных первых интеграла: $f_1 = \langle e, e \rangle$, $f_2 = \langle K, e \rangle$. Для полной интегрируемости системы (2) необходимо найти еще три интеграла. Однако введение на $\mathbb{R}^6(K, e)$ структуры алгебры Ли позволяет уменьшить искомое число первых интегралов.

На пространстве $\mathbb{R}^6(K, e)$ можно ввести структуру алгебры Ли $e(3)$, т.е. алгебры Ли группы движений трехмерного пространства. Совместная поверхность уровня M_{12} первых интегралов f_1 и f_2 будет являться орбитой коприсоединенного действия группы $E(3)$, а значит ограничение скобки Пуассона–Ли (вырожденной на всей алгебре $e(3)$), на орбиту окажется невырожденным. Многообразие M_{12} в общем случае имеет размерность 4. Поскольку векторное поле (2) касается поверхности M_{12} и оказывается гамильтоновым на M_{12}[3], оно порождает гамильтонову систему на 4-мерном симплектическом многообразии, для интегрируемости которой по теореме Лиувилля необходимо два интеграла. Один из них — это гамильтониан системы, второй требуется найти.

Обобщение этой конструкции на случай произвольной алгебры $\mathfrak{g}$ выглядит следующим образом: пусть размерность орбиты коприсоединенного действия O^* общего положения равна $\dim O^*$. Тогда для «различения»

[3]Фоменко А.Т. *Симплектическая геометрия. Методы и приложения.* (Монография). - М.; изд-во МГУ, 1988.

орбит требуется $\dim \mathfrak{g} - \dim O^* = \operatorname{codim} O^*$ интегралов. Каждая орбита — это симплектическое многообразие, поэтому для интегрируемости системы на нем необходимо еще $\frac{\dim O^*}{2}$ функций. Следовательно, общее число функционально независимых полиномов для интегрируемости системы на всей алгебре Ли $\mathfrak{g}$ равно

$$m = \operatorname{codim} O^* + \frac{\dim O^*}{2} = \frac{\dim \mathfrak{g} + \operatorname{codim} O^*}{2}. \tag{3}$$

Определение 3. Коразмерность орбиты регулярного элемента для коприсоединенного действия называется *индексом* алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

$$\operatorname{ind} \mathfrak{g} = \min_{O^*}(\dim \mathfrak{g} - \dim O^*).$$

С использованием определения индекса алгебры формулу (3) можно переписать в виде: $m = \left(\frac{\dim \mathfrak{g} + \operatorname{ind} \mathfrak{g}}{2}\right)$.

Определение 4. Коммутативный относительно скобки Пуассона набор функционально независимых полиномов $f_1, \ldots, f_m$ называется *полным*, если

$$m = \frac{1}{2}\Big(\dim \mathfrak{g} + \operatorname{ind} \mathfrak{g}\Big). \tag{4}$$

Таким образом, если на алгебре Ли найдется полный коммутативный набор полиномов $f_1, \ldots, f_m$, то гамильтонова система на *всей* алгебре, с гамильтонианом $f \in \{f_1, \ldots, f_n\}$, будет интегрируема.

Исследуя гамильтоновы системы на алгебрах Ли, А. С. Мищенко и А. Т. Фоменко сформулировали важную гипотезу: на двойственном пространстве к любой конечномерной алгебре Ли над полем нулевой характеристики $\mathbb{K}$ всегда существует полный коммутативный набор полиномов. Следовательно, всегда существует интегрируемая гамильтонова система с полиномиальными интегралами. А. С. Мищенко и А. Т. Фоменко доказали эту гипотезу для всех редуктивных алгебр Ли (определение см. ниже). Доказательство оказалось весьма нетривиальным и было основано на новом методе, предложенном авторами, и получившем в дальнейшем широкие применения и развитие во многих работах. Затем последовало большое число работ различных авторов, в которых гипотеза Мищенко-Фоменко доказывалась для других алгебр Ли. Окончательное доказательство гипотезы было получено С. Т. Садэтовым[4]. Более наглядное и геометрическое

[4]С.Т. Садэтов, *Доказательство гипотезы Мищенко–Фоменко*, Докл. РАН, 397:6 (2004), 751–754; англ. пер.: S. T. Sadetov, “A proof of the Mishchenko–Fomenko conjecture”, Dokl. Math., 1 (2004), 635–638.

доказательство, основанное на алгоритме Садэтова, приведено А. В. Болсиновым[5]. Таким образом, верно следующее фундаментальное утверждение.

Теорема 2 (Мищенко, Фоменко, Садэтов)**.** *На двойственном пространстве к любой конечномерной алгебре Ли над полем нулевой характеристики всегда существует полный инволютивный набор полиномов.*

Наиболее изученный класс алгебр Ли — это полупростые и редуктивные алгебры Ли. *Полупростой* называется алгебра Ли, не имеющая нетривиальных разрешимых идеалов. Прямая сумма полупростой алгебры Ли с любой коммутативной алгеброй, называется *редуктивной алгеброй Ли.* Для случая редуктивных алгебр теорема 2 была доказана А. С. Мищенко и А. Т. Фоменко. Полный инволютивный набор полиномов для такой алгебры может быть построен с помощью метода сдвига аргумента[6].

Следующий важный класс алгебр — это полупрямые суммы алгебр Ли.

Определение 5. Пусть $\mathfrak{h}$ — алгебра Ли с коммутатором $[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{h}}$, а $\chi\colon \mathfrak{h} \to \mathrm{gl}(V)$ — произвольное линейное представление этой алгебры. *Полупрямой суммой* $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} +_\chi V$ называется алгебра Ли, которая как линейное пространство изоморфна прямой сумме пространств $\mathfrak{h}$ и V, а коммутатор определяется следующим образом: пусть $\xi_1, \xi_2 \in \mathfrak{h}$, $v_1, v_2 \in V$, тогда $[(\xi_1, v_1),\, (\xi_2, v_2)] = ([\xi_1, \xi_2]_{\mathfrak{h}},\, \chi(\xi_1)v_2 - \chi(\xi_2)v_1)$.

Вопрос построения полных наборов для полупрямых сумм алгебр Ли рассматривался многими авторами. Полупрямыми суммами простых алгебр Ли по неприводимому представлению занимались А. В. Болсинов[7] и Б. Привитцер[8]. Кроме того, для сумм $\mathrm{gl}(2n) + V$ по представлению $\Lambda^2\rho$ (где $\Lambda^2\rho$ – вторая внешняя степень представления минимальной размерности), $\mathrm{sl}(2n) + V$ по представлению $S^2\rho$ (где $S^2\rho$ – вторая симметрическая степень представления минимальной размерности) и $\mathrm{sp}(n) + V$ по сумме представлений $\rho + \tau$ (где ρ – представление минимальной размерности,

[5] Болсинов А.В. “*Полные инволютивные наборы полиномов в пуассоновых алгебрах: доказательство гипотезы Мищенко-Фоменко*”, Труды семинара по вект.и тенз.анализу. Вып.26. М.: Изд-во мех.-мат. фак-та МГУ. 2005, с.87-109.

[6] Мищенко А.С., Фоменко А.Т. *Интегрируемость уравнений Эйлера на полупростых алгебрах Ли* Труды семинара по векторному и тензорному анализу.. Вып.19, М.; изд-во МГУ, 1979, с.3-94.

[7] А. В. Болсинов, “Инволютивные семейства функций на двойственных пространствах к алгебрам Ли типа $G +_\phi V$”, УМН, 42:6(258) (1987), 183–184.
A. V. Bolsinov “Commutative families of functions related to consistent Poisson brackets”// Acta Appl. Math., 24(1991), pp. 253-274.

[8] Б. Привитцер, “Новые примеры интегрируемых гамильтоновых систем на полупрямых суммах алгебр Ли”, Матем. сб., 184:10 (1993), 135–143.

а τ — одномерное тривиальное представление) Т. А. Певцовой[9] построены явные формулы для искомых полиномов. Наиболее полный список результатов приведен в обзоре В.В.Трофимова и А.Т.Фоменко[10], а также во введении к кандидатской диссертации К.Шваи [11]. Общие результаты в этом направлении получены А.В. Браиловым (см. обзор Трофимова, Фоменко) и А. С. Теном[12].

Определение 6. *Инвариантом алгебры Ли* называется функция $f\colon \mathfrak{g}^* \to \mathbb{K}$, постоянная на орбитах коприсоединенного действия.

Теорема 3 (А. В. Браилов [13])**.** *Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} +_\chi V$ — полупрямая сумма комплексной алгебры Ли $\mathfrak{h}$ и линейного пространства V относительно неприводимого представления. $\chi\colon \mathfrak{h} \to \mathrm{gl}(V)$. Пусть $g_1, \dots, g_k$ — инварианты алгебры $\mathfrak{g}$. Тогда сдвиги этих инвариантов[14] $g_m(x + \lambda L)$ на элемент $L \in \mathfrak{h}^*$, совместно с линейными функциями на V^*, образуют инволютивный набор функций на $\mathfrak{g}^*$.*

Пусть

$$\mathrm{St}\, v = \{A \in \mathfrak{h}\colon \chi^*(A)v = 0\}, \quad v \in V^*. \tag{5}$$

— *стационарная подалгебра* в смысле представления χ^*.

Теорема 4 (А. В. Браилов)**.** *Набор, описанный в теореме 3, является полным тогда и только тогда, когда сдвиги инвариантов алгебры* $\mathrm{St}\, v$ *дают полный набор функций на пространстве* $(\mathrm{St}\, v)^*$*, где $v \in V^*$ — элемент общего положения.*

Определение 7. Пусть $\mathrm{ad}\colon \mathfrak{g} \to \mathrm{gl}(\mathfrak{g})$ — дифференциал присоединенного действия группы $\mathrm{Ad}\colon G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$. *Полупростой компактной* (или просто *компактной*) алгеброй Ли называется вещественная полупростая алгебра Ли, форма Киллинга $\langle M, N\rangle = \mathrm{Tr}\, \mathrm{ad}_M \mathrm{ad}_N$ на которой отрицательно определена.

[9]Певцова Т. А. *Симплектическая структура орбит коприсоединенного представления алгебр Ли типа $E \underset{\rho}{\times} G$*, Матем. сб., 1984, 123(165):2, 276–286.

[10]Трофимов В.В., Фоменко А.Т. *“Алгебра интегрируемых гамильтоновых дифференциальных уравнений”*. М.-Ижевск: Факториал и изд-во “Просперус” Удмуртского гос. ун-та, 1995.

[11]Крыстына Швая, Инварианты и полные инволютивные семейства полиномов некоторых алгебр Ли, // Кандидатская диссертация, МГУ, 1988.

[12]см., например, статью [3]

[13]В. В. Трофимов, А. Т. Фоменко, *Геометрические и алгебраические механизмы интегрируемости гамильтоновых систем на однородных пространствах и алгебрах Ли*, Динамические системы – 7, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, 16, ВИНИТИ, М., 1987, с.227–299.
А.В.Браилов, Некоторые свойства вполне интегрируемых гамильтоновых систем,// Кандидатская диссертация, МГУ, 2006.

[14]Т.е. функции, полученные из инвариантов алгебры путем сдвига аргумента.

В виду компактности алгебры $\mathfrak{h}$ ее можно представить как подалгебру в $\mathrm{so}(m)$ для достаточно большого m. Тогда отождествление с $\mathfrak{h}^*$ производится при помощи формы $\mathrm{Tr}\colon (A,B) = \mathrm{Tr}\, AB$, здесь A, B представлены кососимметрическими матрицами $m \times m$.

Теорема 5 (А. С. Тен[15]). *Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} +_\chi V$ — полупрямая сумма компактной алгебры Ли $\mathfrak{h}$ и линейного пространства V по произвольному представлению $\chi\colon \mathfrak{h} \to \mathrm{gl}(V)$. Рассмотрим следующий набор функций на $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{h}^* + V^*$: $\sum \lambda^m f_{k,L,m}(M,v) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{pr}_{\mathrm{St}\ v}(M+\lambda L))^k$, где $L \in \mathfrak{h}^*$, $\lambda \in \mathbb{R}$, а $\mathrm{pr}_{\mathrm{St}\, v} M$ — проекция элемента $M \in \mathfrak{h}^*$, рассматриваемого как элемент $\mathfrak{h}$, на стационарную подалгебру $\mathrm{St}\, v$ элемента v. Функции $f_{k,L,m}$, совместно с базисом пространства V, рассматриваемым как набор линейных функций на V^*, будут образовывать полный инволютивный набор функций на $\mathfrak{g}^*$.*

Поскольку результаты Тена и Браилова получены независимо, возникает вопрос о сравнении наборов, получаемых методами Тена, Браилова и Садэтова.

Определение 8. По полному набору функций $\{h_j\}$ можно определить подпространство $\mathcal{D}_x(h_j) \subset \mathfrak{g}$, порожденное дифференциалами функций $h_j(x)$ из набора в точке x.

Определение 9. Наборы полиномов $\{f_k\}$ и $\{g_m\}$ называются *эквивалентными*, если подпространства $\mathcal{D}_x(f_k)$ и $\mathcal{D}_x(g_m)$ совпадают почти для всех точек $x \in \mathfrak{g}^*$.

Как известно, два набора полиномов на алгебре Ли (и вообще на алгебраическом многообразии) эквивалентны в том и только в том случае, когда они алгебраически зависимы, т.е. полиномы одного набора полиномиально выражаются через полиномы другого набора.

Поскольку в наборах, построенных каждым из методов, присутствует матричный параметр сдвига, то естественно считать, что наборы эквивалентны, если возможно выбрать этот параметр так, чтобы полученные наборы оказались эквивалентными в смысле определения 9.

Определение 10. *Набором Браилова* называется следующий набор полиномов, состоящий из двух частей:
Первая часть — линейные функции на V^* (т.е. базис пространства V),
Вторая часть — функции $g_{m,L}(x)$, полученные из сдвигов инвариантов $g_i(x)$

[15] см. статью [3]

коприсоединенного представления алгебры $\mathfrak{g}$ на вектор $L \in \mathfrak{h}^*$, путем разложения $g_i(x + \lambda L)$ по степеням λ.

Определение 11. *Набором Тена* называется следующий набор функций, состоящий из двух частей:
Первая часть — линейные функции на V^* (т.е. базис пространства V),
Вторая часть — функции $f_{k,L}(x)$, полученные из сдвигов следов степеней $\mathrm{Tr}\left(\mathrm{pr}_{\mathrm{St}\ v}(M + \lambda L)\right)^i$, путем разложения по степеням λ (см. теорему 5).

Цель работы.

Исследовать и сравнить известные методы построения полных инволютивных наборов полиномов на полупрямых суммах алгебр Ли, получить явные формулы для функций, входящих в набор, оценить степени получающихся полиномов.

Методы исследования.

В диссертации используются методы теории интегрируемых гамильтоновых систем, методы построения полных инволютивных наборов полиномов на алгебрах Ли, аппарат алгебр и групп Ли, методы функционального анализа и линейной алгебры.

Научная новизна работы.

Результаты работы являются новыми. В диссертации получены следующие результаты:

1. Решена задача сравнения трех основных методов построения полных инволютивных наборов полиномов на алгебрах Ли вида полупрямой суммы. Доказано, что при правильном выборе параметра сдвига, наборы, получаемые всеми тремя методами, эквивалентны. Указано соответствие между параметрами сдвига.

2. С использованием методов, исследованных в первой главе, получены явные формулы полиномов для трех бесконечных серий алгебр Ли.

3. Для алгебр Ли малой размерности из исследованных бесконечных серий формулы для полиномов значительно упрощены.

4. Найдена оценка сверху для степеней полиномов, получаемых в бесконечной серии $e(n)$.

Теоретическая и практическая ценность.

Работа имеет теоретический характер. Полученные результаты относятся к теории интегрируемых гамильтоновых систем и могут быть применены для продвижения в исследовании интегрируемых систем на алгебрах Ли.

Апробация работы.

Результаты диссертации докладывались на следующих семинарах и конференциях:

1. на семинаре «Современные геометрические методы» под руководством академика А.Т.Фоменко и др. (механико-математический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова) неоднократно в 2004 — 2010 гг.;
2. на семинаре «Динамические системы» под руководством д. ф.-м. н., профессора Ю. С. Ильяшенко (механико-математический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова), 2010 г.;
3. на семинаре кафедры «Прикладная математика-1» под руководством д. ф.-м. н., профессора А.Д. Мышкиса (МИИТ), 2008 г.;
4. на семинаре профессора Х.Фленнера в Университете г.Бохум (Германия), апрель 2007 г.;
5. на Международной конференции «Александровские чтения» (Москва), май 2006 г.;
6. на Международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (Суздаль, Россия), июль 2006 г.;
7. на Международной конференции «Геометрия, динамика, интегрируемые системы» (Белград, Сербия), сентябрь 2007 г.;
8. на Украинском математическом конгрессе, посвященном 100-летию со дня рождения Н. Н. Боголюбова, (Киев, Украина), август 2009 г.

Публикации.

Результаты диссертации опубликованы в работах, список которых приведён в конце автореферата [1–8].

Структура и объем работы.

Работа состоит из введения, двух глав и списка литературы, содержащего 35 наименований. Общий объем диссертации 98 страниц.

Содержание диссертации.

Первая глава диссертации посвящена сравнению наборов, получаемых методами Тена, Браилова и Садэтова. Главный результат первой главы сформулирован в теоремах A, B и C.

Теорема A. *Пусть* $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} +_\chi V$ *— полупрямая сумма компактной алгебры Ли* $\mathfrak{h}$ *и линейного пространства* V *по произвольному линейному представлению* $\chi\colon \mathfrak{h} \to \mathrm{gl}(V)$. *Пусть вторые части наборов Тена и Браилова получены сдвигом на один и тот же вектор* L. *Тогда наборы Тена и Браилова эквивалентны.*

Подобно описанным двум методам, метод Садэтова также использует коммутативный идеал, который дополняется до полного набора функциями следующего специального вида: рассматриваются рациональные отображения $\psi\colon V^* \to \mathfrak{g}$, такие что $\psi(v) \in \tilde{\mathrm{St}}\, v$ для любого $v \in V^*$, где $\tilde{\mathrm{St}}\, v$ — стационарная подалгебра в смысле представления $(\mathrm{ad}|_V)^*\colon \mathfrak{g} \to \mathrm{gl}(V^*)$, двойственного ограничению $\mathrm{ad}|_V$ представления $\mathrm{ad}\colon \mathfrak{g} \to \mathrm{gl}(\mathfrak{g})$ на идеал $V \subset \mathfrak{g}$. Эти отображения будут являться сечениями расслоений стационарных подалгебр в $\mathfrak{g}$. По сечениям ψ строятся функции $f_\psi(M, v) = \langle (M, v), \psi(v)\rangle$. Функции f_ψ и будут образовывать алгебру K, на которой необходимо построить полный инволютивный набор полиномов на втором шаге. Пусть можно построить полный инволютивный набор полиномов на алгебре K. «Вторая часть» искомого набора будет состоять из полиномов H_i от элементов алгебры K, но поскольку сечения ψ — рациональные, функции f_ψ также будут рациональными, а значит H_i можно считать рациональными функциями от элементов $\mathfrak{g}$. Оказывается, что полиномы, стоящие в знаменателях функций H_i, зависят только от V. Домножив H_i на знаменатель и добавив первую часть набора Садэтова, можно получить полный инволютивный набор полиномов на алгебре $\mathfrak{g}$.

Полный инволютивный набор на втором шаге метода Садэтова в рассматриваемом случае строится методом сдвига аргумента, причем вектор сдвига инвариантов $F_1, \ldots F_n$ алгебры K — это некоторое сечение φ из алгебры сечений $\Phi = \{\varphi\colon V^* \to \mathfrak{h} | \varphi(v) \in \mathrm{St}\, v\ \forall v \in V^*\}$.

Определение 12. *Первую часть набора Садэтова* составляют линейные функции на V^*, т.е. базис коммутативного идеала V. *Вторая часть набора Садэтова* состоит функций, полученных на втором шаге метода Садэтова.

Теорема B. *Пусть* $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} +_\chi V$ *— полупрямая сумма компактной алгебры Ли* $\mathfrak{h}$ *и линейного пространства* V *по произвольному представлению*

$\chi\colon \mathfrak{h} \to \mathrm{gl}(V)$. *Пусть вторая часть набора Тена получена сдвигом функций f_k на вектор L, а вторая часть набора Садэтова — сдвигами инвариантов $F_i(\varphi) = \operatorname{Tr}\varphi^i$ на сечение $\varphi_L = \mathrm{pr}_{\mathrm{St}\,v} L \in \Phi$, где проекция $\mathrm{pr}_{\mathrm{St}\,v}$ определена в теореме 5.*

Тогда наборы Тена и Садэтова эквивалентны.

Теорема C. *Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} +_\chi V$ — полупрямая сумма компактной алгебры Ли $\mathfrak{h}$ и линейного пространства V по произвольному представлению $\chi\colon \mathfrak{h} \to \mathrm{gl}(V)$. Пусть вторая часть набора Браилова получена сдвигом инвариантов $g_1, \ldots, g_m$ на вектор $L \in \mathfrak{h}^*$. Пусть $\check{\psi}_L$ — такой элемент пространства Φ^*, двойственного алгебре сечений Φ, что для любого $v \in V$ $\check{\psi}_L(v)$ — естественная проекция элемента $L \in \mathfrak{h}^*$ на $(\mathrm{St}\,v)^*$, а вторая часть набора Садэтова получена из сдвигов инвариантов $F_i\colon \Phi^* \to \mathbb{R}(V^*)$ на элемент $\check{\psi}_L \in \Phi^*$ (эти сдвиги рассматриваются как функции на $\mathfrak{g}^*$).*

Тогда наборы Браилова и Садэтова эквивалентны.

Вторая глава диссертации посвящена свойствам инволютивных семейств полиномов на некоторых алгебрах Ли. Здесь рассматриваются полупрямые суммы алгебр $\mathfrak{g}_{nk} = \mathrm{so}(n) +_{\rho_k} (\mathbb{R}^n)^k$, $\mathfrak{h}_{nk} = \mathrm{su}(n) +_{\zeta_k} (\mathbb{C}^n)^k$ и $\mathfrak{f}_{nk} = \mathrm{u}(n) +_{\zeta'_k} (\mathbb{C}^n)^k$ (где ρ_k, ζ_k, ζ'_k — k-ые степени представлений минимальной размерности, т.е. в каждом случае первая часть суммы действует независимо на каждой компоненте $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{C}^n$). Для рассматриваемых алгебр найдены явные формулы для проекции на стационарную подалгебру $\mathrm{St}\,v$.

Теорема D. *Пусть набор полиномиальных функций на $\mathfrak{g}^*_{nk}$ состоит из базиса $u_1, \ldots, u_{nk}$ пространства $V = (\mathbb{R}^n)^k$, рассматриваемого как линейные функции на V^*, и функций*

$$f_{l,B,\lambda}(M, v) = \Gamma^l(v_1, \ldots, v_k) \cdot \operatorname{Tr}(\mathrm{pr}_{\mathrm{St}v}(M + \lambda B))^l, \qquad (6)$$

$l = 2, 4, \ldots, 2 \cdot [(n-k)/2]$, *где проекция $\mathrm{pr}_{\mathrm{St}\,v} M$ задана явной формулой, $\Gamma(v_1, \ldots, v_k)$ — определитель матрицы Грама системы векторов $v_1, \ldots, v_k$, а B — регулярный элемент $\mathrm{so}(n)$, выступающий в качестве параметра.*

Эти функции находятся в инволюции и образуют полный набор на двойственном пространстве к алгебре $\mathfrak{g}_{nk} = \mathrm{so}(n) +_{\rho_k} (\mathbb{R}^n)^k$ при $k < n-1$. Если $k \geqslant n-1$, то полный инволютивный набор на $\mathfrak{g}^*_{nk}$ образуют функции $u_1, \ldots, u_{nk}$.

Теорема E. *Пусть набор полиномиальных функций на* $\mathfrak{h}_{nk}^*$ *состоит из базиса* $u_1, \ldots, u_{2nk}$ *пространства* $V = (\mathbb{C}^n)^k$*, рассматриваемого как линейные функции на* V^**, и функций*

$$f_{l,B,\lambda}(M, v) = \Gamma^{2l}(v_1, \ldots, v_k) \cdot \mathrm{Tr}(\mathrm{pr}_{\mathrm{St}(v_1,\ldots,v_k)}(M + \lambda B))^l, \tag{7}$$

$l = 2, 3 \ldots n - k - 1$*, где проекция* $\mathrm{pr}_{\mathrm{St}\,v} M$ *задана явной формулой,* $\Gamma(v_1, \ldots, v_k)$ *— определитель матрицы Грама системы векторов* $v_1, \ldots, v_k$*, а* B *— регулярный элемент* $\mathrm{su}(n)$*, выступающий в качестве параметра.*

Эти функции находятся в инволюции и образуют полный набор на двойственном пространстве к алгебре $\mathfrak{h}_{nk} = \mathrm{su}(n) +_{\zeta_k} (\mathbb{C}^n)^k$ *при* $k < n - 1$*. При* $k \geqslant n - 1$ *полный коммутативный набор образуют функции* $u_1, \ldots, u_{2nk}$.

Теорема F. *Пусть набор полиномиальных функций на* $\mathfrak{f}_{nk}^*$ *состоит из базиса* $u_1, \ldots, u_{2nk}$ *пространства* $V = (\mathbb{C}^n)^k$*, рассматриваемого как линейные функции на* V^**, и функций*

$$f_{l,B,\lambda}(M, v) = \Gamma^{2l}(v_1, \ldots, v_k) \cdot \mathrm{Tr}(\mathrm{pr}_{\mathrm{St}(v_1,\ldots,v_k)}(M + \lambda B))^l, \tag{8}$$

$l = 1, 2 \ldots n - k - 1$*, где проекция* $\mathrm{pr}_{\mathrm{St}\,v} M$ *задана явной формулой,* $\Gamma(v_1, \ldots, v_k)$ *— определитель матрицы Грама системы векторов* $v_1, \ldots, v_k$*, а* B *— регулярный элемент* $\mathrm{u}(n)$*, выступающий в качестве параметра.*

Эти функции находятся в инволюции и образуют полный набор на двойственном пространстве к алгебре $\mathfrak{f}_{nk} = \mathrm{u}(n) +_{\zeta'_k} (\mathbb{C}^n)^k$ *при* $k < n - 1$*. При* $k \geqslant n - 1$ *полный коммутативный набор образуют функции* $u_1, \ldots, u_{2nk}$.

Для алгебр $\mathfrak{g}_{n1}$ также получена оценка на степени полиномов, входящих в построенный набор.

Теорема G. *Степени полиномов, входящих в набор, описанный в теореме D для k=1, не превосходят* $2n$.

Автор благодарит своих научных руководителей, академика РАН Анатолия Тимофеевича Фоменко и доктора физико-математических наук, профессора Алексея Викторовича Болсинова, за постановку задачи и плодотворные обсуждения. Автор благодарит коллектив кафедры дифференциальной геометрии и приложений за поддержку.

Работы автора по теме диссертации.

1. М.М.Жданова (Деркач), “Новые интегрируемые случаи на конечномерных алгебрах Ли”. Вестник Моск. Унив., Сер. Матем. Мех. №4, 2006, 62-64.

2. М. М. Жданова (Деркач), “Вполне интегрируемые гамильтоновы системы на полупрямых суммах алгебр Ли”, Матем. сб., 200:5 (2009), 3-32.

3. М.М. Деркач, А.С.Тен, “Максимальные коммутативные подалгебры функций на двойственных пространствах к алгебрам Ли”, Вестник Моск. Унив., Сер. Матем. Мех. №1, 2011, с.31-36.

4. М.М.Деркач “Анализ методов построения полных инволютивных наборов полиномов на алгебрах Ли вида полупрямой суммы”, депонирована в ВИНИТИ РАН, 29.11.2010, №667-В2010, 1-27.

5. М.М.Жданова (Деркач) “Интегрируемые случаи на полупрямых суммах классических алгебр Ли”, Тезисы воронежской школы им. С.Г.Крейна, с.41.

6. М.М.Жданова (Деркач) “Новые интегрируемые случаи на конечномерных алгебрах Ли”, Тезисы конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам, с.97-99.

7. М.М.Жданова (Деркач) “Интегрируемые случаи на полупрямых суммах классических алгебр Ли”, Тезисы конференции “Александровские чтения-2006”, с.46.

8. М.М.Жданова (Деркач) “Вполне интегрируемые гамильтоновы системы на полупрямых суммах алгебр Ли”, Тезисы украинского математического конгресса, посвященного 100-летию со дня рождения Н. Н. Боголюбова (опубликована в Интернете).