Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова

Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 512.938.5+514.762

Коняев Андрей Юрьевич

Алгебраические и геометрические свойства систем, получаемых методом сдвига аргумента

Специальность 01.01.04 — геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2010

Работа выполнена на кафедре дифференциальной геометрии и приложений Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научные руководители:	академик РАН Фоменко Анатолий Тимофеевич, доктор физико-математических наук, профессор Болсинов Алексей Викторович
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Винберг Эрнест Борисович
	кандидат физико-математических наук, доцент Браилов Юрий Андреевич
Ведущая организация:	Математический институт имени В.А.Стеклова РАН

Защита диссертации состоится 8 апреля 2011 г. в 16 ч. 45 м. на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д.1, МГУ, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж)

Автореферат разослан 11 марта 2011 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д.501.001.84 при МГУ
доктор физико-математических наук,
профессор

А.О. Иванов

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Диссертация посвящена одному из разделов дифференциальной геометрии — бигамильтоновым структурам, то есть многообразиям, оснащенным парой согласованных скобок Пуассона. В работе проводится исследование геометрических и алгебраических свойств бигамильтоновых интегрируемых систем (то есть систем, гамильтоновых относительно), называемыми системами, полученными методом сдвига аргумента, разработанным А.Т.Фоменко и А.С.Мищенко [1].

Интегрируемые системы на пространствах, двойственных к алгебрам Ли, являются областью, где интенсивные исследования ведутся математиками самых разных специальностей - алгебраистами, геометрами, специалистами по дифференциальным уравнением. Главной причиной столь пристального внимания к подобным системам, является тот факт, что сложнейшие динамические эффекты в них оказываются тесно взаимосвязаны как с геометрией потоков, так и с их алгебраическими свойствами.

В работе проводится исследование нескольких вопросов, касающихся интегрируемых систем, полученных методом сдвига аргумента. Так, доказано существование интегралов подобных систем в виде так называемых бесконечных бигамильтоновых цепочек, известных также как цепочки Магри или схема Ленарда-Магри [2]. Кроме этого описан класс функций составляющий такие цепочки в случае, когда одна из скобок Пуассона линейна, а другая - постоянна, исследуются некоторые свойства квадратичных функций такого рода и их связь с так называемыми секционными операторами [3]. Наконец отдельно изучен вопрос совпадения бифуркационной диаграммы отображения момента и дискриминанта спектральной кривой в случае, когда у системы имеется лаксово представление со спектральным параметром.

Цель работы

1. Изучить вопрос однозначности определения так называемых секционных операторов, а также обобщить это понятие на общий случай (частичное

[1] Мищенко А.С., Фоменко А.Т. *Уравнения Эйлера на конечномерных группах Ли* Известия АН СССР, 42(1978), вып. 2, 396-415.

[2] Gelfand I.M., Zakharevich I., *Webs, Lenard schemes, and the local geometry of bi-Hamiltonian Toda and Lax structures* Selecta Mathematica, New Series, Vol. 6, №2, 2000.

[3] Трофимов В.В., Фоменко А.Т. *Групповые неинвариантные симплектические структуры и гамильтоновы потоки на симметрических пространствах* Труды семинара по векторному и тензорному анализу. М.; изд-во МГУ, 1983, вып. 21, 23–83.

обобщение было проведено в работах А.Т.Фоменко [4]).

2. Изучить вопрос о приведении пары скобок (линейная и постоянная) к постоянному виду в некоторой локальной системе координат в окрестности точки общего положения. В частности, исследовать справедливость гипотезы Захаревича: пучок согласованных скобок Пуассона, связанный с методом сдвига аргумента, всегда является плоский.

3. Известно, что, если обе согласованные скобки являются в задаваемом ими пучке регулярными, то так называемая схема Ленарда-Магри работает и бигамильтоновы цепочки существуют. Необходимо выяснить вопрос, касающийся скобок в случае, когда скобки регулярными не являются. Обобщить подобным образом классический метод сдвига аргумента.

4. Ю.А.Браиловым [5] было доказано, что в случае алгебры Ли $sl(n)$ метод сдвига аргумента на регулярный полупростой элемент дает систему, бифуркационная диаграмма которой совпадает с дискриминантом спектральной кривой лаксова представления. Изучить вопрос соотношения бифуркационной диаграммы и отображения момента для других классических комплексных алгебр Ли. В частности, исследовать гипотезу Фоменко и Браилова: для всех комплексных алгебр Ли бифуркационная диаграмма совпадает с дискриминантом спектральной кривой [6].

Научная новизна

1. Решена задача однозначного восстановления параметров по заданному секционному оператору в случае простой алгебры Ли. Как оказалось, в случае оператора общего положения параметры восстанавливаются однозначно с точностью до пропорциональности. Доказательство выполнено в терминах систем корней простых алгебр Ли.

2. Приведен контрпример к гипотезе И.Захаревича, утверждающей, что пучок согласованных скобок Пуассона, связанный с методом сдвига

[4] Фоменко А. Т. *Симплектическая геометрия. Методы и приложения.* .: Издательство МГУ, 1988, 414 с.

[5] *Браилов Ю. А. Геометрия сдвигов инвариантов на полупростых алгебрах Ли.* Математический сборник РАН, т 194, №11, стр. 2-16 (2003)

[6] Yu. A. Brailov, A. T. Fomenko. *Lie groups and integrable Hamiltonian systems.* Recent Advances in Lie Theory, pp.45-76. Edited by Ignacio Bajo and Esperanza Sanmartin. Series: Research and Exposition in Mathematics. №25. Edited by Karl H.Hofmann and Rudolf Wille (2002)

аргумента, всегда является плоским. Доказательство основано на свойстве естественного объекта — псевдомногочленов.

3. Решена задача обобщения метода сдвига аргумента для случаев сдвига на сингулярный элемент, которая позволяет естественным образом расширять алгебру сдвигов инвариантов в том случае, когда она не является полной. Этот метод может быть, в частности, применен в случае фробениусовых алгебр Ли, когда никаких инвариантов вообще не существует.

4. Решен вопрос о совпадении замыканий бифуркационной диаграммы и дискриминанта спектральной кривой в случае классических простых комплексных алгебр Ли и исключительной алгебры Ли g_2. Оказалось, что в зависимости от алгебры и выбора элемента сдвига возможно как совпадение, так и строгое включение бифуркационной диаграммы в дискриминант. Для систем малой размерности этот вопрос исследовался, например, M. Audin [7].

Основные методы исследования

В работе используются методы многомерного анализа, теории интегрируемых распределений, теории согласованных скобок Пуассона, теории комплексных алгебр Ли. В частности применяется теория корней и теория инвариантов простых комплексных алгебр Ли. Кроме этого применяется теория представлений алгебр Ли.

Теоретическая и практическая ценность работы

Полученные в работе результаты имеют теоретическое значение. Они могут быть полезны для интегрирования бигамильтоновых систем в общем случае, в частности, с использованием метода Ленарда-Магри. Кроме этого, полученные автором результаты, касающиеся бифуркационной диаграммы и дискриминанта спектральной кривой не только позволяют эффективно исследовать диаграмму в целом, но и являются полезным источником нетривиальных примеров незамкнутых диаграмм и дискриминантов.

Апробация работы

Результаты диссертации докладывались:

---

[7] M. *Audin Spinning Tops: A Course Of Integrable Systems.* Cambridge University Press, 150 стр. (1999)

- многократно (в 2005 — 2010 годах) на семинаре «Современные геометрические методы» под руководством академика РАН А.Т. Фоменко и проф., д.ф.-м.н. А.С. Мищенко (мех-мат МГУ),
- на заседании Воронежской зимней математической школы (Воронеж, февраль 2006);
- на конференции «Ломоносовские чтения » (Москва, март 2006)
- на конференции International Conference on Differential and Functional Differential Equations (Москва, август 2008)
- на заседании семинара «Группы Ли и теория инвариантов» под руководством проф. Э.Б. Винберга, доц. Аржанцева И.В. (октябрь 2010)
- на заседании Воронежской зимней математической школы (Воронеж, февраль 2010);

Публикации

Результаты автора по теме диссертации опубликованы в 2 работах автора. Список работ приводится в конце автореферата [1–2].

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения и четырех глав. Список литературы включает 42 наименования. Общий объем диссертации составляет 110 страниц.

Содержание диссертации

Во **введении** формулируются цели работы, кратко излагаются основные результаты и содержание, а также освещается место данных результатов в современной теории интегрируемых систем.

В *первой главе* вводятся основные понятия, излагаются основные теоремы бигамильтоновой геометрии и некоторые простейшие следствия из них. Говорят, что на многообразии задана скобка Пуассона, если помимо структуры коммутативного кольца, на $C^\infty(M)$ имеется билинейная кососимметрическая операция $\{\ ,\ \}$, удовлетворяющая тождеству Якоби

$$\{f,\{g,h\}\}+\{h,\{f,g\}\}+\{g,\{h,f\}\}=0,\ \forall f,g,h\in C^\infty(M)$$

и правилу Лейбница

$$\{fg,h\}=f\{g,h\}+\{f,h\}g,\ \forall f,g,h\in C^\infty(M).$$

Пару — многообразие M и заданная на нем скобка Пуассона — называют *пуассоновым многообразием.* Две скобки Пуассона на многообразии называются согласованными, если любая их линейная комбинация снова является скобкой Пуассона. Многообразие M с заданной на нем парой согласованных скобок Пуассона называется бигамильтоновым многообразием.

Во второй главе изучаются так называемые бигамильтоновы цепочки. Бесконечную последовательность (вообще говоря локальных) функций $f_0, f_1, \ldots$ на бипуассоновом многообразии $M, \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ мы будем называть бесконечной бигамильтоновой цепочкой, если для функций из этой последовательности выполнена следующая система соотношений

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & \mathcal{A}_1 \, \mathrm{d} f_0 \\ \mathcal{A}_2 \, \mathrm{d} f_j & = & \mathcal{A}_1 \, \mathrm{d} f_{j+1}, \;\; j \geq 0. \end{array}$$

Конечная последовательность функций $f_1, \ldots, f_k$ называется *конечной бигамильтонов цепочкой*, если для функций из него выполнена следующая система соотношений

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & \mathcal{A}_1 \, \mathrm{d} f_0 \\ \mathcal{A}_2 \, \mathrm{d} f_j & = & \mathcal{A}_1 \, \mathrm{d} f_{j+1}, \;\; k-1 \geq j \geq 0, \end{array}$$

причем данная последовательность не может быть началом какой-либо более длинной конечной или бесконечной бигамильтоновой цепочки. Во второй главе сформулирована и доказана теорема существования бесконечных бигамильтоновых цепочек.

Здесь же описан класс функций, к которому принадлежат элементы цепочек в случае, когда имеется пара согласованных скобок Пуассона: линейная и постоянная. Полученное описание используется для доказательства того, что для некоторой алгебры Ли пучок скобок, задаваемый скобкой Пуассона-Ли и скобкой Пуассона-Ли с замороженным аргументом не является плоским. Будем говорить, что f — *локальный псевдомногочлен* на окрестности некоторой точки $P \in \mathfrak{g}^*$, если ограничение функции на листы скобки $\mathcal{A}_c$ в этой окрестности дает полиномиальные функции. Оказывается, в случае линейной и постоянной скобок бигамильтоновы цепочки состоят из псевдомногочленов.

В третьей главе изучаются квадратичные функции, задаваемые так называемыми секционными операторами. Для этих операторов доказывается теорема существовани Кроме этого в частном случае простых комплексных алгебр Ли доказывается теорема существования и единственности секционного оператора. Напомним, что секционным оператором в общем случае мы называем симметрическую квадратичную форму $\phi : \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}$, обладающую следующим свойством: для некоторых фиксированных элементов $a \in \mathfrak{g}^*$ и $\beta \in \mathfrak{g}$ и этой формы для произвольных $x \in \mathfrak{g}^*$ и $\gamma \in \mathfrak{g}$ выполняется тождество:

$$< a, [\phi x, \gamma] >=< x, [\beta, \gamma] > .$$

Четвертая глава содержит основные результаты, касающиеся совпадения замыканий бифуркационной диаграммы отображения момента и спектральной кривой соответствующего лаксова представления для представлений минимальной размерности комплексных простых алгебр Ли.

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность своим научным руководителям академику РАН А.Т. Фоменко и д.ф.-м.н., профессору А.В. Болсинову за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Автор благодарит участников семинара «Современные геометрические методы» и всех сотрудников кафедры дифференциальной геометрии и приложений за творческую атмосферу, которая способствовала научной работе.

Работы автора по теме диссертации

[1] А.Ю. Коняев, *Бифуркационная диаграмма и дискриминант интегрируемых систем типа твердого тела на алгебрах Ли so(2n+1), sp(2n) и sl(n)*, Доклады РАН, 2008, т.421, №1, стр. 18-20

[2] А.Ю. Коняев, *Бифуркационная диаграмма и дискриминант спектральной кривой интегрируемых систем на алгебрах Ли*, Матем. сб., 2010, т.201, №9,стр. 27-60