Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова

Механико-математический факультет

На правах рукописи

УДК 514.765

Воронцов Александр Сергеевич

Инварианты и геометрические свойства орбит коприсоединенного действия групп Ли

Специальность 01.01.04 — геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Москва — 2010

Работа выполнена на кафедре дифференциальной геометрии и приложений Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научные руководители:	академик РАН Фоменко Анатолий Тимофеевич, доктор физико-математических наук, профессор Болсинов Алексей Викторович
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Нецветаев Никита Юрьевич
	кандидат физико-математических наук Морозов Павел Валерьевич
Ведущая организация:	Московский государственный институт электроники и математики (технический университет)

Защита диссертации состоится 25 марта 2011 г. в 16 ч. 45 м. на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д.1, МГУ им. М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж)

Автореферат разослан 25 февраля 2011 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д.501.001.84 при МГУ
доктор физико-математических наук,
профессор

А.О. Иванов

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Диссертация относится к такому разделу дифференциальной геометрии как геометрия однородных пространств и посвящена описанию орбит и инвариантов коприсоединенного действия групп Ли. Этот вопрос имеет приложение в теории вполне интегрируемых по Лиувиллю гамильтоновых систем. Орбиты коприсоединенного действия групп Ли являются естественным примером симплектических многообразий. Задание на $2n$-мерной орбите коприсоединенного действия группы Ли набора функций в инволюции, содержащего n независимых функций эквивалентно заданию на этой орбите вполне интегрируемой гамильтоновой системы, в качестве гамильтониана можно взять любую из функций. В частности, многие классические динамические системы можно рассматривать как системы на орбитах коприсоединенного действия групп Ли. А.С. Мищенко и А.Т. Фоменко, рассматривая подобные системы ввели важное понятие интегрируемости алгебры Ли [1] [2]

Определение. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ называется интегрируемой, если на двойственном пространстве $\mathfrak{g}^*$ существует q функционально независимых функций $f_1, \dots, f_q$ в инволюции относительно скобки Пуассона–Ли, причем $q = \frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g} + \operatorname{ind} \mathfrak{g})$.

и сформулировали гипотезу

Гипотеза 1. *Любая алгебра Ли интегрируема в классе полиномов.*

Эта гипотеза известна как гипотеза Мищенко–Фоменко. Сами авторы доказали ее для редуктивных алгебр Ли, позднее ими и другими авторами гипотеза была доказана для других классов алгебр Ли.

Для доказательства гипотезы А.С. Мищенко и А.Т. Фоменко использовали конструкцию, получившую название метод сдвига аргумента. Сейчас

[1] А.С. Мищенко, А.Т. Фоменко, *Уравнения Эйлера на конечномерных алгебрах Ли*, Изв. АН СССР. сер. матем. 1978. **42**, №2. 396-415

[2] А.С. Мищенко, А.Т. Фоменко, *Интегрирование уравнений Эйлера на полупростых алгебрах Ли*, ДАН СССР. 1976,т.231, No.3, с.536-538

наборы полиномов, получаемых таким образом играют важную роль в изучении алгебр Ли.[3] [4]

А.В. Болсинов исследовал границы применимости метода сдвига аргумента, дав его переформулировку в терминах согласованных Пуассоновых структур[5]. Этот подход оказался крайне плодотворным для исследования свойств динамических систем на алгебрах Ли[6].

Окончательная точка в доказательстве гипотезы Мищенко–Фоменко была поставлена С.Т. Садэтовым, доказавшем ее для произвольной алгебры Ли.[7] Садэтов показал возможность построения полных коммутативных наборов по индукции, переходя на каждом шаге к алгебре Ли меньшей размерности.

В диссертации можно выделить три основных направления исследования: описание топологии и симплектической структуру на орбитах коприсоединенного представления произвольных групп Ли, получение явных формул для инвариантов коприсоединенного представления в случае алгебр Ли типа полупрямых сумм; демонстрация возможности приложения теории бигамильтоновых структур в алгебраических задачах.

Цель работы

1. дать описание структуры орбит коприсоединенного действия для произвольной алгебры Ли,

2. описать орбиты и инварианты коприсоединенного действия для алгебр Ли, представимых в виде полупрямой суммы классической полупростой алгебры Ли с коммутативным идеалом по представлению минимальной размерности,

[3] Л.Г. Рыбников, *Метод сдвига инвариантов и модель Годена*, Функц. анализ и его прилож., 40, N3 (2006) 30–43

[4] В.В. Шувалов, *О пределах подалгебр Мищенко–Фоменко в алгебрах Пуассона полупростых алгебр Ли*, Функц. анализ и его прилож., 36, N4 (2002) 298–305

[5] А. В. Болсинов, *Согласованные скобки Пуассона на алгебрах Ли и полнота семейств функций в инволюции*, Изв. АН СССР. Сер. матем., 55:1 (1991), 68-92

[6] A. V. Bolsinov, A.A. Oshemkov, *Bi-Hamiltonian Structures and Singularitiesof Integrable Systems*, Regular and Chaotic Dynamics, 2009, Vol. 14

[7] С.Т. Садэтов, *Доказательство гипотезы Мищенко-Фоменко*, Докл. РАН. 2004. **397**. №6. 751-754.

3. исследовать возможность применения бигамильтонова подхода для анализа свойств коприсоединенного представления алгебр Ли.

Научная новизна

1. решена задача описания топологии орбит коприсоединенного действия, а именно дано индуктивное описание структуры орбит коприсоединенного действия для произвольной алгебры Ли путем сведения к описанию орбиты в алгебре Ли меньшей размерности,

2. решена задача явного описания топологии орбит и инвариантов коприсоединенного дейсвия в ряде частных случаев (алгебры Ли, представимых в виде полупрямой суммы классической полупростой алгебры Ли с коммутативным идеалом по представлению минимальной размерности),

3. продемонстрирована эффективность бигамильтонова подхода для анализа свойств коприсоединенного представления алгебр Ли, в частности получены новые доказательства ряда классических теорем

4. доказана новая нижняя оценка на степени инвариантов коприсоединенного действия,

Основные методы исследования

В работе используются методы дифференциальной геометрии и аппарат групп и алгебр Ли. Идея редукции, применяемая при описании орбит, связана с методом С.Т. Садэтова, предложенным им для доказательства гипотезы Мищенко–Фоменко.

Явные формулы для инвариантов коприсоединенного представления для алгебр ли имеющих вид полупрямой суммы с коммутативным идеалом обобщают результаты, полученные А.В. Болсиновым, А.Ю. Браиловым, А. Гусейновым.

Для исследования свойств инвариантов используется бигамильтонов подход, теорема Кронекера–Жордана о каноническом виде пары форм и идея сдвига аргумента, предложенная А.С. Мищенко и А.Т. Фоменко.

Теоретическая и практическая ценность работы

Результаты имеют теоретическое значение. Они могут быть полезны для описания топологии слоения Лиувилля интегрируемых гамильтоновых систем и для описания свойств кольца инвариантов алгебры Ли.

Апробация работы

Результаты диссертации докладывались:

- многократно (в 2005 — 2010 годах) на семинаре «Современные геометрические методы» под руководством академика РАН А.Т. Фоменко и проф., д.ф.-м.н. А.С. Мищенко (мех-мат МГУ),
- в 2006 году на семинаре Prof. Flenner в Ruhr-Universität Bochum, Германия,
- в 2010 году на семинаре Prof. Pidstrygach в Georg-August-Universität Göttingen, Германия,
- на Международной конференции “Александровские чтения”, (Москва,2006),
- на международной конференции “Geometry, Dynamics and Integrable systems” (Белград, 2008),
- в 2010 году на “Городском топологическом семинаре” ПОМИ РАН им. В.А. Стеклова.

Публикации

Результаты по теме диссертации опубликованы в 5 работах автора. Список работ приведен в конце автореферата [1 – 5].

Структура и объем диссертации

Диссертационная работа состоит из 3 глав и введения. Список литературы включает 28 наименований. Общий объем диссертации составляет 94 страницы.

Краткое содержание работы

Во **введении** формулируется цель работы, кратко излагаются ее результаты и содержание, вводятся основные понятия а так же освещается место данных результатов в современной теории интегрируемых систем.

В **первой главе** излагаются результаты Rawnsley и Baguis о структуре орбит коприсоединенного действия групп Ли, которые затем обобщаются на случай, когда коммутативный идеал не выделяется в качестве полупрямого слагаемого.

Основной подход состоит в следующем: автор рассматривает алгебру Ли $\mathfrak{g}$, содержащую идеал I и соответствующую группу Ли G. Вложение $I \subset \mathfrak{g}$ определяет естественную проекцию $p\colon \mathfrak{g}^* \to I^*$. Поскольку I является идеалом, действие, индуцируемое на I^* коприсоединенным действием группы является фактически действием группы Ли G/I. Это действие обозначается Φ, а его дифференциал — ϕ. Проекция p превращает орбиты коприсоединенного действия группы Ли G в расслоения над орбитами этого действия. Автор доказывает следующие теоремы, описывающие структуру этих расслоений.

Теорема 1. *Пусть алгебра Ли $\mathfrak{g}$ содержит коммутативный идеал I. Тогда орбита элемента x при коприсоединенном действия соответствующей группы Ли является локально тривиальным расслоением. База расслоения – орбита $O_\Phi(p(x)) \subset I^*$ элемента $p(x)$ при действии Φ, а слой над точкой a является прямым произведением орбиты коприсоединенного действия в $\mathrm{Ann}(a)^*$ и линейного пространства V, причем $\dim V = \dim O_\Phi$.*

Теорема 2. *Пусть G — группа Ли, такая что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ содержит $(2n+1)$-мерный идеал $\mathfrak{h}$, изоморфный алгебре Гейзенберга. Тогда существует подалгебра $\mathfrak{k}$, такая что $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{k}$ и $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{k} = z(\mathfrak{h})$, а орбита коприсоединенного действия группы G представляет собой расслоение над базой R^{2n}, слоем которого является орбита коприсоединенного действия элемента $\pi(x)$ в $\mathfrak{k}^*$, где π — проекция на второе слагаемое в разложении $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{k}$.*

Доказанные теоремы дают простую геометрическую интерпретацию коммутативного набора полиномов, построенного с помощью метода Садэтова. Слоение Лиувилля, задаваемое полными коммутативными наборами полиномов, построенными по Садэтову согласовано со структурой расслоения, описанной в теоремах 1 и 2, при этом слои имеют вид $\mathbb{R}^k \times K$, где K — слои, получаемые из аналогичного набора для меньшей алгебры Ли. Таким образом слоение определяется набором полиномов для полупростой алгебры Ли, которые строятся методом сдвига аргумента.

В связи с этим приобретают интерес другие способы построения полных наборов полиномов, задающих более интересную динамику на орбитах коприсоединенного действия. Одним из возможных способов построения является метод цепочек подалгебр. В случае, если алгебра Ли $\mathfrak{g}$ представляет собой полупрямую сумму алгебры Ли $\mathfrak{r}$ с коммутативным идеалом V: $\mathfrak{g} = \mathfrak{r} +_\phi V$, естественное вложение $\mathfrak{r} \subset \mathfrak{g}$ позволяет воспользоваться этим методом. Приводится кратко описание метода цепочек подалгебр и доказываем критерий, показывающий когда его применение для полупрямой суммы дает полный набор функций:

Теорема 3. *Набор функций на $\mathfrak{g}^*$, получаемый с помощью цепочки $\mathfrak{r} \subset \mathfrak{g}$, будет полным, если полным будет набор функций на $\mathfrak{r}^*$, получаемый из цепочки* $\mathrm{Ann}_\phi(a) \subset \mathfrak{r}$.

Во **второй главе** рассматриваются алгебры Ли вида полупрямой суммы классической алгебры Ли с коммутативным идеалом. Алгебры Ли такого вида возникают в прикладных задачах, например, алгебра Ли $e_3 = so(3) + \mathbb{R}^3$ является естественным пространством для описания динамики трехмерного твердого тела с закрепленной точкой в поле силы тяжести. Алгебра Ли $so(n) + \mathbb{R}^n$ соответствует n-мерному обобщению этой задачи.

Для алгебр Ли вида $so(n) +_\rho \mathbb{R}^n$, $sl(n) +_\rho \mathbb{R}^n$ и $sp(n) +_\rho \mathbb{R}^{2n}$ в явном виде выписаны инварианты и описана топология орбит коприсоединенного действия для таких алгебр Ли.

Явный вид инвариантов позволяет применить метод сдвига аргумента и получить конкретные полные коммутативные наборы, соответствующие некоторым интегрируемым системам на двойственном пространстве к алгебре Ли.

Информация о топологии орбит может быть полезна при исследовании топологии соответствующих Лиувиллевых слоений.

Третья глава диссертации посвящена исследованию бигамильтоновой структуры на алгебрах Ли. Опираясь на теорему Кронекера–Жордана о каноническом виде пучка кососимметрических форм автор изучает пучок форм, порождаемый скобкой Пуассона–Ли и скобкой с замороженным аргументом.

В каноническом виде для пара форм приводится к блочно-диагональному виду с двумя типами блоков: жордановыми и кронекеровыми клетками. Для указанной пары форм разложение связано с естественными характеристиками алгебры Ли, например количество кронекеровых блоков равно индексу алгебры.

Применяя указанный подход автор получает элементарные доказательства критерия Болсинова, теоремы Костанта и теоремы Винберга

Теорема 4 (А.В. Болсинов)**.** *Пусть $\mathfrak{g}$ — произвольная конечномерная комплексная алгебра Ли, $S = \{y \in \mathfrak{g}^* | \dim \mathrm{Ann}(y) > \mathrm{ind}\,\mathfrak{g}\}$ — множество сингулярных элементов в $\mathfrak{g}$, a — регулярный элемент, то есть $a \notin S$. Инволютивное семейство, полученное сдвигом инвариантов на элемент a полно на $\mathfrak{g}^*$ тогда и только тогда, когда* $\mathrm{codim} S \geq 2$.

Теорема 5 (Костант)**.** *Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли. Пусть f_i — канонические инварианты коприсоединенного представления. Тогда гра-*

диенты df_i независимы во всех регулярных точках $\mathfrak{g}^*$.

Теорема 6 (Э.Б.Винберг)**.** *Пусть $\mathfrak{g}$ — конечномерная алгебра Ли, $a \in \mathfrak{g}^*$ — произвольный элемент. Тогда* $\operatorname{ind} \operatorname{Ann}(a) \geq \operatorname{ind} \mathfrak{g}$.

Также с помощью приведения пучка скобок к каноническому виду вводится понятие кронекеровых индексов алгебры Ли, которые обобщают понятие показателей для полупростой алгебры Ли. При этом вычисление кронекеровых индексов сводится к задачам линейной алгебры.

Автор доказывает новую оценку снизу на степени полиномиальных инвариантов алгебры Ли в терминах кронекеровых индексов:

Теорема 7. *Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, $f_1, \ldots, f_s$ ($s = \operatorname{ind} \mathfrak{g}$) — набор алгебраически независимых полиномиальных инвариантов коприсоединенного представления и* $\deg f_1 \leq \deg f_2 \leq \ldots$. *Тогда*

$$\deg f_i \geq r_i,$$

где $r_1 \leq r_2 \leq \cdots \leq r_s$ — кронекеровы индексы алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность своим научным руководителям академику РАН Анатолию Тимофеевичу Фоменко и д.ф.-м.н., профессору Алексею Викторовичу Болсинову за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Автор благодарит участников семинара “Современные геометрические методы” и всех сотрудников кафедры за творческую атмосферу, которая способствовала научной работе.

Работы автора по теме диссертации

[1] А. С. Воронцов, Инварианты алгебр Ли, представимых в виде полупрямой суммы с коммутативным идеалом Матем. сб., 200:8 (2009), 45-62

[2] А.С. Воронцов, Кронекеровы индексы алгебры Ли и оценка степеней инвариантов, Вестн. моск. ун-та, сер. 1, Математика. Механика, 2011, No. 1, 26–30

[3] А.С. Воронцов, Рациональная точность формы Ли-Кириллова на некоторых алгебрах Ли, Тезисы конференции "Александровские чтения-2006"

[4] А.С. Воронцов, О рациональном прообразе формы Кириллова, Тезисы конференции Суздаль-2006

[5] А.С. Воронцов, Форма Кириллова как дифференциал рациональной 1-формы, Тезисы воронежской школы им. С.Г. Крейна