Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова

Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 515.162.8

Казанцев Александр Дмитриевич

Слоения на поверхностях в дополнениях к зацеплениям

01.01.04 — геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2011

Работа выполнена на кафедре высшей геометрии и топологии Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Дынников Иван Алексеевич
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Лексин Владимир Павлович
	кандидат физико-математических наук, доцент Сосинский Алексей Брониславович
Ведущая организация:	Учреждение Российской академии наук, Санкт-Петербургское Отделение Математического Института имени В. А. Стеклова РАН

Защита диссертации состоится 25 марта 2011 г. в 16 ч. 45 м. на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 при Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д.1, МГУ, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж)

Автореферат разослан 25 февраля 2011 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д.501.001.84 при МГУ
доктор физико-математических наук,
профессор

А.О. Иванов

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Диссертация является исследованием в теории узлов – области геометрии и топологии, изучающей вложения окружности в трехмерное пространство. Центральным вопросом в теории узлов является вопрос классификации узлов и зацеплений. Однако, построение алгоритма, определяющего, являются ли два данных зацепления изотопными или нет, является труднейшей задачей. Формально, такой алгоритм построен. Он опубликован в работе С. В. Матвеева[1] и использует теорию нормальных поверхностей. Однако, он не применим на практике в силу слишком большой вычислительной сложности. Это соображение мотивирует поиск новых алгоритмов в теории узлов, работающих быстро хотя бы в некоторых «очевидных» случаях.

Такие более эффективные алгоритмы удалось построить И. А. Дынникову[2] благодаря развитой им технике изучения слоений на поверхностях, лежащих в дополнения к книжным представлениям зацеплений, соответствующих прямоугольным диаграммам зацеплений. В работе И. А. Дынникова было показано, что прямоугольную диаграмму тривиального узла можно привести к тривиальному виду при помощи элементарных движений, не повышающих сложность диаграммы (в дальнейшем мы будем говорить об этом как о *монотонном упрощении прямоугольных диаграмм узлов и зацеплений*). В той же работе показывается, что с помощью монотонного упрощения можно решить и задачу разложения узла или зацепления на простые неприводимые слагаемые. Под этим понимается следующее: при помощи элементарных преобразований не увеличивающих сложность, диаграмму узла/зацепления можно привести к виду, который представляет собой соответствующую композицию диаграмм простых составляющих данного узла/зацепления. Вышесказанное означает, что для каждой исходной прямоугольной диаграммы решения всех трех упомянутых задач достаточно искать только в классе диаграмм меньшей сложности, что существенно ускоряет время работы соответствующего алгоритма.

Естественно возникает следующий вопрос: верно ли, что и диаграмму любого сателлитного узла можно монотонно упростить до такого

[1] S. V. Matveev, *Algorithmic topology and classification of 3-manifolds*, Springer, 2003

[2] I. A. Dynnikov, *Arc-presentations of the links. Monotonic simplification*, ArXiv: math.GT/0208153v3, 16 Jul 2004

вида, где структура компаньона будет явно видна? Этот вопрос является центральным для данной диссертации. В качестве иллюстрации представлен следующий рисунок:

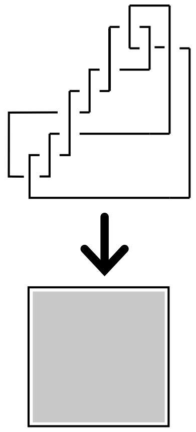


Fig. 1

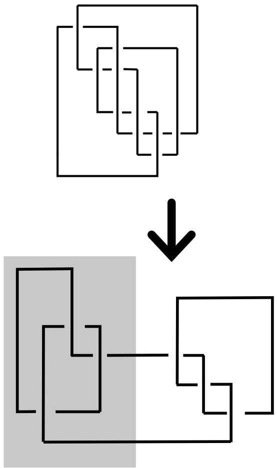


Fig. 2

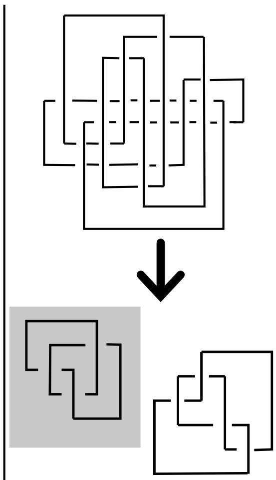


Fig. 3

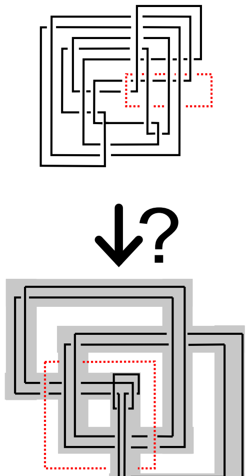


Fig. 4

Метод, использованный в диссертации для получения ответа на этот вопрос был впервые предложен в серии статей Дж. Бирман и В. Менэско[3,4,5,6,7,8]. Авторы разработали технику для изучения зацеплений и узлов, представленных в форме замкнутых кос. Данная техника использует слоения на поверхностях, лежащих в дополнениях к зацеплениям, и содержит приемы, схожие с использовавшимися ранее в работах Д. Беннекена[9].

Применяя и развивая вышеупомянутую технику Дж. Бирман и В. Менэско опубликовали в 1994 году статью[10], в которой они ввели для изучения класс торов, вложенных в дополнения к замкнутым косам. В частности, они доказали, что каждый такой тор может быть преобразован (под этим подразумевается изотопия поверхности в

---

[3] J. S. Birman and W. W. Menasco, *Studying Links Via Closed Braids. I. A finiteness theorem.*, Pacific Journal of Mathematics, Vol. 154, No. 1 (1992), 17-36.

[4] J. S. Birman and W. W. Menasco, *Studying Links Via Closed Braids. II. On a theorem of Bennequinn. II*, Topology Appl. 40, No. 1 (1991), 71-82.

[5] J. S. Birman and W. W. Menasco, *Studying Links Via Closed Braids. III. Classifying links which are closed 3-braids.*, Pacific Journal of Mathematics, Vol. 161, No. 1 (1993), 25-113.

[6] J. S. Birman and W. W. Menasco, *Studying Links Via Closed Braids IV: Split and composite links*, Invent. Math. 102 (1990), 115-139.

[7] J. S. Birman and W. W. Menasco, *Studying Links Via Closed Braids V: Closed braid representatives of the unlink*, Trans. AMS. 329:2 (1992), 585-606.

[8] J. S. Birman and W. W. Menasco, *Studying Links Via Closed Braids. VI. A nonfiniteness theorem.*, Pacific Journal of Mathematics, Vol. 156, No. 2 (1992), 265-285.

[9] D. Bennequin, *Entrelacements et equations de Pfaff*, Asterisque 107-108 (1983), 87-161.

[10] J. S. Birman and W. W. Menasco, *Special Positions for Essential Tori in Link Complements*, Topology 33 (1994) No. 3, 525-556.

дополнении к зацеплению вместе с изменением самого зацепления при помощи перестановочных преобразований) так, что слоение, высекаемое на торе страницами книжного представления будет являться так называемым шахматным слоением (далее мы будем использовать этот термин вместо оригинального *standard tiling*).

Однако, геометрическое описание торов из этого класса было неполным[11]. В частности, К. Нг[12] представила серию примеров торов, обладающих шахматным слоением, однако не являющихся так называемыми *тонкими торами* (границами трубчатых окрестностей зацеплений), как ранее утверждалось в работе Бирман и Менэско[13]. Вопрос о возможности дальнейшего упрощения этих торов до вида тонких торов при помощи допустимых преобразований оставался открытым. В диссертации дается ответ на аналогичный вопрос сформулированный на языке прямоугольных диаграмм (вместо замкнутых кос).

Следует отметить, что идея изучения слоений на поверхностях, лежащих в дополнениях к зацеплениям была использована не только в случае замкнутых кос. В 1995-1996 П. Кромвелл[14,15] использовал данную идею для изучения так называемых книжных представлений зацеплений и изучил некоторые основные свойства последних. Дальнейшее развитие этой техники и результаты для прямоугольных диаграмм зацеплений (которые являются просто другим способом описания книжных представлений зацеплений) и получил И. А. Дынников в уже упоминавшейся работе[16]. В той статье показывается, что диск, в случае тривиального узла, или сфера в случаях разводимого зацепления или связной суммы двух узлов, могут быть преобразованы так, чтобы иметь специальные слоения, высекаемые на них страницами книжного представления. Эти упрощения поверхностей проводятся при одновременном упрощении соответствующих книжных представлений при помощи элементарных движений, что в итоге дает то книжное

[11] J. S. Birman and W. W. Menasco, *Special Positions for Essential Tori in Link Complements, Errata*, Topology 37 (1998) No. 1, p. 225.

[12] K. Y. Ng, *essential tori in link complements*, Journal of Knot Theory and Its Ramifications, Vol. 7, No. 2 (1998) 205-216.

[13] J. S. Birman and W. W. Menasco, *Special Positions for Essential Tori in Link Complements*, Topology 33 (1994) No. 3, 525-556.

[14] P. Cromwell, *Embedding knots and links in an open book I: Basic properties*, Topology and its Applications 64 (1995), 37-58.

[15] P. Cromwell and I. J. Nutt, *Embedding knots and links in an open book II: bounds on arc index*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 119:2 (1996), 309-319.

[16] I. A. Dynnikov, *Arc-presentations of the links. Monotonic simplification*, ArXiv: math.GT/0208153v3, 16 Jul 2004

представление, которое требовалось получить.

Аналогично, в диссертации показывается, что каждый несжимаемый тор, лежащий в дополнении к зацеплению, может быть преобразован (вместе с упрощением соответствующего книжного представления путем применения последовательности элементарных преобразований) так, чтобы иметь шахматное слоение. Однако, в нашем случае получение шахматного слоения не означает, что пара (тор, книжное представление зацепления) может быть упрощена окончательно до вида, где тор будет тонким.

В диссертации объясняется, почему обсуждавшаяся до сих пор техника не дает окончательного упрощения пары (зацепление, тор), а также какие возникают препятствия для дальнейшего упрощения. Примеры прямоугольных диаграмм зацеплений и торов из дополнений соответствующих зацеплений, которые не могут быть окончательно упрощены при помощи элементарных преобразований без увеличения сложности, приводятся. Также указываются условия, когда монотонное упрощение возможно.

Цель работы

Цель диссертации – исследование возможности монотонного упрощения (т.е. путем применения последовательности рокировок и дестабилизаций) прямоугольной диаграммы произвольного зацепления до такого вида, в котором структура любого несжимаемого тора из дополнения к зацеплению обнаружима явно на диаграмме зацепления.

Научная новизна

В диссертации решена задача о нахождении препятствий к выявлению сателлитной структуры на прямоугольной диаграмме зацепления или узла путем монотонного упрощения. Основные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

1. Построены примеры зацеплений и несжимаемых торов в их дополнениях, такие, что соответствующие прямоугольные диаграммы не могут быть монотонно упрощены до такого вида, где структура торов станет явной.

2. Доказывается, что для серии примеров торов, полученной в работе К. Нг, возможно их упрощение разрешенными преобразованиями

до вида тонких торов, если они лежат в дополнении к узлу. При этом выявляется сателлитная структура на прямоугольной диаграмме соответствующего узла.

3. Доказано следующее:
   - Любой тор сложности меньше, чем 22, лежащий в дополнении к узлу, может быть монотонно упрощен до вида тонкого тора.
   - Существует пример узла сложности 11 и тора сложности 22, лежащего в дополнении к этому узлу, таких, что монотонным упрощением вложения пары (узел, тор) в трехмерную сферу нельзя добиться того, чтобы тор стал тонким. Соответственно, на прямоугольной диаграмме данного узла, сателлитная структура не выявляется при помощи монотонного упрощения.
   - Существуют примеры торов, лежащих в дополнении к соответствующим зацеплениям, такие, что они не могут быть получены операцией “продавливания” из тонких торов.

Основные методы исследования

В диссертации используется техника, разработанная в серии статей Дж. Бирман и В. Менэско для узлов и зацеплений, представленных замкнутыми косами, а затем адаптированная И. А. Дынниковым для изучения прямоугольных диаграмм узлов и зацеплений. В работе также используются комбинаторные методы изучения вложений торов в трехмерную сферу. Кроме того, в работе использовалась компьютерная программа, написанная автором по представленному в диссертации алгоритму. Данная программа позволила получить множество практических результатов и конкретных примеров описания комбинаторных вложений торов в трехмерную сферу.

Теоретическая и практическая ценность работы

Работа имеет теоретический характер. Результаты и методы диссертации могут найти применение в комбинаторике, теории узлов и маломерной топологии.

Апробация работы

Результаты диссертации докладывались:

- В 2009 и 2010 гг. на научно-исследовательском семинаре «Алгебраическая топология и ее приложения» кафедры высшей геометрии и топологии МГУ.
- На международной конференции «Knots in Poland 2010», Варшава (Польша), июль 2010 г.
- На XVII международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов», Москва, апрель 2010 г.

Публикации

По теме диссертации опубликовано 2 работы. Список работ приводится в конце автореферата [1-2].

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из 5 глав (первая из которых является вводной) и библиографии (55 наименований). Общий объем диссертации 53 страницы.

Краткое содержание работы

Диссертация состоит из пяти глав, первая из которых является введением.

Во **введении (глава 1)** изложена краткая история вопроса, показана актуальность темы и приведены основные результаты диссертации.

В начале **главы 2** даются определения узла, зацепления и плоской диаграммы узла. Затем приводятся следующие необходимые определения:

Определение 2.4. *Прямоугольной диаграммой узла (зацепления)* называется плоская диаграмма D узла (зацепления), удовлетворяющая следующим условиям:

1. D состоит только из вертикальных и горизонтальных отрезков, которые мы будем называть *ребрами.*
2. В каждом пересечении вертикальное ребро проходит над горизонтальным.
3. Никакие два ребра не лежат на одной прямой

Определение 2.6. Две прямоугольные диаграммы мы будем называть *комбинаторно эквивалентными*, если их можно соединить изотопией плоскости, имеющей форму $h(x, y) = (f(x), g(y))$.

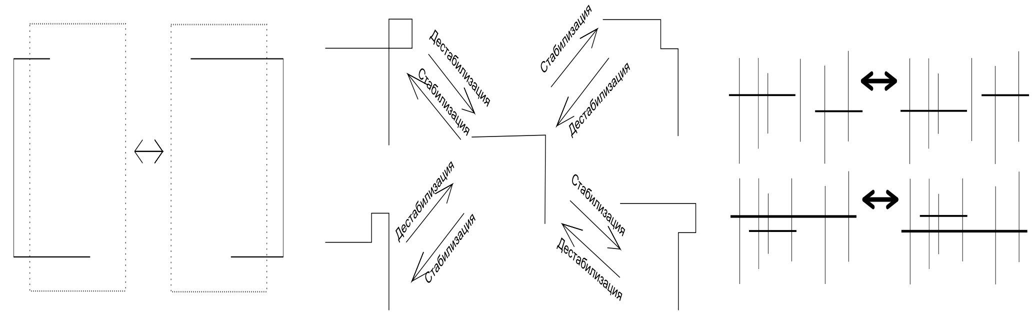
Определение 2.7. Следующие преобразования прямоугольных диаграмм будем называть элементарными преобразованиями:

1. Циклическая перестановка горизонтальных или вертикальных ребер (для примера циклической перестановки вертикальных ребер см. рис. 1 – слева)

2. Стабилизации и дестабилизации (для примера см. рис. 1 – в середине)

3. Перестановка лежащих рядом ребер, если их концы не перемежаются (такие преобразования еще называют рокировками; для примера рокировки горизонтальных ребер см. рис. 1 – справа)

Рис. 1.



Определение 2.9. *Сателлитным узлом (зацеплением)* в пространстве S^3 называют узел (зацепление) K, в дополнении к которому содержится несжимаемый тор, неизотопный ϵ-окрестности данного узла (зацепления) в пространстве $S^3\backslash K$. Сердцевину этого тора называют *компаньоном данного узла.*

Определение 2.11. Будем говорить, что прямоугольная диаграмма K_R зацепления K является *компаньоном* диаграммы L_R зацепления L если выполняется следующее:

1. Расстояние по x (соответственно, по y) между любыми двумя соседними вертикальными (соответственно, горизонтальными) ребрами K_R является большим, чем некоторая константа d.

2. Существует набор C компонент L_R, чьи вершины лежат достаточно близко к вершинам K_R. Вершины других компонент лежат достаточно далеко далеко от вершин K_R. Под этим поднимается следующее: небольшой изотопией можно сделать так, чтобы расстояние от каждой вершины каждой компоненты из C до ближайшей вершины K_R было бы не больше, чем, например, $d/100$. В то же время, расстояние от любой вершины любой

компоненты L_R, не включенной в C, до ближайшей вершины K_R больше, чем $d/5$.

3. K_R и L_R представляют разные зацепления.

Определение 2.12. Пусть L – зацепление в S^3, а $T \hookrightarrow S^3 \backslash L$ является несжимаемым тором. Будем говорить, что *структура тора T непосредственно обнаружима* (или сателлитная структура явно видна) на прямоугольной диаграмме L_R зацепления L, если T изотопен (в $S^3 \backslash L$) границе трубчатой окрестности некоторого узла K, чья прямоугольная диаграмма K_R является компаньоном диаграммы L_R.

Определение 2.13. Пусть L – зацепление в S^3, а $T \hookrightarrow S^3 \backslash L$ является несжимаемым тором. Будем говорить, что *структура тора T обнаружима на прямоугольной диаграмме L_R зацепления L при помощи монотонного упрощения*, если существует последовательность дестабилизаций и рокировок, переводящая L_R в L'_R, на которой структура тора T явно видна.

В конце главы 2 формулируются основные вопросы, изучаемые в диссертации. В самом общем виде вопрос, служащий отправной точкой для изучения, формулируется так:

Вопрос 2.14. Пусть дана прямоугольная диаграмма L_R зацепления L. Верно ли, что структура любого несжимаемого тора из дополнения к данному зацеплению обнаружима на прямоугольной диаграмме при помощи монотонного упрощения?

Глава 3 описывает технику изучения прямоугольных диаграмм зацеплений при помощи слоений, высекаемых на поверхностях, лежащих в дополнениях к зацеплениям. Для этого даются необходимые определения, а также доказывается следующая теорема (аналогично тому, как это сделано в работе И. А. Дынникова):

Теорема 3.18. Пусть имеется зацепление L в книжном представлении и несжимаемый тор T в дополнении к этому зацеплению. Тогда пару (L, T) можно изотопно перевести в пару (L', T') такую, что:

1. L' получено из L при помощи последовательности дестабилизаций и рокировок

2. Все вершины слоения $\mathcal{F}'$, высекаемого на торе T' страницами книжного представления, имеют валентность 4. Любые два соседних седла слоения $\mathcal{F}'$ имеют разную ориентацию.

Будем говорить, что торы, получаемые в теореме 3.18, *обладают шахматным слоением.*

В конце главы 3 объясняется, почему наличие шахматного слоения, высекаемого на торе страницами книжного представления еще не означает, что тор является тонким.

В **главе 4** строится пример прямоугольной диаграммы зацепления, на которой сателлитная структура не может быть обнаружена при помощи монотонного упрощения этой прямоугольной диаграммы. Показывается, что несжимаемый тор из дополнения к данному зацелению может быть устроен также, как пример тора, построенный в работе К. Нг[17]. Данный результат сформулирован в виде следующей теоремы:

Теорема 4.1. Существуют прямоугольные диаграммы L_R и L'_R зацепления L и несжимаемый тор $T \hookrightarrow S^3 \backslash L$, такой, что выполняется следующее:

1. Структура T непосредственно обнаружима на L'_R.
2. Структура T не обнаружима на L_R.
3. Не существует последовательности дестабилизаций и рокировок, преобразующей L_R в L'_R.

Кроме того, в главе 4 формулируются и доказываются следующие теоремы:

Теорема 4.9. Существуют прямоугольные диаграммы L_R и L'_R зацепления L и несжимаемый тор $T \hookrightarrow S^3 \backslash L$ *из JSJ-разложения* $S^3 \backslash L$, такой, что выполняется следующее:

1. Структура T непосредственно обнаружима на L'_R.
2. Структура T не обнаружима на L_R.
3. Не существует последовательности рокировок и дестабилизаций, преобразующей L_R в L'_R.

Теорема 4.13. Существуют прямоугольные диаграммы L_R и L'_R зацепления L, **состоящего из двух компонент** и несжимаемый тор $T \hookrightarrow S^3 \backslash L$, такие, что выполняется следующее:

1. Структура T непосредственно обнаружима L'_R.
2. Структура T не обнаружима непосредственно на L_R.

[17] K. Y. Ng, *essential tori in link complements*, Journal of Knot Theory and Its Ramifications, Vol. 7, No. 2 (1998) 205-216.

3. Не существует последовательности рокировок и дестабилизаций, переводящей L_R в L'_R.

Также приводится техническое утверждение 4.11. о том, что утверждения теорем 4.1. и 4.9. останутся верными, даже если разрешить использовать флайпы вместо элементарных движений.

В **главе 5** приводится пример узла и тора, лежащего в дополнении к данному узлу и имеющего сложность 22, таких, что при помощи монотонного упрощения тор не может быть упрощен до вида тонкого тора. Доказывается также, что если тор в дополнении к книжному представлению узла имеет сложность менее 22, то при помощи монотонного упрощения структуру данного тора можно выявить на прямоугольной диаграмме узла. Кроме того, показывается, что любой тор из серии торов, предложенной К. Нг допускает монотонное упрощение до вида тонкого тора. Также находится пример вложения тора, которое не может быть получено в результате операции "продавливания" из тонкого тора (гипотеза о том, что любой тор может быть получен "продавливанием" из тонкого тора была выдвинута К. Нг).

Данные результаты сформулированы в виде следующих теорем:

Теорема 5.7. Пусть имеется узел K в книжном представлении и тор Нг в дополнении к этому узлу: $T \hookrightarrow S^3 \backslash K$, являющийся компаньоном данного узла. Тогда производя лишь рокировки и дестабилизации, а также изотопно меняя вложение тора T в $S^3 \backslash K$, можно добиться того, чтобы тор T стал тонким.

Теорема 5.20. Существует тор, имеющий шахматное слоение, который не может быть получен операцией продавливания из тонкого тора.

Теорема 5.22. Пусть имеется узел K в книжном представлении и несжимаемый тор T в дополнении к нему. Пусть сложность вложения тора меньше, чем 22. Тогда пара (T, K) может быть монотонно преобразована в пару (T', K'), где тор T' является тонким.

Теорема 5.24. Существуют прямоугольные диаграммы L_R и L'_R **узла** K и несжимаемый тор $T \hookrightarrow S^3 \backslash L$, такие что выполняется следующее:

1. Структура T непосредственно обнаружима на L'_R.

2. Структура T не обнаружима непосредственно на L_R.

3. Не существует последовательности **флайпов**, переводящей L_R в L'_R без увеличения сложности промежуточных диаграмм.

Благодарности

Автор благодарит своего научного руководителя, доктора физико-математических наук, профессора Ивана Алексеевича Дынникова за постановку задачи, помощь, внимание и интерес к работе. Автор также благодарит всех сотрудников кафедры высшей геометрии и топологии за творческую атмосферу, которая способствовала научной работе.

Работы автора по теме диссертации

[1] Казанцев А. Д., Монотонное упрощение книжных представлений некоторых сателлитных узлов. Успехи математических наук, том 65, вып. 4 (394), стр. 195-196 (2010).

[2] A. Kazantsev, The problem of detecting the satellite structure of a link by monotonic simplification, Journal of knot theory and its ramifications, Vol. 20 (2011), No. 1, pp. 109-125.