Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова

Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 512.815.1, 512.816.2

Стырт Олег Григорьевич

Компактные линейные группы с факторпространством, гомеоморфным клетке

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2011

Работа выполнена на кафедре высшей алгебры Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Винберг Эрнест Борисович
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Шварцман Осип Владимирович
	кандидат физико-математических наук Шмелькин Дмитрий Альфредович
Ведущая организация:	Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

Защита диссертации состоится 8 апреля 2011 г. в 16 ч. 45 м. на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 при Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д.1, МГУ, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж)

Автореферат разослан 8 марта 2011 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д.501.001.84 при МГУ
доктор физико-математических наук,
профессор

А.О. Иванов

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Работа относится к теории групп Ли. Она посвящена описанию компактных линейных групп с факторпространством, гомеоморфным векторному пространству (клетке).

Поводом к исследованию данной проблемы послужила задача нахождения комплексных редуктивных линейных групп со свободной алгеброй инвариантов, подробно изучавшаяся с середины XX века. Первый результат в этой области описывает случай конечной группы и был получен Шепардом и Тоддом[1] и Шевалле[2]. Прежде чем сформулировать его, потребуется дать определение *отражения* и *псевдоотражения*.

Определение. Линейный оператор в векторном пространстве над некоторым полем называется *отражением* (соотв. *псевдоотражением*), если подпространство его неподвижных точек имеет коразмерность 1 (соотв. 2).

Теорема 1 (Шепард—Тодд—Шевалле). *Для конечной линейной группы G, действующей в комплексном векторном пространстве V, следующие условия эквивалентны*:

1) *алгебра инвариантов группы G свободна*;
2) *группа G порождена отражениями.*

Известно также, что при выполнении условий 1) и 2) теоремы 1 фактор V/G является комплексным многообразием, изоморфным V.

Позднее, в течение последних трёх десятилетий XX в., были перечислены комплексные редуктивные линейные группы со свободной алгеброй инвариантов в ряде важных классов групп: в классе связных простых неприводимых групп — В. Г. Кацем, В. Л. Поповым и Э. Б. Винбергом[3]; в классе связных простых приводимых групп — О. М. Адамович и Е. О. Головиной[4] и Шварцем[5]; в классе связных полупростых неприводимых групп — Лит-

[1] G. C. Shephard, J. A. Todd, *Finite unitary reflection groups*, Canad. J. Math., vol. 6, №2, pp. 274—304 (1954).

[2] C. Chevalley, *Invariants of finite groups generated by reflections*, Amer. J. Math., vol. 77, pp. 778—782 (1955).

[3] V. G. Kac, V. L. Popov, E. B. Vinberg, *Sur les groupes algébriques dont l'algèbre des invariants est libre*, C. r. Acad. sci. Paris, vol. 283, ser. A, pp. 875—878 (1976).

[4] О. М. Адамович, Е. О. Головина, *Об инвариантах пары билинейных форм*, Вестн. МГУ, Сер. мат., мех., №2, pp. 15—18 (1977).

[5] G. W. Schwarz, *Representations of simple Lie groups with regular rings invariants*, Inv. Math., vol. 49, pp. 167—191 (1978).

тельманом[6]; в классе несвязных простых групп — Д. А. Шмелькиным[7].

Описание вещественных редуктивных линейных групп со свободной алгеброй инвариантов сводится к комплексному случаю путём перехода к комплексификации группы и пространства представления. Так, для вещественного векторного пространства V и конечной группы $G \subset \mathbf{GL}(V)$ остаются эквивалентными условия 1) и 2) теоремы 1, однако из них не следует, что фактор V/G является (вещественным) многообразием, изоморфным V. Дело в том, что над полем $\mathbb{R}$ неверна теорема Гильберта о нулях, и, как следствие, каноническое отображение $V \to \operatorname{Spec} \mathbb{R}[V]^G$ не сюръективно (неравенства, задающие его образ, получены Прочези и Шварцем[8]). К примеру, фактор любой конечной группы отражений гомеоморфен (замкнутой) камере Вейля и потому не гомеоморфен векторному пространству, в то время как факторпространство линейной группы $\{\pm E\} \subset \mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$, не содержащей отражений, гомеоморфно $\mathbb{R}^2$.

В связи с этим возникла проблема описания компактных (вещественных) линейных групп с факторпространством, гомеоморфным векторному пространству. Рассмотрение только компактных групп обусловлено тем, что их факторпространства хаусдорфовы.

По ряду причин в работе изучаются также другие «хорошие» свойства, которыми могут обладать компактные линейные группы. Для понимания этих свойств и формулировки ранее полученных результатов понадобятся следующие определения.

Определение. Непрерывное отображение C^∞-гладких многообразий назовём *кусочно-гладким*, если оно переводит любое относительно компактное гладкое подмногообразие в конечное объединение гладких подмногообразий.

В частности, всякое гладкое отображение является кусочно-гладким.

Рассмотрим непрерывное действие компактной топологической группы G на гладком многообразии M.

Определение. Будем говорить, что фактор действия $G\colon M$ *сильно диффеоморфен* (*диффеоморфен*) гладкому многообразию M', если топологический фактор M/G гомеоморфен M', причём гомеоморфизм можно построить так, чтобы в соответствии с ним отображение факторизации $M \to M'$ было гладким (кусочно-гладким).

---

[6] P. Littelmann, *Koreguläre und äquidimensionale Darstellungen*, J. Algebra, vol. 123, pp. 193—222 (1989).

[7] Д. А. Шмелькин, *О несвязных простых линейных группах со свободной алгеброй инвариантов*, Изв. РАН, Сер. мат., т. 60, № 4, pp. 159—204 (1996).

[8] C. Procesi, G. W. Schwarz, *Inequalities defining orbit spaces*, Inv. Math., vol. 81, pp. 539—554 (1985).

Определение. Будем говорить, что фактор действия $G \colon M$ является *гладким многообразием*, если он диффеоморфен некоторому гладкому многообразию.

Пусть имеется точное линейное представление компактной группы Ли G в вещественном векторном пространстве V. В работе изучается вопрос о том, является ли фактор V/G этого действия топологическим многообразием, а также является ли он гладким многообразием. Для краткости будем в дальнейшем называть топологическое многообразие просто «многообразием».

Исследования в этой области были начаты с конечных групп. Именно, в 1984 г. М. А. Михайлова показала, что, во-первых, факторпространство конечной линейной группы, порождённой псевдоотражениями, гомеоморфно пространству представления, а во-вторых, что если факторпространство конечной линейной группы сильно диффеоморфно пространству представления, то данная линейная группа порождена псевдоотражениями[9].

В диссертации рассматриваются группы с коммутативной связной компонентой и трёхмерные группы.

Основным методом является свед́ение проблемы к более «простым» представлениям (с меньшей размерностью группы либо пространства представления) при помощи перехода к *слайс-представлениям*, подобно тому, как это делается в задаче описания комплексных редуктивных линейных групп со свободной алгеброй инвариантов. В качестве ключевого факта здесь выступает *теорема о слайсе* для компактных групп преобразований[10].

Цель работы

- Решить задачу нахождения всех компактных линейных групп с коммутативной связной компонентой, факторпространство которых гомеоморфно клетке.
- Найти все трёхмерные простые компактные линейные группы с факторпространством, гомеоморфным клетке.

Научная новизна

Результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем.

[9]М. А. Михайлова, *О факторпространстве по действию конечной группы, порождённой псевдоотражениями*, Изв. АН СССР, Сер. мат., т. 48, № 1, pp. 104—126 (1984).

[10]Г. Бредон, *Введение в теорию компактных групп преобразований*, М.: Наука, 1980.

1) Найдены все компактные линейные группы с коммутативной связной компонентой, факторпространство которых диффеоморфно клетке.
2) Показано, что размерность представления трёхмерной компактной группы Ли, фактор которого диффеоморфен клетке, не превосходит девяти.
3) Для связной трёхмерной компактной группы, действующей в пространстве размерности не выше 9, во всех случаях, кроме двух, выяснено, является ли фактор представления многообразием, диффеоморфным клетке.

Основные методы исследования

В работе применяются методы линейной алгебры, теории групп Ли и их представлений, алгебраической топологии, в частности, теорема о слайсе.

Теоретическая и практическая ценность работы

Диссертация имеет теоретический характер. Полученные в диссертации результаты могут найти применение в теории групп Ли и топологии.

Апробация работы

Результаты диссертации докладывались:

- на конференции, посвящённой 100-летию со дня рождения А.Г. Куроша (Москва, МГУ, 2008 г.);
- на семинаре «Римановы поверхности, алгебры Ли и математическая физика» (Москва, НМУ, 2010 г.);
- на научно-исследовательском семинаре по алгебре под руководством порф. В. Н. Латышева и др. (Москва, МГУ, 2010 г.).

Публикации

Результаты автора по теме диссертации опубликованы в двух работах. Список работ приводится в конце автореферата [1—2].

Структура и объем диссертации

Диссертационная работа состоит из 4 глав (первая из которых является вводной). Список литературы включает 15 наименований. Общий объем диссертации составляет 54 страницы.

Краткое содержание работы

Первая глава является введением. В ней обсуждается история изучаемых вопросов, дается обзор ранее известных результатов и формулируются основные утверждения, доказанные в диссертации.

Во **второй главе** мы напоминаем необходимые для доказательства основных результатов диссертации известные понятия и утверждения, принадлежащие другим авторам, из теории групп преобразований. Также мы устанавливаем соглашения относительно обозначений и понятий, используемых в диссертации.

В **третьей главе** описываются все компактные линейные группы с коммутативной связной компонентой, факторпространство которых гомеоморфно клетке.

Через G^0 будем обозначать связную компоненту единицы компактной линейной группы $G \subset \mathbf{GL}(V)$, через $\mathfrak{g}$ — её касательную алгебру.

Предположим, что группа G^0 коммутативна.

Все неприводимые представления группы G^0 имеют размерность 1 или 2. Каждому из её двумерных неприводимых представлений соответствует вес — нетривиальная линейная функция $\lambda\colon \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathfrak{g}^*$; одномерным же представлениям естественно сопоставить нулевые веса $\lambda = 0 \in \mathfrak{g}^*$.

Классы изоморфных неприводимых представлений группы G^0 характеризуются весами $\lambda \in \mathfrak{g}^*$, определёнными с точностью до знака. Множество $P \subset \mathfrak{g}^*$ весов λ, соответствующее разложению V в прямую сумму неприводимых компонент (с учётом кратностей последних), не зависит от разложения.

Разложением множества векторов конечномерного линейного пространства на компоненты будем называть его представление в виде объединения своих подмножеств, линейные оболочки которых линейно независимы. Если среди этих линейных оболочек по крайней мере две нетривиальны, то такое разложение назовём собственным. Будем говорить, что множество *неразложимо*, если оно не допускает ни одного собственного разложения на компоненты.

Конечное множество векторов конечномерного пространства, рассматриваемое с учётом кратностей своих элементов, назовём *q-устойчивым* ($q \geqslant 0$), если его линейная оболочка не меняется при удалении из него любых векторов в количестве не более q (с учётом кратностей).

Теорема 2. *Если V/G — многообразие, то множество $P \subset \mathfrak{g}^*$ является 1-устойчивым.*

В § 3.7 диссертации вопрос о том, является ли фактор представления с 1-устойчивым множеством весов (гладким) многообразием, сводится к аналогичному вопросу для представления с 2-устойчивым множеством весов. В свою очередь, случай 2-устойчивого множества весов сводится к случаю неразложимого 2-устойчивого множества весов (§ 3.4).

Прежде чем сформулировать основные результаты для представления с неразложимым 2-устойчивым множеством весов, введём следующие обозначения. Пусть m — размерность группы G, а $\Omega \subset G$ — подмножество всех элементов $g \in G$, таких что $\mathrm{rk}(E - g) - \mathrm{rk}\big(E - \mathrm{Ad}(g)\big) \in \{0; 2\}$. Будем считать число m положительным, поскольку все нуждающиеся в исследовании компактные линейные группы бесконечны.

Теорема 3. *Предположим, что множество весов P неразложимо, 2-устойчиво и не содержит нулей.*

1) *Если $m > 1$, а V/G — гладкое многообразие, то выполняются четыре условия*:
   (i) *множество P содержит ровно $m + 2$ ненулевых веса*;
   (ii) *пространство V разлагается в прямую сумму двумерных G^0-инвариантных подпространств $W_1, \ldots, W_{m+2}$, переставляемых группой G, причём последняя переводит в себя подпространство $W_1 \oplus \ldots \oplus W_m$, а при $m > 2$ — все W_i, $i = 1, \ldots, m + 2$*;
   (iii) *найдётся элемент $g \in G$, переводящий в себя все W_i, для которого* $\mathrm{Ad}(g) = -E$;
   (iv) *для любого вектора $v \in V$ с конечным стабилизатором имеет место равенство $G_v = \langle G_v \cap \Omega \rangle$.*
2) *Если условия* (i)—(iv) *выполнены, то V/G — многообразие.*
3) *Если выполнены условия* (i)—(iii) *и группа G переводит в себя все подпространства $W_1, \ldots, W_{m+2}$, то V/G — многообразие.*

В **четвёртой главе** описываются все трёхмерные простые компактные линейные группы с факторпространством, гомеоморфным клетке.

Допустим, что группа G^0 изоморфна $\mathbf{SU}_2$ либо $\mathbf{SO}_3$.

Обозначим через $n_1, \ldots, n_L$ размерности неприводимых компонент представления $\mathfrak{g}\colon V$ (с учётом кратностей). Будем считать, что $n_1 \geqslant \ldots \geqslant n_l > 1 = n_{l+1} = \cdots = n_L$, $l = 1, \ldots, N$. Число $\left[\frac{n_i}{2}\right]$ является натуральным при $n_i > 1$ и равно нулю при $n_i = 1$. Положим $q(V) := \sum\limits_{i=1}^{L} \left[\frac{n_i}{2}\right] = \sum\limits_{i=1}^{l} \left[\frac{n_i}{2}\right] \in \mathbb{N}$.

Теорема 4. *Если V/G — гладкое многообразие, то $q(V) \leqslant 4$.*

Теорема 5. *Если V/G — многообразие, то $q(V) > 2$.*

Следствие 1. *Если V/G — гладкое многообразие, то $q(V) \in \{3; 4\}$.*

Теорема 6. *Если $G = G^0$, V/G — гладкое многообразие, а среди чисел $\left[\frac{n_i}{2}\right]$, $i = 1, \ldots, l$, хотя бы одно нечётно, то $q(V) = 3$.*

Согласно следствию 1 и теореме 6, если $G = G^0$, а V/G — гладкое многообразие, то (конечная) последовательность $(n_1, \ldots, n_l)$ совпадает с одной из девяти последовательностей $(4,4)$, $(4,3)$, $(3,3,3)$, $(5,4)$, (7), (8), $(5,3)$, $(5,5)$, (9). Для этих случаев получены следующие результаты.

Теорема 7. Если $G = G^0$, а последовательность $(n_1, \ldots, n_l)$ совпадает с одной из последовательностей $(4,4)$, $(4,3)$, $(3,3,3)$, (7), (8) и $(5,3)$, то фактор V/G гомеоморфен вещественному векторному пространству размерности $\dim V - 3$.

Теорема 8. Если $G = G^0$ и $(n_1, \ldots, n_l) = (5,4)$, то фактор V/G не является гладким многообразием.

Если последовательность $(n_1, \ldots, n_l)$ совпадает с одной из последовательностей $(5,5)$ и (9), то вопрос о том, является ли фактор V/G (гладким) многообразием, остаётся открытым.

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю доктору физико-математических наук профессору Эрнесту Борисовичу Винбергу за постановку задачи, постоянное внимание к научной работе и многолетнюю поддержку.

Автор также благодарит участников семинара «Группы Ли и теория инвариантов» и весь аспирантско-преподавательский состав кафедры высшей алгебры механико-математического факультета МГУ за благоприятную доброжелательную обстановку, позволяющую заниматься научной работой.

Работы автора по теме диссертации

[1] О. Г. Стырт, *О пространстве орбит компактной линейной группы Ли с коммутативной связной компонентой*, Труды ММО, т. 70, стр. 235—287 (2009).

[2] О. Г. Стырт, *О пространстве орбит трехмерной простой компактной линейной группы Ли*, Вестн. Моск. ун-та, Сер. 1, Математика. Механика, № 6, стр. 55—56 (2010).