Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Механико–математический факультет

На правах рукописи
УДК 517.91+517.925.41+517.925.926+517.938

Мычка Евгений Юрьевич

# О СТРОЕНИИ ОКРЕСТНОСТИ ИЗОЛИРОВАННОЙ СТАЦИОНАРНОЙ ТОЧКИ ЛОКАЛЬНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ НА ПЛОСКОСТИ, ДОПУСКАЮЩЕЙ ПЕРВОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

01.01.04 — геометрия и топология

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук

Москва 2011

Работа выполнена на кафедре общей топологии и геометрии Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

**Научный руководитель:**
доктор физико-математических наук,
профессор Филиппов Владимир Васильевич.

**Официальные оппоненты:**
доктор физико-математических наук,
профессор Иванов Александр Владимирович;
доктор физико-математических наук,
профессор Сергеев Игорь Николаевич.

**Ведущая организация:**
Московский государственный университет геодезии и картографии (МИИГАиК)

Защита диссертации состоится 25 марта 2011 года в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 при Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, МГУ, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 25 февраля 2011 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д.501.001.84 при МГУ
доктор физико-математических наук,
профессор А. О. Иванов.

## Общая характеристика работы

**Актуальность темы.**

Диссертация относится к изучению свойств топологических структур, связанных с обыкновенными дифференциальными уравнениями (ОДУ) и динамическими системами. В диссертации исследуется окрестность изолированной стационарной точки (ИСТ) локальной динамической системы (ЛДС) на плоскости по первому приближению. Исследование ведется в рамках аксиоматической теории ОДУ.

Аксиоматическая теория ОДУ была предложена и активно развивается В.В.Филипповым[1] (МГУ). Она уже позволила получить ряд существенно новых результатов, в том числе существование решений для уравнений с особенностями, не удовлетворяющими условиям Каратеодори. Аксиоматический подход В. В. Филиппова расширяет область применения своих результатов. Введенное понятие "сходимости пространств решений" позволяет изучать зависимость решений от параметров в правой части уравнений, исследовать асимптотические свойства решений в окрестности ИСТ при $t \to \infty$, включая свойство устойчивости по первому приближению, а также другие свойства решений в случаях, не охватываемых классической теорией. Попытки подобного рода предпринимались и раньше такими известными математиками как S.K. Zaremba, В.В. Немыцкий, Е.А. Барбашин и др. Однако теория В. В. Филиппова имеет дело с более широкими объектами, включающими в себя результаты других рассмотрений как частные случаи. Например, относительно недавний результат, полученный Л. С. Сугаиповой[2], гласит о том, что обобщенная динамическая система, введенная Е.А.Барбашиным, совпадает с пространствами класса $A_{ce}(X)$ теории В.В. Филиппова.

Известная монография А. Ф. Филиппова[3] посвящена дифференциальным уравнениям с разрывной правой частью. Подобные уравнения возникают в задачах механики, электротехники, теории автоматического управления и в

[1] В. В. Филиппов *Пространства решений обыкновенных дифференциальных уравнений*, Москва, Изд-во МГУ, 1993, 336 с.; В. В. Филиппов *Топологическое строение пространств решений обыкновенных дифференциальных уравнений*, Успехи математических наук, т. 48, №1, 1993, с. 103-154; V. V. Filippov *Basic topological structures of the theory of ordinarydifferential equations*, Topology in Nonlinear analysis, Banach center publications, 35, 1996, p.171-192; V. V. Filippov *Basic topological structures of ordinary differential equations*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London, 1998; V. V. Filippov *Topological structures of ordinary differential equations*, Open problems in Topology II, Elsevier B.V., 2007, p.561-565; В. В. Федорчук, В. В. Филиппов *Общая топология. Основные конструкции*, Москва, Издательство МГУ, 1988.

[2] Л. С. Сугаипова *Применение аксиоматического метода для исследования автономных систем на плоскости*, Москва, Дисс. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук, 2002, 69 с.

[3] А. Ф. Филиппов. *Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью*, Москва: Наука, 1985.

других областях науки. Ввиду наличия такого большого числа прикладных задач и связанных с ними дифференциальных уравнений с разнообразными особенностями, развитие аксиоматического метода является особенно актуальной задачей.

**Цель работы.**

В монографии[4] O. Hajek'ом была изложена теория ЛДС. Топология на пространстве ЛДС была введена по аналогии с бикомпактно-открытой топологией пространства отображений. Однако O. Hajek'y не были известны реальные приложения этой топологической структуры. Основной целью диссертации является показать, что содержательное использование этой топологии может заметно расширить сферу приложений теории ЛДС. Это делается на примере исследования окрестности ИСТ ЛДС на плоскости.

**Научная новизна.**

Результаты диссертации являются новыми, получены автором самостоятельно. Решается задача, связанная с исследованием ЛДС по ее первому приближению. Основные результаты диссертации состоят в следующем:

— Построен гомеоморфизм между пространством $\mathscr{L}(X)$ ЛДС и пространством $A_{ceu}(X)$.

— Дано полное описание строения окрестности ИСТ ЛДС на плоскости в том случае, когда все сектора являются правильными. Построен гомеоморфизм окрестности ИСТ на окрестность ИСТ некоторой стандартной системы.

— Доказано утверждение о том, что если в пространстве $Z_\infty$, являющимся первым приближением пространства $Z$, все параболические сектора устойчивы, то окрестности исследуемой точки фазовых плоскостей пространств $Z$ и $Z_\infty$ устроены одинаково, т. е. количество, тип и порядок следования секторов совпадают. В классическом случае для двумерной системы линейных дифференциальных уравнений условие устойчивости параболических секторов выполняются автоматически. Также показано, что если пространство решений в окрестности ИСТ допускает первое приближение, то параболические и эллиптические сектора являются правильными, а гиперболические сектора являются простыми.

— Доказано утверждение об одной асимптотической оценке решений ЛДС, допускающей первое приближение.

**Методы исследования.**

В работе используются методы общей топологии, теории линейно упорядоченных связных множеств, качественной теории ОДУ, а также результаты

[4] O. Hajek. *Dynamical Systems in the Plane*, Academic Press, London and New York, 1968.

селекционной теоремы Майкла.

**Теоретическая и практическая ценность.**

Работа имеет теоретический характер. Результаты диссертации могут найти применение в теории динамических систем и качественной теории ОДУ.

**Апробация работы.**

Результаты диссертации неоднократно докладывались автором на семинаре кафедры общей топологии и геометрии Механико–математического факультета МГУ (2008, 2009, 2010гг.), а также на международной конференции "Современные проблемы математики, механики и их приложений", посвященная 70-летию ректора МГУ академика В.А.Садовничего (2009 г.).

**Публикации.**

Результаты диссертации опубликованы в 4 работах. Список работ приведен в конце автореферата [1–4].

**Структура и объем диссертации.**

Диссертация изложена на 77 страницах и состоит из введения, четырех глав и списка литературы, включающего 22 наименование.

## Содержание работы

Во введении содержится справка об аксиоматической теории, предложенной В. В. Филипповым, приводятся основные определения и формулировки теорем, доказанных в диссертации.

Также во введении обосновывается актуальность темы диссертации и дан краткий обзор полученных в диссертации результатов.

**1.** В первой главе содержатся два результата, связанные со сравнением двух подходов к аксиоматическому построению теории ОДУ: теории ЛДС и теории В. В. Филиппова.

**Подход O. Hajek'a.** Пусть $X$ – локально компактное метрическое пространство. Поставим каждой точке $x \in X$ в соответствие интервал $I_x = (a_x, b_x)$ действительной прямой, содержащий 0. Пусть

$$D_\mu = \bigcup_{x \in X} I_x \times \{x\},$$

тогда отображение $\mu : D_\mu \to X$ называется (непрерывной) ЛДС на $X$, если оно удовлетворяет следующим четырем аксиомам:

A1. $D_\mu$ открыто в $\mathbb{R} \times X$;

A2. $\mu(0, x) = x$ для всех $x \in X$;

A3. $\mu(t, \mu(s, x)) = \mu(t + s, x)$, если

а). $(s, x) \in D_\mu$ и $(t, \mu(s, x)) \in D_\mu$ или

б). $(s, x) \in D_\mu$ и $(t + s, x) \in D_\mu$;

A4. $\mu(t, x)$ непрерывно на $D_\mu$.

**Подход В. В. Филиппова.** Пусть $X$ – локально компактное метрическое пространство. Рассмотрим множество $C_s(U)$ всех непрерывных функций, определенных на всевозможных отрезках и одноточечных подмножествах действительной прямой, графики которых лежат в множестве $U = \mathbb{R} \times X$. На множестве $C_s(U)$ зададим метрику Хаусдорфа, после чего $C_s(U)$ становится топологическим пространством. Рассмотрим подпространство $Z \subseteq C_s(U)$. Пусть в пространстве $Z$ выполнены следующие свойства, которые в дальнейшем будем называть аксиомами (или условиями):

1. Если $z \in Z$, то для любого отрезка $I \subseteq \pi(z)$ $z\mid_I \in Z$.

2. Если области определения функций $z_1, z_2 \in Z$ пересекаются и функции $z_1, z_2$ совпадают на множестве $\pi(z_1) \bigcap \pi(z_2)$, то определенная на множестве $\pi(z_1) \bigcup \pi(z_2)$ функция

$$z(t) = \begin{cases} z_1(t) & \text{при } t \in \pi(z_1); \\ z_2(t) & \text{при } t \in \pi(z_2) \end{cases}$$

также принадлежит множеству $Z$.

3. Если функция $z$ принадлежит $Z$, то для любого $a \in \mathbb{R}$ функция $z(t+a)$ также принадлежит $Z$.

$(e)$ Для любой точки $(t, y) \in U$ существует функция $z \in Z$ такая, что область определения функции $z$ будет содержать точку $t$ строго внутри себя и $z(t) = y$.

$(c)$ Для любого компакта $K \subseteq U$ множество $Z_K$ компактно.

$(u)$ Если области определения функции $z_1, z_2 \in Z$ совпадают и в некоторой точке $t$ их общей области определения $z_1(t) = z_2(t)$, то $z_1 = z_2$.

Если множество $Z$ удовлетворяем аксиомам (1) и (2), то будем писать $Z \in R(U)$. Если множество $Z$ удовлетворяем аксиомам (1) – (3), то будем писать $Z \in A(X)$. Если дополнительно выполнены еще некоторые аксиомы ($(c)$, $(e)$ или $(u)$), то это будем отображать в нижнем индексе $A$, т. е. если выполнены аксиомы $(c)$, $(e)$ и $(u)$, то $Z \in A_{ceu}(X)$.

Первый результат показывает, что ЛДС и пространство класса $A_{ceu}(X)$ являются различными описаниями одного и того же объекта.

Второй результат состоит в том, что топология, введенная ранее O. Hajek'ом на пространстве ЛДС, совпадает с топологией пространства $A_{ceu}(X)$, рассматриваемой в рамках теории В. В. Филиппова.

**2.** Во второй главе дается полное описание строения окрестности ИСТ ЛДС на плоскости в том случае, когда все сектора являются правильными. Как будет показано в третьей главе, такая ситуация реализовывается, например, когда исследуемая ЛДС допускает первое приближение.

Рассмотрим пространство $Z \in A_{ceu}(X)$, где $X$ является окрестностью некоторой ИСТ $q \in \mathbb{R}^2$. Можно считать без ограничения общности, что окрестность $X$ не содержит других стационарных точек. Обозначим через $C$ границу окрестности $X$. В работах Л. С. Сугаиповой[5] были доказаны следующие утверждения:

**Теорема 1.** *Достаточно малую окрестность ИСТ $q$ можно разбить на конечное число секторов, каждый из которых может быть эллиптическим, параболическим или гиперболическим.*

**Теорема 2.** *Около ИСТ $q$ всегда можно найти столь малую окрестность, что каждая полутраектория будет либо стремиться к $q$, либо покидать окрестность за конечное время.*

В этих утверждениях не сказано о том как траектории соответствующих секторов могут себя вести по отношению к границе $C$ окрестности $X$. В связи с этим во второй главе делаются некоторые уточнения в этих направлениях. Доказаны следующие утверждения:

**Теорема 3.** *В параболическом секторе существует такая задняя стенка, гомеоморфная отрезку, что любая траектория сектора, отличная от стационарной и эллиптической, пересекает ее ровно один раз.*

**Теорема 4.** *В гиперболическом секторе найдется такая задняя стенка $[a, b]$, гомеоморфная отрезку, с отмеченной точкой $m \in [a, b]$, что через полуинтервал $[a, m)$ траектории будут только входить в сектор, через полуинтервал $(m, b]$ траектории будут только выходить из сектора, а в точке $m$ будет только внешнее касание некоторой траектории.*

Задние стенки, существование которых утверждается в теоремах, будем называть *правильными.*

Теперь предположим, что все сектора удовлетворяют некоторым дополнительным ограничениям.

Параболический сектор будем называть *правильным*, если в нём нет эллиптических траекторий.

[5] Л. С. Сугаипова *Исследование предельных множеств траекторий на плоскости аксиоматическим методом*, Вестн. моск. ун-та, сер.1, математика. механика, №4 2003, с. 13-16; Л. С. Сугаипова *Исследование особой точки аксиоматическим методом*, Вестн. моск. ун-та, сер.1, математика. механика, №5, 2004, с. 3-6.

Эллиптический сектор будем называть *правильным*, если для любых двух его траекторий $x(t)$ и $y(t)$ либо траектория $x(t)$ содержится в области, ограниченной траекторией $y(t)$ и точкой $q$, либо наоборот.

Гиперболический сектор будем называть *простым*, если в нём нет эллиптических траекторий.

Гиперболический сектор будем называть *правильным*, если он является простым и существует такая правильная задняя стенка $\gamma$, что если траектории $x(t)$ и $y(t)$ начинаются и заканчиваются на $\gamma$ и $x(t)$ лежит в области, ограниченной $\gamma$ и $y(t)$, то $x(t)$ проходится быстрее, чем $y(t)$.

В третьей главе будет показано, что условие существования первого приближения исследуемого пространства $Z \in A_{ceu}(X)$ достаточно для того, чтобы параболические и эллиптические сектора окрестности $X$ были правильными, а гиперболические сектора были простыми.

**Теорема 5.** *В окрестности ИСТ $q$, состоящей из правильных секторов, найдется такая окрестность с границей $C$, гомеоморфной окружности, что каждый эллиптический сектор будет пересекать границу $C$ по одной точке, каждый эллиптический сектор будет находиться между параболическими секторами, и части границы $C$, ограничивающие гиперболические или параболические сектора, будут правильными стенками.*

Границу $C$ окрестности ИСТ $q$, существование которой утверждается в теореме, будем называть *правильной*.

Пусть $Z_1 \in A_{ceu}(X_1)$ и $Z_2 \in A_{ceu}(X_2)$. Назовем пространства $Z_1$ и $Z_2$ *изоморфными*, если найдется гомеоморфизм $f$ между $X_1$ и $X_2$ такой, что $f(z_x(t)) = z_{f(x)}(t)$ для всех $x \in X_1$ и $t \in \pi(z_x)$. Если пространства $Z_1$ и $Z_2$ изоморфны, то будем писать $Z_1 \simeq Z_2$.

**Теорема 6.** *Пусть $Z_1 \in A_{ceu}(X_1)$ и $Z_2 \in A_{ceu}(X_2)$, где $X_1$ и $X_2$ – правильные окрестности ИСТ $q_1$ и $q_2$ с правильными границами. Если между границами окрестностей $X_1$ и $X_2$ существует гомеоморфизм, сохраняющий тип точек, то $Z_1 \simeq Z_2$.*

**3.** Третья глава является основной, в ней затрагиваются вопросы, которые отражает название диссертации. Понятие “сходимости пространств решений” является одним из важных понятий теории В. В. Филиппова, которое используется в третьей главе. Это понятие позволяет применить метод первого приближения для исследования окрестности ИСТ ЛДС.

По определению, семейство пространств $Z_\alpha \in A_{ceu}(X)$ сходится к пространству $Z_\infty$ при $\alpha \to +\infty$ в области $X$, если для любого компакта $K \subseteq \mathbb{R} \times X$, для любой последовательности чисел $\alpha_i \to +\infty$ и для любой последовательности функций $z_i \in Z_{\alpha_i}$, графики которых лежат в компакте $K$, найдется функция $y \in Z_\infty$ и подпоследовательность $\{x_{i_j}\}$, сходящаяся к функции $y$.

Поместим начало координат в исследуемую точку $\vec{0}$. Увеличение окрестности $X$ точки $\vec{0}$ в $\lambda$ раз соответствует переходу от исследуемого пространства $Z$ к пространству $Z_\lambda := \{\lambda z : z \in Z\}$. Предельное пространство $Z_\infty$ семейства $Z_\lambda$ при $\lambda \to +\infty$, если оно существует, называется первым приближением пространства $Z$. Нас интересует вопрос какие характеристики строения фазового портрета окрестности исследуемой точки относительно пространства $Z_\infty$ переносятся на аналогичный объект относительно пространства $Z$.

Параболический сектор в пространстве $Z_\infty$ будем называть *устойчивым*, если с ним граничат либо только эллиптические сектора, либо только гиперболические сектора.

Основными результатами третьей главы являются следующие утверждения.

**Теорема 7.** *Если в пространстве $Z_\infty$ все параболические сектора (возможно вырожденные в параболическую траекторию) устойчивы, то окрестности ИСТ соответствующих фазовых плоскостей пространств $Z$ и $Z_\infty$ устроены одинаково, т. е. количество, тип и порядок следования секторов совпадают.*

Назовем пространства $Z_1 \in A_{ceu}(X)$ и $Z_2 \in A_{ceu}(Y)$ *локально изоморфными*, если найдутся такие подмножества $X_1 \subseteq X$ и $Y_1 \subseteq Y$, что пространства $(Z_1)_{X_1} \in A_{ceu}(X_1)$ и $(Z_2)_{Y_1} \in A_{ceu}(Y_1)$ будут уже изоморфными. Если пространства $Z_1$ и $Z_2$ локально изоморфны, то будем писать $Z_1 \overset{loc}{\simeq} Z_2$.

**Теорема 8.** *Если в пространстве $Z_\infty$ нет гиперболических секторов, то $Z \overset{loc}{\simeq} Z_\infty$.*

Приведенные в диссертации примеры показывают существенность всех условий в данных утверждениях.

**4.** В последней главе доказывается утверждение об асимптотической оценке решений ЛДС, допускающей первое приближение.

Если $z(t)$ является входящей параболической траекторией пространства $Z$, то обозначим через $\theta_z(t)$ любое накрытие отображения $z(t)/||z(t)||$ в окружность. Через $\theta^*(z)$ обозначим верхний предел $\overline{\lim}_{t\to+\infty}\theta_z(t)$, а через $\theta_*(z)$ обозначим нижний предел $\underline{\lim}_{t\to+\infty}\theta_z(t)$.

Для произвольного числа $\varphi \in \mathbb{R}$ обозначим через $l(\varphi)$ луч $\{\mu(\cos\varphi, \sin\varphi) : \mu > 0)\}$ и для чисел $0 < \beta - \alpha < 2\pi$ обозначим через

$S(\alpha,\beta)$ множество $\bigcup\{l(\varphi)\,:\,\alpha<\varphi<\beta\}$. Если $x\in\mathbb{R}^2$, то через $z_x\in Z$ обозначим функцию с начальным условием $z_x(0)=x$.

Пусть

1) пространство $Y\in A_{ceu}(\mathbb{R}^2)$ является первым приближением пространства $Z\in A_{ceu}(V)$;

2) $v(t)$ является входящей параболической траекторией пространства $Z$ и $-\infty<\theta_*(v)\le\theta^*(v)<+\infty$.

Рассмотрим сектор $[S(\theta_*(v),\theta^*(v))]$ в фазовой плоскости пространства $Y$. Обозначим через $x(\varphi)$ точку пересечения единичной окружности с лучом $l(\varphi)$. Определим следующие величины:

$$\lambda_1=\min_{\theta_*(v)\le\varphi\le\theta^*(v)}\ln||z_{x(\varphi)}(1)||,$$

$$\lambda_2=\max_{\theta_*(v)\le\varphi\le\theta^*(v)}\ln||z_{x(\varphi)}(1)||.$$

Для функции $v$ определим число $\lambda[v]=\overline{\lim}_{t\to+\infty}t^{-1}\ln||v(t)||$, которое называется *(верхним) показателем Ляпунова*, и число $\pi[v]=\underline{\lim}_{t\to+\infty}t^{-1}\ln||v(t)||$, которое называется *(нижним) показателем Перрона.*

**Теорема 9.** *Пусть выполнены условия 1) и 2). Тогда*

$$\lambda_1\le\pi[v]\le\lambda[v]\le\lambda_2.$$

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю, профессору В. В. Филиппову за постановку задач и постоянное внимание к работе. Автор выражает глубокую благодарность всем сотрудникам кафедры общей топологии и геометрии за внимание к работе.

**Работы автора по теме диссертации**

[1] Е. Ю. Мычка *Пространство локальных динамических систем* $\mathscr{L}(X)$ *и пространство В.В. Филиппова* $A_{ceu}(X)$, Дифференциальные Уравнения, 2010, т. 46, №4, с. 499–505.

[2] Е. Ю. Мычка *О строении окрестности изолированной стационарной точки локальной динамической системы на плоскости*, Дифференциальные Уравнения, 2011, т. 47, №2.

[3] Е. Ю. Мычка *Пространство локальных динамических систем и пространство В.В. Филиппова* $A_{ceu}(X)$, Материалы международной конференции "Современные проблемы математики, механики и их приложений", посвященная 70-летию ректора МГУ академика В.А.Садовничего, г. Москва, МГУ им. М. В. Ломоносова, 30 марта – 02 апреля 2009г., с. 180.

[4] Е. Ю. Мычка *Исследование окрестности изолированной стационарной точки локальной динамической системы на плоскости по первому приближению* // МГУ - Москва, 2010, -23с, ил. - Библиогр.: 5 назв. - Рус. Деп. в ВИНИТИ 20.12.10 № 712-В2010.