Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова

Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 517.987.5

Салтыков Петр Сергеевич

НОВЫЕ СВОЙСТВА АТТРАКТОРОВ И ИНВАРИАНТНЫХ МНОЖЕСТВ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

01.01.02 — Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2011

Работа выполнена на кафедре дифференциальных уравнений Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук профессор Ильяшенко Юлий Сергеевич
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук профессор Гуревич Борис Маркович, кандидат физико-математических наук Тиморин Владлен Анатольевич
Ведущая организация:	Математический институт имени В. А. Стеклова РАН

Защита диссертации состоится 8 апреля 2011 г. в 16 часов 40 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.85 при Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ, Механико-математический факультет, ауд. 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 4 марта 2011 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д 501.001.85 при МГУ,
доктор физико-математических наук,
профессор В. Н. Сорокин

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

Настоящая диссертация посвящена исследованию некоторых свойств аттракторов и инвариантных множеств вещественных динамических систем.

В теории динамических систем одним из важных направлений является качественное описание динамики системы. Начало этой деятельности положил А. Пуанкаре, классифицировавший возможные варианты динамического поведения гомеоморфизмов окружности и (совместно с И. Бендиксоном) векторных полей на плоскости и на сфере. Данная область затем интенсивно развивалась, упомянем выдающиеся работы А. А. Андронова по теории бифуркаций, С. Смейла и Д. В. Аносова, которым мы обязаны теорией гиперболических систем, А. Н. Колмогорова по турбулентности.

В дальнейшем, качественной теорией динамических систем занимались ведущие отечественные и зарубежные математики, такие, как А. А. Андронов, С. Х. Арансон, Д. В. Аносов, В. И. Арнольд, К. Бонатти, Р. Боуэн, В. З. Гринес, Э. Жис, Ю. С. Ильяшенко, А. Каток, А. Н. Колмогоров, Р. Мане, Дж. Милнор, Ш. Ньюхаус, В. И. Оселедец, Д. Палис, Я. Песин, Д. Рюэлль, Я. Г. Синай, С. Смейл, А. М. Степин, Д. Сулливан,Ф. Такенс, У. Тёрстон, Дж. Франкс, А. Н. Шарковский, Л. П. Шильников, М. Шуб и многие другие.

Особую роль играют вопросы, связанные с «типичными» свойствами системы, в любом из определений понятия *типичности.* История динамических систем полна открытий, коренным образом менявших взгляд на свойства систем. Например, долгое время считалось, что в типичной гладкой динамической системе существует лишь конечное количество притягивающих неподвижных точек или периодических орбит. Тем самым орбиты точек с близкими начальными условиями предположительно должны не слишком удаляться друг от друга. В 40-х годах, исследуя уравнение Ван дер Поля М. Л. Картрайт и Дж. Е. Литтлвуд[1] привели пример дифференциального уравнения, для которого зависимость поведения от начальных условий была существенно нелинейна. Их пример был существенно упрощен Н. Ливингсоном[2], а затем в 60-х годах Смейл [3] привел простейший

[1] M. L. Cartwright, J. E. Littlewood. *On nonlinear differential equations of the second order. I: The equation* $y'' - k(1-y^2)y' + y = b\lambda k\cos(\lambda t + a)$, *k large.* J. London Math. Soc, **20** (1945), p. 180–189.

[2] N. Levinson. *A second order differential equation with singular solutions.* Ann. Math. **50** (1949): p. 127–153.

[3] St. Smaile. *Diffeomorphisms with many periodic points.* Differential and Combinatorial Topology, Princeton, NJ: Princeton University Press, 1965, p. 63—80.

пример структурно-устойчивого отображения, обладающего счетным количеством гиперболических периодических точек— *подкову Смейла.* Инвариантное множество для отображения подковы имеет структуру канторовского множества. В дальнейшем активно стали изучаться аттракторы динамических систем — инвариантные притягивающие множества. Существует много различных определений аттракторов. Упомянем следующие из них: максимальный аттрактор A_{max}, предельное множество L, центр Биркгофа, аттрактор Милнора A_M, статистический аттрактор A_{stat} и минимальный аттрактор A_{min}. Эти аттракторы изучались в работах А. С. Городецкого[4], Д. Рюэля[5], Дж. Палиса[6] и др. Среди совсем новых работ стоит отметить обнаружение так называемых *ε-невидимых аттракторов*, появившихся в работе Ю. С. Ильяшенко и А. Негута[7].

Несмотря на различия в определениях аттракторов, все имеющиеся на данный момент примеры несовпадения притягивающих множеств, задающихся разными определениями, являются нетипичными. Одна из существующих точек зрения, гипотеза Палиса[6], предполагает, что в типичном случае все определения аттракторов задают одно и то же множество, распадающееся на конечное число компонент. Каждая из этих компонент является максимальным аттрактором некоторой своей окрестности, и для каждой из них имеется SRB-мера (в каждом из существующих определений этого понятия). Гипотеза Рюэля[5] утверждает обратное, а именно, что существуют типичные примеры «хаотического» с точки зрения аттракторов, поведения. Тем не менее из-за того, что в каждой из гипотез используется свое определение типичности (метрическая типичность для гипотезы Палиса и топологическая для гипотезы Рюэля), эти гипотезы не являются взаимоисключающими.

Если перейти от рассмотрения аттракторов динамических систем к изучению притягивающих бассейнов этих аттракторов — то есть множеству точек, стремящихся к аттрактору, то можно отметить, что в «обычной» системе бассейны притяжения являются областями (зачастую даже с кусочно гладкой границей). В общем случае это неверно, что и продемонстри-

[4]А. С. Городецкий. *Минимальные аттракторы и частично гиперболические инвариантные множества динамических систем.* Текст кандидатской диссертации, Московский Государственный Университет, 2001.

[5]D. Ruelle. *Historical behaviour in smooth dynamical systems.* Global analysis of dynamical systems, Inst. Phys., Bristol, 2001 p. 63—66.

[6]J. Palis.*A global view of dynamics and a conjecture on the dynamics of finitude of attractors*, Géometrié complexe et systèmes dynamiques, Orsay 1995, Astérisque **261** (2000), xiii–xiv, pp. 335—347.

[7]Yu. Ilyashenko, A. Negut. *Invisible Parts of Attractors.* Nonlinearity, **23** (2010), p. 1199—1219

ровал в 1994 году И. Кан[8] в своей работе. Он привел пример отображения кольца в себя, где бассейны притяжения двух компонент аттрактора всюду плотны, то есть имеет место *перемежаемость бассейнов притяжения* аттракторов. Там же Кан анонсировал сохранение этого свойства для малых возмущений построенного отображения в классе гладких отображений кольца в себя, сохраняющих край, но доказательства не опубликовал:

Гипотеза 1 (Иттаи Кан, 1994)**.** Существует открытое множество отображений в пространстве гладких отображений кольца в себя, сохраняющих границу, для которых выполняется свойство перемежаемости аттракторов.

В дальнейшем системы со свойствами перемежаемости бассейнов притяжения аттракторов исследовались Милнором и Бонифант[9], а также Ю. С. Ильяшенко[10].

Еще одним важным направлением исследований динамических систем является изучение символических систем. Адлер и Вайс[11] в своей работе предложили конструкцию марковских разбиений для автоморфизмов двумерных торов. Тем самым была продемонстрирована связь между символической динамикой и теорией гладких динамических систем. Чуть позже появились работы Синая[12] и Боуэна[13], в которых строились более сложные марковские разбиения для широкого класса систем с гиперболическим поведением. В результате оказалось возможным, используя кодирование, сначала получать результаты для символических систем, а затем переносить их на гладкие динамические системы.

Классическая эргодическая теорема Биркгофа была доказана в 1931 году. В прошедшем десятилетии, изучая так называемые «невидимые» аттракторы, Ю. С. Ильяшенко и А. Негут[14] доказали усиление классической эргодической теоремы для случая удвоения окружности. Открытая ими *специальная эргодическая теорема* утверждает, что для любой непрерывной функции на окружности хаусдорфова размерность множества точек, чьи временные средние вдоль орбит отличаются от пространственного

[8] I. Kan. *Open sets of diffeomorphisms having two attractors, each with everywhere dense basin.* Bull. Amer. Math. Soc., **31** (1994), p. 68—74.

[9] A. Bonifant, J. Milnor. *Schwarzian derivatives and cylinder maps.* Holomorphic dynamics and renormalization, Fields Inst. Commun., 53, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008, p. 1—21.

[10] Ю. С. Ильяшенко. *Диффеоморфизмы с перемежающимися бассейнами притяжения.* Функц. анализ и его прил., **42**:4 (2008), с. 60—71.

[11] R. L. Adler, B. Weiss. *Entropy, a complete metric invariant for automorphisms of the torus.* Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 57(1967), p. 1573—1576.

[12] Я. Г. Синай. *Построение марковских разбиений.* Функц. анализ и его прил. **2**:3 (1968), с. 70—80.

[13] R. Bowen. *Markov partitions for Axiom A diffeomorphisms.* Amer. J. Math., **92**(1970), p. 725—747.

[14] Yu. Ilyashenko, A. Negut. *Invisible Parts of Attractors*, Nonlinearity **23** (2010), p. 1199—1219.

среднего функции на произвольную константу, имеют хаусдорфову размерность, меньшую размерности пространства, то есть 1 (также, в схожей ситуации хаусдорфову размерность размерность множества точек с сильным уклонением временны́х средних исследовали Б. М. Гуревич и А. А. Темпельман [15]). Для доказательства этой теоремы существенным образом использовалось кодирование окружности бесконечными последовательностями, а также методы теории вероятностей (*теорема о больших уклонениях*). Отметим исследования Л. С. Янг[16] в области свойств динамических систем, аналогичных теоремам большим уклонения в теории вероятностей. С этой точки зрения специальная эргодическая теорема представляет собой «предельный» вариант результатов Л. С. Янг.

Настоящая диссертация посвящена развитию результата Ю. С. Ильяшенко и А. Негута и его применению для получения нового доказательства гипотезы И. Кана, а также оценок доли точек, не стремящихся к компонентам аттрактора в малой окрестности этих компонент. В диссертации доказана специальная эргодическая теорема для линейных диффеоморфизмов Аносова на двумерном торе, оценена хаусдорфова размерность множества точек, не стремящихся к компонентам аттрактора Милнора для открытого множества отображений в пространстве косых произведений и приведено доказательство гипотезы Иттаи Кана. Отметим, что последнее утверждение о существовании открытого множества отображений кольца в себя, сохраняющих край и обладающих свойством перемежаемости бассейнов притяжения аттракторов, не противоречит гипотезе Палиса: рассматриваемые отображения должны удовлетворять условию сохранения границы, что в классе всех отображений кольца в себя является вырождением коразмерности бесконечность. При этом, в случае отказа от условия сохрания границы, эффект перемежаемости аттракторов в общем случае исчезает.

Следует сказать, что гипотеза И. Кана уже была доказана Бонатти, Диасом и Виана[17], однако предлагаемый метод позволяет получить более сильные результаты, а также явные оценки меры точек, покидающих малую окрестность компоненты аттрактора.

Еще одним вопросом динамических систем является изучение сложности отображения, одной из мер которой является топологическая энтропия, впервые введенная в работе Адлера, Котхайма и МакЭндрю[18]. В дальней-

[15] Б. М. Гуревич, А. А. Темпельман, *Хаусдорфова размерность множества типичных точек для гиббсовских мер*, Функц. анализ и его прил., **36**:3 (2002), с. 68–71

[16] L.-S. Young. *Some large deviation results for dynamical systems*, Trans. AMS, 1990

[17] C. Bonatti, L. J. Diaz, M. Viana. *Dynamics Beyond Uniform Hyperbolicity.* Springer, 2005.

[18] R. L. Adler, A. G. Konheim, M. H. McAndrew. *Topological entropy.* Transactions of the AMS. **114**

шем А. Кушниренко[19] показал ее конечность для гладких динамических систем на компактных многообразиях. В настоящей диссертации доказано усиление теоремы Кушниренко для гиперболических систем. Доказательство использует энтропийную размерность пространства. А именно, показано, что для гиперболических отображений специальным выбором метрики на пространстве топологическая энтропия может быть сколь угодно точно приближена сверху произведением энтропийной размерности пространства и логарифма константы Липшица отображения.

Цель работы.

Целью настоящей диссертации является исследование аттракторов и инвариантных множеств динамических систем, получение оценок хаусдорфовых размерностей таких множеств, а также исследование связи между топологической энтропией и энтропийной размерностью.

Методы исследования.

В работе применяются методы качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений, теории динамических систем, теории вероятности и математической статистики, алгебры, а также разработанная автором техника работы с гёльдеровыми отображениями.

Научная новизна работы.

В диссертации получены следующие новые результаты:

— Доказана теорема об оценке хаусдорфовой размерности множества точек, чьи временные средние на константу отличаются от пространственного среднего, для линейных гиперболических диффеоморфизмов двумерного тора.

— Приведено новое доказательство гипотезы И. Кана о существовании открытого множества в пространствах отображений кольца в себя, сохраняющих границу, обладающих свойством перемежаемости бассейнов притяжения компонент аттрактора. Имевшийся результат усилен оценкой хаусдорфовой размерности множества точек, не стремящихся к аттрактору Милнора. Полученная оценка строго меньше размерности пространства и является равномерной в построенной области.

(1965), p.309—319.

[19] А.Г. Кушниренко. *Оценка сверху энтропии классической динамической системы.* Доклады Академии Наук СССР, **161**:3 (1965), с. 37—38

— Доказана теорема о необходимых и достаточных условиях достижения топологической энтропии оценкой, использующей энтропийную размерность пространства и показатель Липшица, для непрерывных отображений метрического компакта в себя. Доказано, что гиперболические отображения удовлетворяют критерию достаточности.

Теоретическая и практическая ценность.

Диссертация носит теоретический характер. Техника, разработанная в диссертации, может быть полезна специалистам по теории динамических систем, дифференциальных уравнений и эргодической теории. Полученные в диссертации результаты дают оценку размерности исключительных множеств, развитые методы открывают новые возможности для изучения аттракторов динамических систем и могут быть использованы в дальнейших исследованиях специалистами в этой области.

Апробация работы.

Основные результаты диссертации докладывались автором на следующих семинарах и конференциях:

1. семинар механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова «Динамические системы» под руководством профессора Ю. С. Ильяшенко (неоднократно, 2007—2009 гг.);

2. семинар механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова «Теория вероятностей и статистическая физика» под руководством профессора В. И. Оселедца, профессора Б. М. Гуревича и доцента С. А. Пирогова (2010 г.);

3. семинар отдела дифференциальных уравнений МИАН им. Стеклова под руководством академика Д. В. Аносова (2011 г.);

4. летняя школа-конференция «Динамические системы» (Словакия, 25 июня — 7 июля 2009 г.),

5. международная конференция «Топология, геометрия и динамика», посвященная памяти В. А. Рохлина (Санкт-Петербург, Россия, 11—16 января 2010).

Публикации.

Основные результаты диссертации опубликованы в трех работах, список которых приведён в конце автореферата [1–3].

Структура и объем работы.

Диссертация содержит введение, четыре главы и список литературы. Все главы разделены на параграфы; первая глава состоит из 5 параграфов, вторая — из 5 параграфов, третья — из 6 параграфов, четвертая — из 5 параграфов. Список литературы содержит 36 наименований. Объем диссертации — 99 страниц.

Краткое содержание диссертации.

Настоящая диссертация посвящена исследованию свойств аттракторов и инвариантных множеств динамических систем, получению оценок хаусдорфовой размерности исключительных множеств и применению полученных оценок для доказательства гипотезы И. Кана, а также к исследованию связи топологической энтропии и энтропийной размерности.

Во **введении** освещается история решаемых задач. Там же даются основные определения и формулируются теоремы, полученные в диссертации, описывается ее структура.

В **главе 1** доказывается оценка хаусдорфовой размерности множества точек, чьи временные средние существенно отклоняются от пространственных средних для линейных гиперболических диффеоморфизмов Аносова на двумерном торе. Рассмотрим линейный автоморфизм тора

$$F_L(x,y) = (ax+by, cx+dy), \mathcal{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{SL_2}. \tag{1}$$

Рассмотрим произвольную непрерывную функцию g и временные средние произвольной точки p под действием диффеоморфизма F_L. Классическая эргодическая теорема Бирхгофа в этом случае утверждает, что для почти всех точек p по мере Лебега существует предел частичных временных средних, равный пространственному среднему функции g.

Основной результат главы 1 состоит в оценке хаусдорфовой размерности тех точек тора, для которых частичные временные средние «сильно» отличаются от пространственного.

Определение 1. *Временным средним* функции g вдоль орбит отображения $F\colon X \to X$ метрического пространства X в себя называется предел

$$\tilde{g}(p) = \lim_{n\to\infty} g_n(p), \text{где } g_n(p) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} g\circ F^k(p), \tag{2}$$

если он существует.

Определение 2. *Пространственным средним* функции g по мере μ называется число, равное

$$\bar{g}(p) = \int_X g d\mu. \tag{3}$$

В данной главе под мерой подразумевается мера Лебега. Рассмотрим множество точек, для которых эргодическая теорема «сильно нарушается». А именно, для каждого $\alpha > 0$ рассмотрим множество

$$X_\alpha = X_{g,\alpha} := \{p \mid \overline{\lim_{n\to\infty}} |g_n(p) - \bar{g}| \geq \alpha\}. \tag{4}$$

Рассмотрим произвольное покрытие $\mathcal{L}$ метрического пространства X конечным или счетным числом шаров радиуса r_i и определим d-мерный объем этого покрытия по формуле:

$$V_d(\mathcal{L}) = \Sigma_i r_i^d. \tag{5}$$

Определение 3. *Хаусдорфовой размерностью множества* X называется точная нижняя грань значений d, для которых существует покрытие множества X шарами со сколь угодно малым d-мерным объемом.

Для случая, когда F — отображение удвоения окружности, Ю. С. Ильяшенко была доказана *специальная эргодическая теорема.* Эта теорема утверждает, что хаусдорфова размерность множества X_α меньше размерности окружности.

Теорема 1. (Специальная эргодическая теорема для удвоения окружности[20]) Рассмотрим отображение удвоения окружности. Тогда для любой непрерывной функции $g \in C(\mathcal{S}^1)$ и любого $\alpha > 0$ выполнено следующее неравенство:

$$\dim_H X_{g,\alpha} < 1.$$

В диссертации данный результат распространяется на случай линейных диффеоморфизмов Аносова на двумерном торе.

Теорема 2. (Специальная эргодическая теорема для линейных автоморфизмов Аносова.) Рассмотрим линейный диффеоморфизм Аносова $F_L(x, y) = (ax + by, cx + dy)$ на двумерном торе. Пусть g — произвольная непрерывная функция на $\mathbb{T}^2$. Тогда для любого $\alpha > 0$ выполнено следующее неравенство:

$$dim_H X_{g,\alpha} < 2.$$

[20] Yu. Ilyashenko, V. Kleptsyn, P. Saltykov. *Openness of the set of boundary preserving maps of an annulus with intermingled attracting basins.* Journal of Fixed Point Theory and Applications. **3**:2 (2008), p. 449–463.

В **главе 2** исследуется множество точек, не притягивающихся к аттрактору Милнора, для гёльдеровых косых произведений. А именно, показано, что существует открытая область в пространстве гёльдеровых косых произведений с базой окружность и слоем отрезок, для которых хаусдорфова размерность множества точек, не стремящихся к аттрактору Милнора, строго меньше размерности пространства (то есть двух), причем оценка равномерна по полученной окрестности.

Определение 4. *Аттрактором Милнора* A_M называется минимальное замкнутое множество, содержащее ω-предельные точки для почти всех орбит.

В простейшем случае аттрактором динамической системы являются асимптотически устойчивые неподвижные точки и периодические орбиты. В этом случае бассейны притяжения компонент аттрактора, то есть точки, стремящиеся к компоненте аттрактора, образуют открытую область. Естественно предположить, что это свойство выполнено и в общем случае. Однако в 1994 году И. Кан привел пример, когда это свойство не выполняется.

Пример 1 (И. Кан, 1994). Пусть $X = \mathcal{S}^1 \times I$, где $\mathcal{S}^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, \quad I = [0, 1]$. Тогда отображение

$$F\colon (y, x) \mapsto (3y, x + \cos(2\pi x)\frac{x}{32}(1 - x)) \tag{6}$$

обладает следующими свойствами:

1. Для почти любой (по мере Лебега) начальной точки $p \in X$ ее орбита стремится к одной из двух компонент границы:
$$f^n(p) \xrightarrow[n\to\infty]{} A_0 := \mathcal{S}^1 \times \{0\} \tag{7}$$
или
$$f^n(p) \xrightarrow[n\to\infty]{} A_1 := \mathcal{S}^1 \times \{1\}. \tag{8}$$
2. Бассейны притяжения $\mathcal{B}_j := \{p \in X \mid f^n(p) \xrightarrow[n\to\infty]{} A_j\}, j = 0, 1$, являются метрически всюду плотными, т.е. для любого открытого множества $U \subset X$ имеем: $\mu_{Leb}(\mathcal{B}_0 \cap U) > 0, \mu_{Leb}(\mathcal{B}_1 \cap U) > 0$.

Рассмотрим косые произведения над окружностью $B = \mathcal{S}^1$; обозначим через μ меру Лебега на B, и пусть $T : B \to B$ — отображение удвоения окружности $T(y) = 2y \mod 1$. Определим косое произведение G на множестве $X = B \times [0,1]$ следующим образом:

$$G(y,x) = (T(y), \tilde{f}_y(x)), (y,x) \in X. \tag{9}$$

Снабдим пространство диффеоморфизмов $\mathrm{Diff}^2([0,1])$ метрикой

$$d(f,g) = \max(\mathrm{dist}_{C^2}(f,g), \mathrm{dist}_{C^2}(f^{-1},g^{-1})),$$

и будем рассматривать косые произведения как непрерывные отображения из $\mathcal{S}^1$ в $\mathrm{Diff}^2([0,1])$, с соответствующей метрикой пространства непрерывных отображений. Для любых положительных C и α скажем, что гёльдерово косое произведение — класса (C,α), если как отображение из $\mathcal{S}^1$ в $\mathrm{Diff}^2([0,1])$ оно гёльдерово с показателем α и константой C. Обозначим множество таких произведений через $\mathcal{H}^2_{(C,\alpha)}$. Пространство $\mathcal{H}^2_{(C,\alpha)}$ является замкнутым подмножеством множества всех косых произведений. Для каждого косого произведения вида (9) обозначим через L максимальный показатель Липшица для послойных отображений $\tilde{f}_y(x)$.

Основной теоремой 2-ой главы является следующая

Теорема 3 (Хаусдорфова размерность исключительного множества для косых произведений)**.** Рассмотрим на множестве $X = B \times [0,1]$ гёльдерово косое произведение класса (C,α):

$$G(y,x) = (T(y), \tilde{f}_y(x)), \tag{10}$$

для которого также выполняется дополнительное условие $2^\alpha > L$. Предположим, что:

1. Показатели Ляпунова вдоль слоя

$$\lambda_0 = \int_B \log(\tilde{f}_y)'(0)\, dy \quad \text{и} \quad \lambda_1 = \int_B \log(\tilde{f}_y)'(1)\, dy$$

   отрицательны;

2. После замены координат

$$\Phi : (0,1) \to \mathbb{R}, \quad z = \Phi(x) = \ln(x/(1-x)),$$

   производные отображений $\tilde{f}_y$ оказываются строго больше единицы (но, вообще говоря, не отделены от неё):

$$\forall y \in B, \forall z \in \mathbb{R} \quad (\Phi \circ \tilde{f}_y \circ \Phi^{-1})'(z) > 1. \tag{11}$$

Тогда
a) хаусдорфова размерность множества точек (x, y), не стремящихся ни к $A_0 = B \times \{0\}$, ни к $A_1 = B \times \{1\}$, далее *исключительное множество*, строго меньше размерности пространства X.
b) При выполнении дополнительного условия

$$\forall y \in B \quad \frac{(\tilde{f}_y)''(0)}{2(\tilde{f}_y)'(0)} - 1 + (\tilde{f}_y)'(0) > 0,$$

$$-\frac{(\tilde{f}_y)''(1)}{2(\tilde{f}_y)'(1)} - 1 + (\tilde{f}_y)'(1) > 0, \tag{12}$$

хаусдорфова размерность отделена от размерности пространства равномерно по достаточно малой окрестности исходного косого произведения в пространстве $\mathcal{H}^2_{(C,\alpha)}$ гёльдеровых косых произведений.

В **главе 3** исследуются гладкие возмущения примера И. Кана с использованием полученных в главе 2 результатов. Доказано, что при введении дополнительного условия (условие монотонности, см. ниже), выполняется гипотеза И. Кана, а именно что существует открытое множество гладких отображений кольца в себя, сохраняющих границу, для которых бассейны притяжения компонент аттрактора оказываются метрически всюду плотными. Отметим, что сам по себе этот результат не является новым, однако развитыми в диссертации методами доказывается более сильное утверждение — что множество точек, не притягивающихся к аттрактору Милнора, не только имеет нулевую меру, но даже имеет хаусдорфову размерность, меньшую размерности пространства. В процессе доказательства выводится степенная зависимость доля точек, не притягивающихся к компоненте аттрактора в малой ее окрестности.

Предположим, что гладкое косое произведение из теоремы 3 также удовлетворяет следующему условию:

Условие 1 (монотонности)**.** Отображение T в базе косого произведения (9) имеет две периодические орбиты $y_{(0)} = T^{k_0}(y_{(0)}),\quad y_{(1)} = T^{k_1}(y_{(1)})$ такие, что соответствующие *послойные отображения Пуанкаре*

$$\tilde{f}_{T^{k_0-1}(y_{(0)})} \circ \tilde{f}_{T^{k_0-2}(y_{(0)})} \circ \ldots \circ \tilde{f}_{y_{(0)}} \text{ и } \tilde{f}_{T^{k_1-1}(y_{(1)})} \circ \tilde{f}_{T^{k_1-2}(y_{(1)})} \circ \ldots \circ \tilde{f}_{y_{(1)}}$$

обладают следующим свойством: за соответствующие периоды каждая из композиций имеет ровно 2 неподвижных точки, $x = 0$ и $x = 1$, причем все эти точки гиперболические, и для первой композиции $x = 0$ притягивает, а $x = 1$ отталкивает, а для второй наоборот.

В этом случае выполняется следующее утверждение для косых произведений:

Теорема 4 (Усиленная метрическая плотность)**.** Пусть $G(y,x) = (T(y), \tilde{f}_y(x))$ — гёльдерово косое произведение класса (C,α), удовлетворяющее условиям теоремы 3 и гипотезе монотонности. Тогда найдутся константы $c_1 > 0$, $c_2 < \dim B$, такие, что для любой точки $P = (p,x)$ из устойчивого многообразия точки $(y_{(0)}, 0)$ выполнено следующее:

Рассмотрим "горизонтальную" окрестность

$$U_n := U_{2^{-n}}(p) \times \{x\}$$

точки P. Для всех достаточно больших n множество тех точек $(q,x) \in U_n$, образы которых не стремятся к A_0, может быть покрыто объединением по $m \geq (1+c_1)n$ объединений $2^{c_2(m-n)}$ шаров радиуса 2^{-m}.

Более того, константы c_1 и c_2 могут быть выбраны равномерно по малой окрестности исходной системы в пространстве $\mathcal{H}^2_{(C,\alpha)}$.

Тогда для возмущенного косого произведения из данной теоремы(в классе C^2 -гладких отображений, сохраняющих край) аттрактор Милнора также будет состоять из краёв многообразия $A_0 = B \times \{0\}$ и $A_1 = B \times \{1\}$, а бассейны притяжения компонент A_0 и A_1 будут метрически плотны:

Теорема 5. Пусть F — произвольное гладкое косое произведение, удовлетворяющее условиям теоремы 3, а также гипотезе монотонности, причем послойные отображения F достаточно близки к тождественным. Рассмотрим C^2-малое возмущение $\mathcal{G}$ отображения $F : X \to X$, сохраняющее границу: $\mathcal{G}(\partial X) = \partial X$. Тогда аттрактор Милнора отображения $\mathcal{G}$ состоит из двух компонент $A_0 = B \times \{0\}$ и $A_1 = B \times \{1\}$, чьи бассейны притяжения метрически плотны.

Из оценок, полученных в процессе доказательства, следует оценка меры точек, не притягивающихся к компоненте аттрактора в малой ее окрестности:

Предложение. Обозначим через X_d множество $B \times [0,d]$. Тогда для любого достаточно малого d существуют такие константы C, γ, что доля точек из $X_h, h \in (0,d)$, стремящихся к компоненте аттрактора $B \times \{0\}$ и не покидающих X_d, не меньше, чем $1 - Ch^\gamma$ для каждого из отображений в окрестности, полученной в теореме 5.

В **главе 4** исследуется связь между топологической энтропией и энтропийной размерностью динамической системы.

Пусть $f : X \to X$ — липшицево отображение метрического компакта X в себя, d — метрика на компакте X, L_d — константа Липшица для отображения f в метрике d.

Определение 5. Рассмотрим метрику

$$d_N(x,y) = \max_{0 \le k < N-1} d(f^k(x), f^k(y))$$

на X. Тогда ε-сеть для метрики d_N назвается (N,ε)-*сетью* для метрики d.

Обозначим через $\Sigma(N,\varepsilon)$ мощность минимальной (N,ε)-сети.
Введем функцию $h(\varepsilon) = \overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{\ln \Sigma(n,\varepsilon)}{n}$.

Определение 6. *Топологической энтропией* называется число

$$h_{top}(f) = \lim_{\varepsilon \to +0} h(\varepsilon).$$

Пусть $S(r)$ —мощность минимальной r-сети в метрике d.

Определение 7. *Энтропийная размерность* метрического пространства X определяется как

$$\dim_E X = \lim_{r\to+0} \frac{\ln S(r)}{|\ln r|}.$$

Для гладких отображений компактных многообразий конечность топологической энтропии была установлена *теоремой Кушниренко*, дающей эффективную оценку для $f\colon M \to M$ как

$$h_{top}(f) \le \dim M \cdot \ln \|f'\|.$$

Эта оценка обобщается до следующей:

$$h_{top} \le \inf_{d \in \mathbf{D}} \dim_E(X,d) \cdot \ln L_d(f), \tag{13}$$

где $f\colon X \to X$ — липшицево отображение метрического компакта в себя, $\dim_E X$ — энтропийная размерность, а через $L(f)$ обозначена константа Липшица отображения f, нижний предел берется по классу метрик, порождающих одну и ту же топологию.

Жис предположил, что неравенство (13) может быть заменено на равенство. Введем следующее определение:

Определение 8. Сходимость в определении $h_{top}(f)$ *экспоненциальная*, если для любого $\delta > 0$ существуют метрика d_δ, топологически эквивалентная исходной метрике d, и константы C и $\varepsilon_\delta > 0$ такие, что для любого $0 < \varepsilon < \varepsilon_\delta$ для $N > C \cdot |\ln \varepsilon|$ верно неравенство

$$\frac{\ln(\Sigma_{d_\delta}(N, \varepsilon))}{N} \leq h_{top} + \delta. \tag{14}$$

Основными результатами этой главы являются следующие теоремы:

Теорема 6 (Критерий сходимости для гипотезы Жиса)**.** Для выполнения равенства

$$h_{top} = \inf_{d \in \mathbf{D}} \dim_E(X, d) \cdot \ln L_d(f).$$

необходимо и достаточно, чтобы сходимость в определении h_{top} была экспоненциальной.

Теорема 7. Для гиперболических отображений гипотеза Жиса верна.

Доказательство теоремы 7 основано на проверке выполнения критерия сходимости (теоремы 6).

Я искренне хочу поблагодарить профессора доктора физико-математических наук Юлия Сергеевича Ильяшенко за его поддержку все годы обучения и в процессе подготовки диссертации, за созданную им прекрасную творческую обстановку и за бесконечную веру в познание, которая передалась и мне; также выражаю огромную благодарность кандидату физико-математических наук Виктору Алексеевичу Клепцыну за плодотворные дисскуссии и готовность обсуждать новые идеи в любое время суток.

Работы автора по теме диссертации.

1. *П. С. Салтыков.* Специальная эргодическая теорема для диффеоморфизмов Аносова на двумерном торе. Функциональный анализ и приложения, **45**:1 (2011), с. 69-78.

2. *П. С. Салтыков.* О связи топологической энтропии и энтропийной размерности. Математические заметки, **86**:2 (2009), с. 280—289.

3. *Y. S. Ilyashenko, V. Kleptsyn, P. Saltykov.* Openness of the set of boundary preserving maps of an annulus with intermingled attracting basins. Journal of Fixed Point Theory and Applications, **3**:2 (2008), p. 449—463.

В работе [3] Ю. С. Ильяшенко принадлежит постановка задачи и доказательство специальной эргодической теоремы, В. А. Клепцыну — идея основной конструкции, а П. С. Салтыкову — доказательство основного результата.