МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет

на правах рукописи

УДК 517

Шамаров Николай Николаевич

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ЭВОЛЮЦИОННЫХ ПОЛУГРУПП ИНТЕГРАЛАМИ ПО ТРАЕКТОРИЯМ В ВЕЩЕСТВЕННЫХ И $\mathfrak{p}$-АДИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва
2011

Работа выполнена на кафедре математического анализа механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научный консультант:	доктор физико-математических наук, профессор Шавгулидзе Евгений Тенгизович.
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Богачев Владимир Игоревич; доктор физико-математических наук Орлов Юрий Николаевич; доктор физико-математических наук, профессор Сухинин Михаил Федорович.
Ведущая организация:	Математический институт им. В. А. Стеклова РАН.

Защита состоится "30" сентября 2011г. в 16 ч. 45 мин. на заседании диссертационного совета Д 501.001.85 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: Россия, 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, аудитория 16–24.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико–математического факультета МГУ (Главное здание, 14-й этаж).

Автореферат разослан "   "   2011г.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д 501.001.85 при МГУ
доктор физико-математических наук
профессор   В. Н. Сорокин

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Тема диссертации относится к бесконечномерному анализу над локально компактными пополнениями поля рациональных чисел.

Бесконечномерный анализ использует дифференцируемые и обобщенные функции и меры на бесконечномерных вещественных пространствах для постановки и решения как собственно бесконечномерных, так и конечномерных задач. Первым примером применения бесконечномерного интегрирования к конечномерным задачам стало представление решений стандартного трехмерного уравнения Шредингера фейнмановским интегралом (идея была высказана Фейнманом в 1948 г. на “физическом уровне строгости”, математически реализована в простейшем случае Нельсоном в 1964 г.).

Именно фейнмановский формализм функционального интегрирования, обобщенный на случай функциональных суперпространств, позволил Глэшоу, Саламу и Вайнбергу в конце 60-х гг. построить единую квантовую теорию электромагнитного и слабого ядерного взаимодействий (им за это присуждена Нобелевская премия в 1979 г.). На сегодня этот формализм является общим фундаментом как для Стандартной модели электрослабого и сильного ядерного взаимодействий, так и теории суперструн (и супербран).

Хотя самые первые работы по бесконечномерному анализу (принадлежащие, в частности, Адамару[1], Фреше[2], Вольтерре[3], Гато[4]) появились в начала XX века, фактически бесконечномерный анализ в том виде, как он понимается сегодня, сформировался в значительной мере в работах советских математиков, начиная с пионерских работ А.Н. Колмогорова [5], С.В. Фомина[6] и их последователей, причем нужно отметить, в частности, что определяющий вклад в это формирование внесен классическими результатами О.Г. Смоля-

[1] J. Hadamard: Sur les operations fonctionnelles// C.R. Acad. Sci. Paris, 136 (1903), 351–354.

[2] M. Frechet: Sur les operations lineaires // Trans. Amer. Math. Soc., 5:4 (1904), 493–499

[3] V. Volterra: Lections sur les fonctions de lignes// Paris: Gauthier-Villars. 1910.

[4] R. Gateaux : “Sur les fonctionnelles continues et les fonctionnelles analytiques // Comptes rendus de l'academie des sciences (Paris) 157 (1913), 325–327

[5] *A.N. Kolmogorov*: La transformation de Laplace dans les espaces linéaires. // C.R. Acad. Sci. Paris , 200 (1935) pp. 1717–1718

[6] *С.В. Фомин*: Дифференцируемые меры в линейных пространствах// Тезисы кратких научных сообщений Международного конгресса математиков, секция 5, 1966, с 78–79.

нова и его учеников: В.И. Богачева, А.В. Угланова и Е.Т. Шавгулидзе.

О важности создания нелинейной теории случайных процессов — этой важнейшей области развития бесконечномерных идей — А.Н. Колмогоров говорил, в частности, в самом последнем из своих выступлений на заседании Московского математического общества. Примерно в то же время на одном из заседаний совета по присуждению ученых степеней он отдельно отметил актуальность бесконечномерного анализа.

С.В.Фомин первый высказал идею о том, что пространства обобщенных функций бесконечномерного аргумента (то есть пополнения пространств обычных функций этого аргумента, обладающих хорошими аналитическими свойствами, относительно некоторой локально выпуклой сходимости, более слабой, чем локально равномерная) естественным образом сопряжены не пространствам бесконечно дифференцируемых функций, но пространствам бесконечно дифференцируемых мер, причем последние пространства не обладают никакими естественными изоморфизмами на пространства функций (в силу отсутствия меры Хаара). При этом двойственным к пространству достаточно хороших функций является пространство именно обобщенных мер, а не функций. При этом естественный аналог интеграла Фурье переводит пространство мер в пространство функций. С.В. Фомину же принадлежит первое (и наиболее прямое — в терминах значений самой меры) определение производной меры по направлению.

Спустя примерно 30 лет после процитированного высказывания Колмогорова, на рубеже веков, подводя итоги развития математики в XX веке (начало которого, как уже говорилось, отмечено первыми работами по бесконечномерному анализу), о важности развития бесконечномерного анализа ярко высказался известный британский математик М.Ф.Атья[7]. В лекции, прочитанной в Филдсовском институте г. Торонто на Мировом математическом симпозиуме 2000 года, говоря о перспективах математики в начавшемся XXI-м веке он

[7]являющийся также иностранным членом РАН

сказал[8] (цитата из опубликованного перевода[9] на русский язык):

XXI-й век может стать эпохой квантовой математики, или, если угодно, бесконечномерной математики. Что бы это могло означать? Квантовая математика означает, в широком смысле, "подлинное понимание анализа, геометрии, топологии, алгебры в различных нелинейных функциональных пространствах", ...

При этом в качестве тех открытых в XX веке перспективных областей, от которых следует ожидать развития в веке XXI-м, он выделил, в частности, анализ над локальными (по Вейлю) полями. Важными частными случаями последних являются нетривиальные нормированные пополнения поля рациональных чисел (относительно различных нормирований). Кроме того, он отметил важность (для приложений в математической и теоретической физике, особенно в теории калибровочных полей и струн) распространения преобразования Фурье на случай нелинейных бесконечномерных областей определения преобразуемых функций. Наконец, он отметил и важность исследований, связанных с некоммутативным анализом — и особо отметил, что определенно ожидает результатов в первом десятилении века.

После этих уточнений уместно вернуться к продолжению цитаты:
... а "подлинное понимание" для меня означает, что найдены вполне строгие доказательства всех тех замечательных фактов, о которых размышляли физики.

К проводимой М.Ф.Атьей аналогии между квантовой и бесконечномерной математикой стоит ещё добавить, что все современные учебники по квантовой теории поля, статистической механике и теории струн используют континуальный интеграл как основной элемент формализма.

Таким образом, к числу областей математики, развитие которых им ожидалось, отнесены, в частности: математические модели физики, особенно квантовой теории; бесконечномерный анализ как таковой (включая бесконечно-

[8] *Atiyah M.:* MATHEMATICS IN THE 20TH CENTURY// Bulletin of the London Mathematical Society, 2002, Vol.34, No 1, p. 1–15.

[9] *Атья М.:* Математика в двадцатом веке// Матем. просв., серия 3, 2003, выпуск 7, с. 5-–24.

мерный гармонический анализ) и как сформировавшийся аппарат современных физических теорий; анализ над различными локально компактными полями и некоммутативный анализ.

Результаты настоящей диссертации относятся ко всем этим актуальным направлениям, о которых говорили как Колмогоров при их рождении (закладывая основы значительной части их) в XX веке, так и Атья в самом конце XX века, и которые на сегодня, с одной стороны, обрели признаки классических, а с другой стороны — набрав темп развития, пока ещё весьма далеки от завершения. Она представляет собой исследование операторных полугрупп, порожденных конечномерными (над локально компактными полями) псевдодифференциальными операторами (ПДО), методами бесконечномерного анализа, включающими как преобразования Фурье функций и мер, заданных на конечномерных и бесконечномерных пространствах над различными локальными полями, так и строгое доказательство формул, содержащих функциональные интегралы, аналогичных классическим формулам с интегралами Фейнмана для решений уравнений Шредингера. Упомянутые полугруппы естественным образом возникают как разрешающие для эволюционных уравнений, в которых правые части содержат псевдодифференциальные генераторы этих полугрупп. Таким образом, результаты о представлениях операторов этих полугрупп приводят к результатам о свойствах решений соответствующих эволюционных уравнений, в частности — к представлениям этих решений.

Следует отметить, что в только что закончившемся первом десятилетии века активно находил применения и развивался так называемый ультраметрический анализ, в частности, — анализ на пространствах над полями $\mathfrak{p}$-адических чисел, или $\mathfrak{p}$-адический анализ. В частности, именно на базе $\mathfrak{p}$-адического анализа построены математические модели таких физических процессов, как "спектральная диффузия" (в коллективе макромолекул протеина) и явление абсорбции угарного газа миоглобином. Исследование физических состояний белковых молекул иногда относят к мезофизике из-за типичных порядков размеров исследуемых объектов, находящихся между типичными порядками размеров макрофизики и объектов микрофизики (атомной). Важнейшим ингредиентом $\mathfrak{p}$-адических моделей процессов с белковыми молекулами является уравнение, аналогичное уравнению теплопроводности и понимаемое как кинетическое. В этом уравнении искомая вещественно-значная функция зависит как от вещественного, так и от p-адического аргумента, а роль оператора Лапласа играет ПДО Владимирова подходящего порядка. Потенцированию ПДО, включающщх — в качестве слагаемых — ПДО Владимирова с отрицательными и с чисто мнимыми коэффициентами, посвящены две главы работы, 2-я и 3-я (с учетом использования в них общих конструкций, развитых в 1-й главе, — первые 3 главы из 4-х). 4-я глава посвящена исследованию аналогичными методами, развитыми автором, ПДО с некоммутирующими (матричными) коэффициентами, входящих в правую часть записанного в эволюционной форме классического уравнения Дирака для электрона и позитрона в пространственно неоднородном потенциале.

Цель работы — развитие метода функционального интегрирования для изучения эволюционных операторных полугрупп.

Основная задача работы. Исследование операторных полугрупп, генерируемых дифференциальными и псевдидифференциальными операторами в классах функций, определенных на векторных пространствах над полями вещественных или $\mathfrak{p}$-адических чисел и принимающих комплексные числовые или матричные значения.

При этом аргументы функций могут пробегать как соответствующее одномерное пространство — тогда получаются применения бесконечномерных структур для получения новой информации о прикладных конечномерных задачах, — так и бесконечномерное пространство, в случае которого сама постановка задачи использует структуры бесконечномерного анализа.

Задача включает, в частности, представления изучаемых полугрупп с помощью интегралов по путям в пространствах над полями вещественных и p-адических чисел, в том числе — разработку аппарата пуассоновских мер в пространствах траекторий, инвариантного относительно выбора основного поля пространств значений траекторий и их размерности, для случая некоммутирующих (матричных) значений мер.

Основные методы. Главный метод работы — использование бесконечномерного интегрирования в широком смысле. При этом интегрирование производится как по вероятностным функциональным распределениям, аналогичным мерам Винера, так и по матрично-значным обобщениям мер Маслова–Пуассона, а также по более общим распределениям, не являющимися счетно аддитивными, примерами которых являются меры типа Фейнмана. Для определения функциональных интегралов используются как аппроксимации их классическими конечномерными интегралами в смысле Лебега, так и бесконечномерные преобразования Фурье. Конечнократные аппроксимации функциональных интегралов основаны на продакт-формуле Чернова для операторных полугрупп. Для построения таких функциональных интегралов, в которых значения подынтегральной функции не обязаны коммутировать со значениями меры интегрирования, используется разработанный автором новый аппарат переходных мер с некоммутирующими значениями.

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми. В работе впервые систематически развита теория интегрирования по линейным функциональным пространствам, во многом инвариантная относительно выбора локально компактного нормированного числового поля этих пространств. Для таких функциональных пространств построен новый аппарат переходных мер с некоммутирующими значениями, позволяющий интегрировать операторнозначные функции по операторнозначным мерам (предполагается, что значения этих мер и функций не обязаны коммутировать). Полученные на этой базе основные новые результаты диссертации состоят в следующем.

- Получены представления решений уравнений типа теплопроводности с $\mathfrak{p}$-адическим конфигурационным пространством с помощью интегралов по траекториям в конфигурационном, импульсном и фазовом пространствах;

- получены представления решений уравнений типа Шредингера с $\mathfrak{p}$-адическим конфигурационным пространством с помощью интегралов по траекториям в конфигурационном и импульсном пространствах;

- получены представления решений классического 4-мерного уравнения Дирака для релятивистского электрона в неоднородном поле электромагнитного потенциала с помощью интегралов по траекториям в импульсном пространстве.

Теоретическая и практическая ценность. Диссертация носит теоретический характер.

Полученные в ней результаты, в частности, являются основой математической теории (хронологического) функционального интегрирования операторнозначных функций по операторнозначным мерам (предполагается, что значения этих мер и функций не обязаны коммутировать).

Такие интегралы позволяют строить аналитические выражения, выражающие общие решения псевдодифференциальных уравнений с операторнозначными символами (например, со значениями в супералгебрах), включая оригинальное 4-мерное уравнение Дирака для электрона и позитрона в пространственно-неоднородном электромагнитном поле.

Таким образом, результаты и новые методы диссертации могут быть полезны для математической физики; в частности, с помощью новых хронологических интегралов можно строить общие решения классических уравнений типа Дирака на математическом уровне строгости, что ранее было невозможно; особое значение полученные результаты имеют для суперанализа.

Результаты диссертации служат основой для новых специальных курсов, читаемых на механико–математическом факультете МГУ.

Публикации. Все основные результаты диссертации опубликованы в 18 статьях автора (их список приведен в конце автореферата), 14 из которых опубликованы в изданиях, рекомендованных ВАК.

Апробация работы.

Результаты диссертации неоднократно докладывались, в том числе:

— на научно-исследовательских семинарах:

- "Бесконечномерный анализ и его приложения" механико-математического факультета МГУ им. М.В.Ломоносова, руководители: проф. О.Г. Смолянов, проф. Е.Т. Шавгулидзе, 1997–2010;
- "Семинар по многомерному комплексному анализу" механико-математического факультета МГУ им. М.В.Ломоносова, руководители: проф. В.К. Белошапка,чл.-корр. РАН С.Ю. Немировский, проф. А.Г. Сергеев, чл.-корр. РАН Е.М.Чирка, 2010;
- Семинар "Актуальные проблемы геометрии и механики" механико-математического факультета МГУ им. М.В.Ломоносова, руководители проф. Д.В. Георгиевский, д.ф.-м.н. М.В. Шамолин, проф. С.А. Агафонов, 2005–2010;
- "Открытый семинар по теоретической физике" Московский Государственный Открытый Университет, факультет прикладной математики, кафедра физики,руководитель проф. Т.Ф.Камалов, 2007–2010;
- "Семинар Отдела математической физики" МИАН им. В.А. Стеклова, руководители акад. В.С.Владимиров, член-корр. РАН И.В. Волович, 1997–2010;
- Семинар лаборатории Теории нелинейных физико-математических процессов Института химической физики РАН, руководитель член-корр. РАН В.А. Аветисов, 1997–2010;

— на научных конференциях:

- Международная конференция "Дифференциальные уравнения и смежные вопросы", посвящённая памяти И.Г.Петровского, Москва, 2004;

- Третья международная конференция по р-адической математической физике: от физики планковских масштабов до сложных систем и биологии “p-ADIC MATHPHYS.2007” Москва, 2007;
- Международная конференция “Дифференциальные уравнения и смежные вопросы”, посвящённая памяти И.Г.Петровского, Москва, 2007;
- 3rd Conference on Mathematical Modeling of Wave Phenomena, Vaxjo, Sweden, 2008;
- 1-я Международная Самарская конференция “Математическая физика и ее приложения”, Самара, 2008;
- Международная конференция “Stochastic Analysis and Random Dynamical Systems”, Львов, Украина, 2009;
- Международная конференция “Современные проблемы математики, механики и их приложений”, посвященная 70-летию ректора МГУ академика В.А. Садовничего, Москва, 2009;
- Российская Школа-конференция “Математика, информатика, их приложения и роль в образовании”, Москва, РУДН, 2009;
- Международная научно-техническая конференция “Нанотехнологии и наноматериалы”, Москва, МГОУ, 2009;
- 2-я Международная Самарская конференция “Математическая физика и ее приложения”, Самара, 2010.

Структура диссертации. Диссертация содержит 224 страницы и состоит из введения, четырех глав, двух дополнений и списка литературы.

Краткое содержание диссертации.

В **введении** обсуждаются вкратце мотивировки развиваемого в работе направления.

В первой главе приведены основные конструкции, связанные с используемым далее интегрированием по бесконечномерным пространствам, в частности, изложению мультипликативного метода переходных мер, имеющих матричные значения, и построению используемых далее пуассоновских распределений в пространствах траекторий. В начале главы изложены общие используемые в диссертации конструкции, связанные с нормированными полями и нормированными пространствами над такими полями. Затем для векторных пространств над такими полями строится общая теория цилиндрических переходных мер с некоммутирующими (матричными) значениями [10].

Нормой (или нормированием) на поле K называется всякая вещественнозначная функция $N : K \to \mathbb{R}_+$ такая, что: $\forall (x, y) \in K \times K$
$N(x) = 0 \iff x = 0$, $N(x + y) \leqslant N(x) + N(y)$, $N(x \cdot y) = N(x) \cdot N(y)$.

В случае, когда $K = \mathbb{Q}$ — поле рациональных вещественных чисел, норма полностью определяется значениями на простых натуральных числах $\mathfrak{p}$, бо́льших единицы, множество которых $\{2\,,\ 3\,,\ 5\,,\ ...\}$ обозначим символом $\mathbb{P}$. Полагаем далее $\bar{\mathbb{P}} = \mathbb{P} \cup \{\infty\}$ и $\mathfrak{p} \in \bar{\mathbb{P}}$, так что $\mathfrak{p} \in \mathbb{P} \iff \mathfrak{p} < \infty$.

Для каждого $\mathfrak{p} \in \mathbb{P}$ положим $N_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}^{-1}$ и при этом для каждого $\mathfrak{q} \in (\mathbb{P} \setminus \{\mathfrak{p}\})$ положим $N_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{q}) = 1$. Положим ещё $N_\infty(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}$ для всех $\mathfrak{p} \in \mathbb{P}$. Эти соотношения для каждого $\mathfrak{p} \in \bar{\mathbb{P}}$ определяют нормирования $N_{\mathfrak{p}}$ на $\mathbb{Q}$. Для каждого $\mathfrak{p} \in \bar{\mathbb{P}}$ выбираем произвольным образом одно из (попарно изоморфных) нормированных полей, являющихся пополнениями поля $\mathbb{Q}$ относительно нормы $N_{\mathfrak{p}}$, и обозначаем выбранное пополнение знакосочетанием $\mathbb{Q}_{\mathfrak{p}}$.[11] Далее в рассуждениях, в которых значение переменной $\mathfrak{p} \in \bar{\mathbb{P}}$ фиксированно, поле $\mathbb{Q}_{\mathfrak{p}}$ обозначаем для краткости буквой Q . При $\mathfrak{p} < \infty$ поле $\mathbb{Q}_{\mathfrak{p}}$ называется полем $\mathfrak{p}$-адических чисел. Понятие нормы $\mathbf{N}$ на векторном пространстве V над нормированным полем определяется как обычно. Если при этом

[10] включая построение по таким переходным мерам новых мер на пространствах траекторий. В случае коммутирующих значений по сверточной полугруппе мер строится новая полугруппа — мер на пространствах траекторий.

[11] Значение $|x|_{\mathbb{Q}_{\mathfrak{p}}}$ нормы на элементе $x \in \mathbb{Q}_{\mathfrak{p}}$ часто кратко обозначается $|x|_{\mathfrak{p}}$. Поскольку при этом поле $\mathbb{Q}_\infty$ изоморфно полю вещественных чисел, то считаем, что в качестве $\mathbb{Q}_\infty$ выбрано именно поле $\mathbb{R}$ (в частности, $|x|_\infty = |x|_{\mathbb{R}}$).

$\forall\,(\mathbf{x},\mathbf{y})\in V\times V \qquad \mathbf{N}(\mathbf{x}+\mathbf{y})\leqslant\max(\mathbf{N}(\mathbf{x}),\mathbf{N}(\mathbf{y}))$, то норма $\mathbf{N}$ называется также ультранормой. [12]

Далее, если X — множество и V — векторное пространство, то V^X — множество [13] всех V-значных функций на множестве X .

Если V — банахово пространство над полем $K\in\{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$, то $L(V)$ — пространство ограниченных (всюду определенных) линейных операторов $V{\to}V$. Если ещё $I\subset\mathbb{R}$ — подмножество вещественной оси, то функция $F:I{\to}L(V)$ называется сильно непрерывной, если непрерывно отображение

$$I\times V\ni(t,x)\mapsto F(t)x\in V$$

относительно нормированной топологии в V и сужения на $I\times V\subset\mathbb{R}\times V$ произведения нормированных топологий пространств $\mathbb{R}$ и V . При $I=[0;+\infty)$ такая функция будет называться (сильно непрерывной операторной однопараметрической, или, кратко, C_0-) полугруппой в пространстве V , если

$$F(0)x=x\ \ (x\in V)\quad\text{и}\quad F(s+t)=F(s)\circ F(t)\ \ (t\in I\ni s)\ .$$

Для такой полугруппы F образуемая при фиксированном $x\in V$ функция $Fx:I\ni t\mapsto F(t)x$ называется орбитальным отображением (с начальным значением $x=Fx(0)$).

Далее, если t_0 — неизолированная точка некоторого множества $I\subset\mathbb{R}$, функцию $y:I\to V$ будем называть дифференцируемой по норме пространства V в точке t_0 , если в пространстве V существует предел

$$\lim_{t\to t_0}\frac{1}{t-t_0}(y(t)-y(t_0))\ ,$$

обозначаемый в этом случае $\frac{d}{dt}\big|_{t=t_0}(y(t))$ и называемый производным значением функции y в точке t_0 . Символ y'_V при этом будет означать функцию,

[12] Для $\mathfrak{p}$-адического ($\mathfrak{p}\in\mathbb{P}$) координатного пространства $\mathrm{X}=Q^{\mathrm{d}}$ подразумевается заданной его так называемая каноническая норма $Q^{\mathrm{d}}\ni\mathbf{x}\mapsto\max\limits_{j\in\bar{\mathrm{d}}}|\mathbf{x}^j|_{\mathfrak{p}}$, которая также называется $\mathfrak{p}$-адической (на Q^{d}); она также является ультранормой. В случае $\mathfrak{p}=\infty$ вещественное координатное пространство $Q^{\mathrm{d}}=\mathbb{R}^{\mathrm{d}}$ предполагается наделенным его стандартной евклидовой нормой.

[13] его и его векторные подпространства называем функциональными, чтобы выделить их по сравнению с пространствами типа L_r , которые определим, как обычно, как фактор-пространства, элементами которых являются не индивидуальные функции, а классы эквивалентности.

определенную на множестве всех тех точек $t \in I$, в которых функция y дифференцируема по норме пространства V , и значение которой в каждой точке её области определения равно производному значению функции y в этой точке.

Известно [14], что орбитальное отображение $Fx : [0; \infty) \to V$ полугруппы F, будучи по определению полугруппы непрерывным, не обязано быть дифференцируемым по норме пространства V во всех точках полуоси I , и что свойство его дифференцируемости одновременно во всех этих точках равносильно свойству его дифференцируемости в нуле. Множество всех тех векторов $x \in V$, для которых это свойство выполнено, плотно в V ; оно обозначается $D_{\dot{F}_0}$ и называется областью определения генератора полугруппы, а оператор

$$D_{\dot{F}_0} \ni x \mapsto \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (F(t)x)$$

обозначается $\dot{F}_0$ или $F'(0)$ и называется генератором полугруппы; полугруппа однозначно восстанавливается по своему генератору, и если A — ее генератор, то ее значения в точках $t \in [0; \infty)$ обозначаются записью $e^{t \cdot A}$; при этом часто генератор имеет вид $A = -B$ вместо $e^{t\cdot(-B)}$ пишем также $e^{-t\cdot B}$.

Источником аппроксимаций функциональных интегралов являются известная продакт-формула Чернова для аппроксимаций полугрупп и её частный вид — формула Троттера–Ли.

Если S — некоторая алгебра подмножеств множества X $(X \in S)$ и V — нормированное пространство , то для произвольной меры $m : S \to V$ и произвольного множества $A \in S$ значение $|m|(A)$, равное величине

$$\sup\Big\{\sum_{k=1}^{n} \|m(A_k)\|_V : n \in \mathbb{N},\ A_k \in S\ (k \in \bar{n}),\ A_k \cap A_j = \emptyset\ (k \neq j)\Big\}$$

из промежутка $[0, +\infty]$, называем вариацией меры m на множестве A или значением вариации меры на этом множестве, а отображение $S \ni A \mapsto |m|(A)$ — вариацией меры. Значение $|m|(X)$ при этом называем нормой меры m по вариации, или полной вариацией этой меры, и обозначаем $\|m\|$. Если это

[14] *Davies E.B.:* One-parameter semigroups// Academic Press, 1980.

значение конечно, говорят, что мера обладает конечной вариацией.

Если для некоторых пространств X и Y выделены их системы подмножеств S и T соответственно ($S \subset \mathcal{P}(X)$, $T \subset \mathcal{P}(Y)$) и отображение $f : X \to Y$ таково, что для каждого множества B , являющегося элементом системы T , его полный прообраз $f^{-1}(B) \equiv \{x : x \in X,\ f(x) \in B\}$ является элементом системы S, то f называется (S,T)-измеримым. Если при этом ещё m — мера на X, то отображение $T \ni B \mapsto m(f^{-1}(B))$, являющееся мерой на Y , обозначается $(m \circ f^{-1} \restriction_T)$ и называется (f,T)-образом меры m . Если к тому же S и T являются алгебрами множеств, а мера m принимает значения в нормированном пространстве, то полная вариация образа меры не превосходит полной вариации исходной меры.

Пусть даны измеримые пространства X_1 и X_2 с их σ-алгебрами S_1 и S_2 соответственно, и пусть V — конечномерное вещественное пространство (наделенное его стандартной топологией). Отображение $a : X_1 \times S_2 \ni (x,A) \mapsto a(x,A) \in V$ с ограниченным в пространстве V множеством значений называется V-значной переходной мерой между измеримыми пространствами X_1 и X_2 , если при каждом $x \in X_1$ отображение $a(x,\cdot) : S_2 \ni A \mapsto a(x,A)$ является счетно аддитивнной V-значной мерой на алгебре S_2 , обозначаемой далее записью a_x , и отображение $a(\cdot,A) : X_1 \ni x \mapsto a(x,A)$ является (S_1,σ_V)-измеримым V-значным отображением на множестве X_1 . Множество $A(X_1,X_2;V)$ таких переходных мер наделяется банаховой нормой $A(X_1,X_2;V) \ni a \mapsto \sup\{\|a_x\| : x \in X_1\}$. Если $S_1 = S_2$ (в частности, $X_1 = X_2$) , то V-значная переходная мера между X_1 и X_2 называется V-значной переходной мерой в пространстве X_1 . Запись $\mathcal{M}(\mathrm{X},V)$ означает пространство всех счетноаддитивных мер, определенных на борелевской сигма-алгебре конечномерного пространства $\mathrm{X} = Q^{\mathrm{d}}$ и принимающих значения в конечномерном нормированном комплексном пространстве V.[15]

[15]Если $\mathrm{d} \in \mathbb{N}$, V — нормированное конечномерное пространство над $\mathbb{R}$, $\mathrm{X} = Q^{\mathrm{d}}$ и $m \in \mathcal{M}(\mathrm{X},V)$, то отображение $a_m : \mathrm{X} \times \sigma_{\mathrm{X}} \ni (\mathbf{x},A) \mapsto m(A - \mathbf{x})$ является V-значной переходной мерой в пространстве X. Если пространство X_2 имеет вид $Q^{\mathrm{d}} = (\mathbb{Q}_{\mathfrak{p}})^{\mathrm{d}}$ для некоторых $\mathrm{d} \in \mathbb{N}$ и $\mathfrak{p} \in \bar{\mathbb{P}}$, то всякая (знакопеременная) вещественнозначная переходная мера a между произвольным измеримым пространством X_1 и указанным X_2 является разностью двух неотрицательных переходных мер, комплекснозначная переходная мера яв-

Далее снова $Q = \mathbb{Q}_\mathfrak{p}$. Если V — векторное пространство над полем Q (далее — не обязательно конечномерное над Q) , то $V^{\#}$ означает множество всех Q-линейных отображений $V \to Q$, называемых при этом (линейными) функционалами (на V). До конца главы символ S (возможно, с индексом или несколькими) означает некоторое пространство над Q и F (соответственно, с теми же индексом или индексами) — некоторое множество Q-линейных функционалов $S \to Q$.

Пусть, для каждого $n \in \mathbb{N} = \{1,\ 2,\ \ldots\}$, G_n — некоторый класс функций, определенных на Q^n (область значений сейчас не важна) , и $G = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} G_n$. Функция φ , определенная на пространстве S , называется (G,F)-цилиндрической, если найдутся число $n \in \mathbb{N}$, набор линейных функционалов $(f_1$, ..., $f_n) \in F^n$ и функция $g \in G_n$ такие, что для каждого $s \in S$ выполнено равенство $\varphi(s) = g(f_1(s)$, ..., $f_n(s))$. Если принадлежность к классу G выражается некоторым свойством функций, то при описании (G,F)-цилиндрических функций название этого свойства ставится перед термином "F-цилиндрический": таким образом определяются классы комплекснозначных F-цилиндрических, борелевских F-цилиндрических и т.д. функций на S. Функции, значениями которых могут являться лишь нуль и единица, называются индикаторными. Напомним, что если индикаторная функция определена на некотором множестве X , равна единице в точках подмножества $A \subset X$ и нулю в точках подмножества $X \setminus A$, она обозначается $1_{A\subset X}$ и называется индикатором (=индикаторной функцией) подмножества A в множестве X . При этом множество A называется определяемым функцией $1_{A\subset X}$ подмножеством в множестве X . F-цилиндрическим множеством в S называется всякое подмножество в S, которое определяется какой-нибудь борелевской индикаторной F-цилиндрической функцией на S .

Если F — непустое подмножество в $S^{\#}$, то запись $\sigma(S,F)$ означает наименьшую среди тех теоретико-множественных сигма-алгебр Σ с единицей S ,

ляется комплексной линейной комбинацией не более чем четырех неотрицательных переходных мер, и всякая переходная мера общего вида является векторной линейной комбинацией некоторого конечного числа неотрицательных переходных мер.

для каждой из которых $(\Sigma, \sigma_{\mathfrak{p}})$-измеримы все функционалы $f \in F$.[16]

Запись $\alpha(S, F)$ означает объединение всех тех теоретико-множественных сигма-алгебр вида $\sigma(S, F_0)$, для которых F_0 — конечное подмножество в F . Элементы сигма-алгебр вида $\sigma(S, F_0) \subset \alpha(S, F)$ называются также F_0-цилиндрами, или F_0-цилиндрическими множествами. Система $\alpha(S, F)$ является алгеброй множеств с единицей S и называется цилиндрической алгеброй на векторном пространстве S относительно множества функционалов F $(\subset S^{\#})$, или, короче, F-цилиндрической алгеброй на S .[17]

Если V — банахово пространство (не обязательно над полем $\mathbb{Q}_{\mathfrak{p}}$), то запись $\mathcal{M}_{\mathrm{Cyl}}(S, F; V)$ означает множество, элементами которого являются все те аддитивные меры ограниченной вариации $\alpha(S, F) \to V$, сужение каждой из которых на подалгебру вида $\sigma(S, K)$, где K — непустое конечное подмножество в F , счетно аддитивно. [18] Запись $\mathcal{M}(S, F; V)$ означает пространство всех счетно аддитивных мер $\sigma(S, F) \to V$ конечной полной вариации.

Для определения операции свертки цилиндрических мер используется тот факт (Предложение 1.10), что отображение сложения $\mathbf{A} : S \times S \to S$, сопоставляющее упорядоченной паре $(a, b) \in S \times S$ элемент (их сумму) $(a + b)$ из пространства S , является измеримым (линейным оператором) относительно алгебр $\alpha(S\ ,\ F) \otimes_a \alpha(S\ ,\ F)$ и $\alpha(S,F)$, где $\alpha(S\ ,\ F) \otimes_a \alpha(S\ ,\ F)$ означает наименьшую цилиндрическую алгебру, содержащую все декартовы произведения вида $A \times B$ при $(A, B) \in \alpha(S\ ,\ F) \times \alpha(S\ ,\ F)$ (множество всех этих произведений обозначается $\alpha(S\ ,\ F) \Box \alpha(S\ ,\ F)$). Свертка $m * n$ двух цилиндрических мер m, n , принимающих значения в некоторой матричной алгебре, определяется как образ при отображении $\mathbf{A}$ той минимальной цилиндрической меры в пространстве $S \times S$, которая на каждом произведении

[16]Для общности положим ещё $\sigma(S, \emptyset) = \{\emptyset\ ,\ S\}$.

[17]Пространство S называется цилиндрическим, если вместе с ним задана некоторая цилиндрическая алгебра на нём. F-цилиндрическая алгебра на S называется невырожденной, если пересечение ядер всех функционалов $f \in F$ нулевое (другими словами, если не существует общего вектора образующей для всех цилиндров из алгебры; наконец, это равносильно тому, что F разделяет точки в S); при этом и само цилиндрическое пространство называется невырожденным.

[18]меры, являющиеся элементами пространства $\mathcal{M}_{\mathrm{Cyl}}(S, F; V)$, называются V-значными F-цилиндрическими мерами на S .

$(A, B) \in \alpha(S\ ,\ F) \times \alpha(S\ ,\ F)$ принимает значение $m(A) \times n(B)$. Такая свертка некоммутативна.

Для определения преобразования Фурье используется следующее обобщение понятия дробной части вещественного числа на случай произвольного поля $Q = \mathbb{Q}_{\mathfrak{p}}$ $(\mathfrak{p} \in \mathbb{P})$. Минимальная замкнутая в $\mathbb{Q}_{\mathfrak{p}}$ подгруппа по сложению, содержащая единицу, обозначается $\mathbb{Z}_{\mathfrak{p}}$. Очевидно, $\mathbb{Z}_{\infty} = \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, и для каждого $x \in \mathbb{Q}_{\infty}$ класс смежности $x + \mathbb{Z}_{\infty}$ имеет одноэлементное пересечение с вещественным полуинтервалом $[0\ ;\ 1)$, причем единственный элемент этого пересечения называется вещественной дробной частью элемента $x \in \mathbb{Q}_{\infty}$; эта дробная часть будет обозначаться $\{x\}_{\infty}$. В случае конечного $\mathfrak{p}$ подгруппа $\mathbb{Z}_{\mathfrak{p}}$ является центральным единичным замкнутым шаром нормированного поля $\mathbb{Q}_{\mathfrak{p}}$ ($\mathbb{Z}_{\mathfrak{p}} = \{x : x \in \mathbb{Q}_{\mathfrak{p}},\ |x|_{\mathfrak{p}} \leqslant 1\} \equiv \bar{B}_1^{\mathbb{Q}_{\mathfrak{p}}}(0)$) , и при этом для каждого $x \in \mathbb{Q}_{\mathfrak{p}} \setminus \mathbb{Z}_{\mathfrak{p}}$ компактный класс смежности $x + \mathbb{Z}_{\mathfrak{p}}$ имеет единственный представитель вида ненулевой конечной суммы

$$\sum_{k=-\log_{\mathfrak{p}} |x|_{\mathfrak{p}}}^{-1} c_k(x) \mathfrak{p}^k \ ,$$

в которой числа $c_k(x) \in \{0\ ,\ 1\ ,\ 2\ ,\ \ldots\ ,\ (\mathfrak{p} - 1)\}$ играют роль цифр $\mathfrak{p}$-ичного разложения, и $c_{-\log_{\mathfrak{p}} |x|_{\mathfrak{p}}}(x) \neq 0$; этот представитель называется $\mathfrak{p}$-адической дробной частью от x и обозначается $\{x\}_{\mathfrak{p}}$; полагают также $\{x\}_{\mathfrak{p}} = 0$ для каждого $x \in \mathbb{Z}_{\mathfrak{p}}$. Таким образом, для произвольного $\mathfrak{p} \in \bar{\mathbb{P}}$ определена вещественно-значная функция $\mathbb{Q}_{\mathfrak{p}} \to [0\ ;\ 1)$, $x \mapsto \{x\}_{\mathfrak{p}}$, причем отображение $\chi_{\mathbb{Q}_{\mathfrak{p}}} : \mathbb{Q}_{\mathfrak{p}} \to \{z : z \in \mathbb{C},\ |z|_{\mathbb{C}} = 1\}$ (где $|z|_{\mathbb{C}}$ — абсолютная величина или модуль комплексного числа z), определяемое формулой $x \mapsto \chi_{\mathbb{Q}_{\mathfrak{p}}}(x) = e^{(2\pi \{x\}_{\mathfrak{p}})i}$ $(i = \sqrt{-1})$, является непрерывным гомоморфизмом аддитивной группы нормированного поля $\mathbb{Q}_{\mathfrak{p}}$ в мультипликативную группу $\mathbb{T} = \{z : |z|_{\mathbb{C}} = 1\}$ комплексных чисел с единичным модулем.

Пусть снова S — векторное пространство над $Q = \mathbb{Q}_{\mathfrak{p}}$ и $F \subset S^{\#}$. Пусть еще D — некоторое множество и J — некоторое сюръективное отображение множества D *на* множество F . Пусть также V — комплексное конечномерное нормированное нормированное пространство. Тогда J-преобразованием

Фурье произвольной меры $m \in \mathcal{M}_{\mathrm{Cyl}}(S, F; V)$ называется функция $D \to V$, обозначаемая $\widetilde{m}^J$ или $\mathbf{F}_J\, m$ и определяемая равенствами

$$\widetilde{m}^J(x) = \int_{\mathbb{Q}_\mathfrak{p}} \chi_Q(y)\ m \circ (J(x))^{-1}(dy)\ .$$

В случае $J = id_F$ J-преобразование Фурье меры m называется F-преобразованием Фурье этой меры и обозначается $\widetilde{m}^F$ или $\mathbf{F}_F\, m$, или просто $\widetilde{m}$, если F определено контекстом. Ясно, что $\widetilde{m}^J = \widetilde{m}^F \circ J$, и разница между F- и J-преобразованиями Фурье одной меры проявляется в формулах: скажем, одно из них зависит от функций, другое — от мер, или от обобщенных функций, или от обобщенных мер.

F-преобразование Фурье свертки двух F-цилиндрических матричных мер равно поточечному произведению преобразований Фурье этих мер, взятому в том же порядке. Сверточная экспонента $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(m)^{*k}$ обозначается e^{*m} и также является F-цилиндрической мерой. Множество $\{e^{*t\cdot m} : t \geqslant 0\}$ является примером сверточной полугруппы мер (называемой в этом случае экспоненциальной), то есть мерозначной функции f на $\mathbb{R}_+ = [0; +\infty)$ такой, что $f(s+t) = f(s) * f(t)\ \ ((s,t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+)$.

Опишем теперь способ порождения сверточной полугруппой цилиндрических мер новых мер в пространствах траекторий. Пусть снова S — векторное пространство над $Q = \mathbb{Q}_\mathfrak{p}$ $(\mathfrak{p} \in \bar{\mathbb{P}})$ и $F \subset S^{\#}$. Пусть также V — конечномерная банахова алгебра над $\mathbb{R}$ ($\|a \cdot b\| \leqslant \|a\| \cdot \|b\|$ для $a, b \in V$). Пусть ещё $m = \{t \mapsto m_t : t \in [0; +\infty)_\mathbb{R}\}$ — непрерывная (относительно нормы мер по вариации) однопараметрическая сверточная полугруппа V-значных F-цилиндрических мер на S, такая, что для некоторого $a > 0$ $\|m_t\| \leqslant e^{t\cdot a}$ (последняя оценка носит технический характер[19]; она всегда в используемых далее примерах выполняется — как правило, по построению).

При построении новых мер далее для каждого $T > 0$ определим последовательно следующие новые объекты: векторное пространство S_1 над Q, подмножество $F_1 \subset (S_1)^{\#}$ и, для каждого значения нового параметра $\tau \in [0; +\infty)_\mathbb{R}$, меру m^T_τ класса $\mathcal{M}_{\mathrm{Cyl}}(S_1, F_1; V)$ так, что в случае коммутативно-

[19]Она будет нужна для применения теоремы Чернова.

сти умножения в алгебре V отображение

$$m_{\bullet}^{T} = \{[0;+\infty)_{\mathbb{R}} \ni \tau \mapsto m_{\tau}^{T}\}$$

окажется полугруппой V-значных F_1-цилиндрических мер на S_1 .

Для построения пространства S_1 ещё фиксируем $T \in (0;\infty)_{\mathbb{R}}$, пусть $I_T = [0;T]_{\mathbb{R}}$ и $S_1 = S^{I_T} = \{f : [0;T]_{\mathbb{R}} \to S\}$.

Как и в случае множества F , множество F_1 не является векторным пространством, хотя и окажется, что оно содержит нулевой элемент (и это, как выше отмечалось, упростит некоторые формулировки). Именно, $F_1 \subset (S_1)^{\#}$ — это в точности все функционалы вида $F_1 \ni q \mapsto f(q(t))$ (обозначаемые записью $(f \circ \pi_t)$) при всевозможных $t \in [0;T]_{\mathbb{R}}$ и $f \in F$.

Далее $\mathbf{t}_T$ означает систему всех тех конечных подмножеств отрезка $I_T = [0;T]_{\mathbb{R}}$, которые включают концы этого отрезка. В каждом таком подмножестве $\mathbf{t} \in \mathbf{t}_T$ элементы считаем пронумерованными, начиная с нулевого индекса: $\mathbf{t} = \{t_0^{\mathbf{t}},\ t_1^{\mathbf{t}},\ \dots,\ t_{n_{\mathbf{t}}}^{\mathbf{t}}\}$, где $0 = t_0^{\mathbf{t}} < t_1^{\mathbf{t}} < \dots < t_{n_{\mathbf{t}}}^{\mathbf{t}} = T$, и $n_{\mathbf{t}}$ означает число отрезков, на которые разделен отрезок I_T точками из $\mathbf{t}$.

Пусть, для произвольного $\mathbf{t} \in \mathbf{t}_T$ линейное отображение $\pi_{\mathbf{t}} : S_1 \to S^{n_{\mathbf{t}}+1}$ определено формулой $\pi_{\mathbf{t}}(q) = (q(t_0^{\mathbf{t}}),\ \dots,\ q(t_{n_t}^{\mathbf{t}}))$.

Наконец, фиксируем произвольное значение $\tau \in [0;+\infty)_{\mathbb{R}}$ и построим F_1-цилиндрическую меру m_{τ}^{T} .

Пусть заданы мера $\mu_0 \in \mathcal{M}_{\mathrm{Cyl}}(S, S'; V)$, множество $\mathbf{t} \in \mathbf{t}_T$ и множества $A_j \in \alpha(S, F)$ для $j \in \{0,\ \dots,\ n_{\mathbf{t}}\}$. Тогда положим

$$m_{\mu_0,\tau,\mathbf{t}}(A_0 \times A_1 \times \dots \times A_{n_{\mathbf{t}}}) = \int\limits_{A_0} \mu_0(dx_0) \cdot \int\limits_{A_1} m_{\tau\cdot(t_1^{\mathbf{t}}-t_0^{\mathbf{t}})}(dx_1 - x_0) \times$$

$$\times \int\limits_{A_2} m_{\tau\cdot(t_2^{\mathbf{t}}-t_1^{\mathbf{t}})}(dx_2 - x_1) \cdot \int\limits_{A_3} m_{\tau\cdot(t_3^{\mathbf{t}}-t_2^{\mathbf{t}})}(dx_3 - x_2) \dots \int\limits_{A_{n_{\mathbf{t}}}} m_{\tau\cdot(t_{n_{\mathbf{t}}}^{\mathbf{t}}-t_{n_{\mathbf{t}}-1}^{\mathbf{t}})}(dx_{n_{\mathbf{t}}} - x_{n_{\mathbf{t}}-1}) \ .$$

При этом мера $m_{\mu_0,\tau,\mathbf{t}}$ аддитивна на полукольце $\alpha(S, F)^{\square(n_{\mathbf{t}}+1)}$ и продолжается до $J_{n+1}(F^{n+1})$-цилиндрической меры на $S^{n_{\mathbf{t}}+1}$, где для произвольного набора $(f_0, f_1, f_2, \dots, f_{n_{\mathbf{t}}}) \in (F)^{n_{\mathbf{t}}+1}$, функционал $J_{n+1}(f_0, f_1, f_2, \dots, f_{n_{\mathbf{t}}})$ действует по формуле $S^{n_{\mathbf{t}}+1} \to Q$, $\quad (x_0, x_1, \dots x_{n_{\mathbf{t}}}) \mapsto \sum\limits_{j=0}^{n_{\mathbf{t}}} f_j(x_j)$.Последняя цилиндрическая мера и есть искомая. Если исходная полугруппа — экспоненциальная, построенная мера называется обобщенной пуассоновской.

Во второй главе формулируются постановки задач для решаемых в ней дифференциальных уравнений типа теплопроводности относительно функций p-адического аргумента и основные результаты об интегральных представлениях решений этих задач и других свойствах этих решений.

Формулой Фейнмана[20] называется представление решения задачи Коши эволюционного уравнения в виде предела последовательности кратных интегралов, в которой эта кратность неограниченно растёт. Формулой Фейнмана в конфигурационном пространстве называется формула Фейнмана, в которой кратные интегралы берутся по декартовым степеням области определения начальной функции задачи (которая и называется конфигурационным пространством). Если конфигурационное пространство является векторным (соотв., многообразием), то соответствующим импульсным пространством называется сопряженное пространство (соотв., кокасательное к некоторой выбранной точке), и соответствующим фазовым пространством называется произведение конфигурационного пространства на двойственное к нему (соотв., кокасательное расслоение конфигурационного многообразия), и формулой Фейнмана в импульсном (фазовом) пространстве называется формула Фейнмана, в которой используются кратные интегралы по декартовым степеням этого импульсного (фазового) пространства. Формулами Фейнмана–Каца в конфигурационном (импульсном, фазовом) пространстве для той же задачи называется представление решения задачи с помощью интеграла по пространству траекторий (= отображений отрезка со значениями) в соответствующем пространстве (по счетноаддитивной мере или по псевдомере, например псевдомере Фейнмана).

Сам вид формул Фейнмана–Каца в конфигурационном пространстве в этой главе не отличается от известных, но теорема о них приведена для изложения нового эффективного полугруппового метода их получения.

[20]ср. О.Г. Смолянов, Н.Н.Шамаров: Формулы Фейнмана и Фейнмана-Каца для эволюционных уравнений с оператором Владимирова// ДАН, 2008, том 420, № 1, с. 4–6.

В этой главе оператор D^a (Владимирова) в $L_2 \equiv L_2(\mathbb{Q}_\mathfrak{p})$ (относительно меры Хаара $\lambda_\mathfrak{p}$, равной единице на замкнутом единичном шаре) с помощью взаимно-обратных унитарных операторов преобразования Фурье F^+ , F^- определяется как неограниченный самосопряженный оператор, подобный умножению на положительную степень (с показателем $a > 0$) нормы аргумента, то есть, $D^a = F^+ M^a_{L_2} F^-$, $F^+F^- = id_{L_2}$, где $M^a\varphi(x) = \|x\|^a\varphi(x)$ для всех $\varphi : Q \to \mathbb{C}$ и $x \in Q$, и $M^a_{L_2} = L_2 \cap (M^a)^{-1}(L_2)$, причем для $\varphi \in L_2 \cap L_1$ $(F^+\varphi)(x) = \int \chi_{\mathbb{Q}_\mathfrak{p}}(xy)\lambda_\mathfrak{p}(dy)$ и $(F^-\varphi)(x) = (F^+\varphi)(-x)$. Далее, $\mathfrak{p}$-адическим оператором (гамильтонианом) Шрёдингера будем далее называть оператор в пространстве L_2 с областью определения D_a , представляемый в виде суммы $D^a + (g\cdot)$ для некоторой ограниченной борелевской функции $g : \mathbb{Q}_\mathfrak{p} \to \mathbb{C}$ (называемой иногда потенциалом) , и обозначаемый в этой главе $\widehat{H}$ или более подробно $\widehat{H_{a,g}}$. Функцию

$$H_{a,g} : \mathbb{Q}_\mathfrak{p} \times \mathbb{Q}_\mathfrak{p} \ni (x, y) \mapsto |y|^a_\mathfrak{p} + g(x) \in \mathbb{C}$$

будем называть символом (или функцией Гамильтона) оператора $\widehat{H}_{a,g}$.

Для полугруппы, генерируемой в L_2 оператором $(-\widehat{H_{a,g}})$, доказывается новым способом следующее известное описание. Если $\Psi_0 \in L_2$, то для каждого $t > 0$ существует (конечно, единственный) непрерывный представитель $[\Psi_t] = \psi_t$ класса $\Psi_t \equiv e^{-t\cdot H_{a,g}}\Psi_0$ $(\in L_2)$, причем для каждого $x \in Q$ справедлива следующая формула Фейнмана–Каца, обозначения которой описаны ниже:

$$[\Psi_t](x) = \int_{C_1(I)\ni\xi} e^{\int_0^t g(x-\xi(s))\,ds} \cdot \psi_0(x - \xi(t)) \cdot M_I(d\,\xi)\ . \qquad (2.22)$$

Здесь $I = [0; t]_\mathbb{R}$, $C_1(I) \equiv C_1(I; Q)$ — пространство всех отображений $I \to Q$ без разрывов второго рода и непрерывных справа, M_I — та единственная счетно аддитивная мера на σ-алгебре, порожденной всеми функционалами вычисления $\pi_t : C_1(I) \ni f \mapsto f(t) \in Q$, для которой, каково бы ни было $n \in \mathbb{N}$, образ в Q^n при всяком отображении вида $C_1(I) \ni f \mapsto (f(t_1), ..., f(t_n)) \in Q^n$ $(0 \equiv t_0 < t_1 < ... < t_n \leqslant t)$ имеет плотность

$$\prod_{j=1}^n F_{t_j - t_{j-1}}(x_j - x_{j-1})$$

относительно меры (Хаара) $\lambda_{\mathfrak{p}}^{\otimes n}(dx_1, ..., dx_n)$, где, в свою очередь, для всех $x \in \mathbb{Q}_{\mathfrak{p}}$ и вещественных $s > 0$

$$F_s(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (e^{-s \cdot \mathfrak{p}^{k \cdot a}} - e^{-s \cdot \mathfrak{p}^{(k+1) \cdot a}}) \cdot \mathfrak{p}^k \cdot \Omega(\mathfrak{p}^{-k} \cdot x) \ .$$

Решение (“неклассическое”, класса L_2 по переменной, пробегающей Q) задачи Коши эволюционного уравнения

$$\text{(э.у.)} \quad \frac{d}{dt}\Psi(t) = -\widehat{H_{a,g}}(\Psi(t)), \ \ t > 0$$

с начальным данным

$$\text{(н.д.)} \qquad\qquad \Psi(0) = \Psi_0 \in L_2(Q)$$

определяется как непрерывная функция $\Psi : [0; +\infty)_{\mathbb{R}} \to L_2$ дифференцируемая всюду кроме, быть может, нуля по норме L_2 и удовлетворяющая соотношениям (э.у.) и (н.д.); соответствующая задача Коши обозначается

$$CP(L_2, \psi_0, -\widehat{H}) \ .$$

Доказывается, что для каждого $\Psi_0 \in L_2(Q)$ существует единственное решение Ψ, причем для каждого $t > 0$

$$\Psi(t) = \Psi_t \equiv e^{-t \cdot H_{a,g}} \ \Psi_0$$

и, таким образом, это решение определяется приведенным выше функциональным интегралом.

В этих обозначениях, о перечисленных фактах в качестве одной из основных в этой главе сформулирована и доказана теорема 2.2:

Теорема 2.2 (о формуле Фейнмана–Каца в конфигурационном пространстве). *Для произвольного $\psi_0 \in L_2$ существует непрерывный представитель $[\Psi_t] \in \Psi_t = e^{-t \cdot \widehat{H}}\psi_0$ такой, что при каждом $x \in \mathbb{Q}_{\mathfrak{p}}$ выполнено равенство (2.22) .*

Далее, заменяя риманов интеграл в показателе экспоненты аппроксимирующими его суммами Римана, получаем и поточечную, и L_2-аппроксимацию решения явными конечнократными интегралами, т.е., формулы Фейнмана, полученные в следующей теореме.

Теорема 2.3 (о формулах Фейнмана). *Для произвольного* $\psi_0 \in L_2$ *для решения* $\Psi : t \mapsto e^{-t\cdot\widehat{H}}\psi_0$ *задачи Коши* $CP(L_2, \psi_0, -\widehat{H})$ *при каждом вещественном* $t > 0$ *в равенствах*

$$\Psi(t) = \lim_{\mathbb{N}\ni n\to\infty} \left(e^{-\frac{t}{n}\cdot D^a} \circ (e^{(-\frac{t}{n}\cdot g)} \ \cdot\ )\right)^n \psi_0 = \lim_{\mathbb{N}\ni n\to\infty} \left((e^{(-\frac{t}{n}\cdot g)} \ \cdot\ ) \circ e^{-\frac{t}{n}\cdot D^a}\right)^n \psi_0\ ,$$

пределы можно понимать не только как в пространстве L_2 *, но и — для непрерывных представителей как допредельных, так и предельного элементов из* L_2 *, — как поточечный. При этом непрерывный представитель* $\psi_t \in \Psi(t)$ *предельного выражения выражается формулой* (2.22)*, непрерывный представитель первого допредельного выражения — формулой*

$$x \mapsto \int\limits_{(\mathbb{Q}_\mathfrak{p})^n} e^{-\sum\limits_{j=1}^{n} g(x-x_j)\cdot\frac{t}{n}} \cdot \psi_0(x - x_n) \cdot m_{t,n}(d\mathbf{x}) \ = \tag{2.23}$$

$$= \int\limits_{(\mathbb{Q}_\mathfrak{p})^n} \left(\prod_{j=1}^{n} F_{t/n}(x_j - x_{j-1})\right) \cdot e^{-\sum\limits_{j=1}^{n} g(x-x_j)\cdot\frac{t}{n}} \cdot \psi_0(x - x_n)\, d\mathbf{x}$$

$(x_0 = 0)$*, второго — формулой (снова с* $x_0 = 0$ *)*

$$x \mapsto \int\limits_{(\mathbb{Q}_\mathfrak{p})^n} d\mathbf{y} \ \cdot\ \Big(e^{-\frac{t}{n}\cdot g(x)} \cdot F_{t/n}(x - x_1) \ \cdot e^{-\frac{t}{n}\cdot g(x_1)} \cdot F_{t/n}(x_1 - x_2) \cdots$$

$$\cdots \quad e^{-\frac{t}{n}\cdot g(x_{n-1})} \cdot F_{t/n}(x_{n-1} - x_n) \cdot \psi_0(x_n)\Big) =$$

$$= \int\limits_{(\mathbb{Q}_\mathfrak{p})^n} \left(\prod_{j=1}^{n} F_{t/n}(x_j - x_{j-1})\right) \cdot e^{-\sum\limits_{j=0}^{n-1} g(x-x_j)\cdot\frac{t}{n}} \cdot \psi_0(x - x_n)\, d\mathbf{x}\ .$$

Представленный метод получения этих формул Фейнмана–Каца и Фейнмана непосредственно обобщается на случай матрично-значного потенциала g с некоммутирующими значениями (с векторной искомой функцией Ψ) и, с естественными ограничениями, — на случай полных нормированных алгебр; единственное отличие от коммутативного случая состоит в том, что подынтегральную экспоненту (от непрерывной справа функции) нужно будет считать хронологической (в смысле мультипликативного интеграла Римана).

Описанное решение в том случае, когда ψ_0 является преобразованием Фурье некоторого элемента из $\varphi \in L_1 \cap L_2$, и функция g является преобразованием Фурье некоторой борелевской меры ν на $P = Q \cong Q^{\#}$, допускает равномерную аппроксимацию теми же формулами Фейнмана, связанными с L_1-аппроксимацией преобразования Фурье решения формулами Фейнмана в импульсном пространстве P . Эти формулы Фейнмана в импульсном пространстве, в свою очередь, аппроксимируют функциональный интеграл по счетно аддитивной мере, называемой обобщенной пуассоновской, что приводит к формуле Фейнмана–Каца в импульсном пространстве и к новому представлению исходного решения. Именно, пусть $CR(I,P)$ — подпространство в $C_1(I,P)$, состоящее из непрерывных справа отображений отрезка $[0;t]$ в $\mathbb{Q}_{\mathfrak{p}}$, обладающих конечным числом точек разрыва и постоянных на интервалах между соседними точками множества, образованного добавлением концов отрезка к множеству точек разрыва. Пусть ещё в алгоритме порождения новой меры сверточной полугруппой из первой главы $S=Q$, $\tau=1$, роль T играет фиксированное $t>0$ и роль сверточной полугруппы — экспоненциальная $\{\nu^s\equiv e^{*(-s\nu)}:s\geqslant 0\}$, и пусть $\mathbf{M}^t_\nu$ — лебегово продолжение счетно аддитивного цилиндрического следа соответствующей перечисленным данным новой меры в пространстве $CR(I,P)$; полагаем ещё $g^a(y)=\|y\|^a \quad (y\in P)$.

Теорема 2.8. (о формулах Фейнмана–Каца в импульсном пространстве). *Для преобразования Фурье $\varphi_t=\mathcal{F}_2\Psi_t\in L_2$ в случаях, когда φ_0 существенно ограничен, для $\lambda_{\mathfrak{p}}$-почти всех $x\in Q$ в равенствах*

$$[\varphi_t](x)=\int_{CR(I,P)\ni\eta} e^{-\int_0^t g^a(x-\eta(s))\,ds}\cdot[\varphi_0](x-\eta(t))\cdot\mathbf{M}^t_\nu(d\,\eta)$$

($[\varphi_0]$ означает некоторый борелевский представитель класса $\varphi_0\in L_2$) правая часть определена и совпадает с некоторым представителем $[\varphi_t]$ класса $\varphi_t\in L_2$. Кроме того, такие равенства справедливы для всех $x\in Q$, если $\varphi_0\in L_2\cap L_1$.

В качестве простого следствия этой теоремы доказывается, что если $\varphi_0\in L_1$, то, во-первых, для каждого $p\in P$ справедливы явные формулы Фейнмана–Каца вида

$$[\Phi_t](p)=\lim_{k\to\infty}\int_{P^{n_k}\ni\mathbf{u}=(u_1,\dots,u_{n_k})}(\nu^{\frac{t}{n_k}})^{\otimes n_k}(d\mathbf{u})\;e^{-\sum\limits_{\ell=1}^{n_k} g^a_P(p-\sum\limits_{j=1}^{\ell}u_j)\cdot\frac{t}{n_k}}\cdot\varphi_0(p-\sum_{j=1}^{n_k}u_j)\;, \quad (2.24)$$

и

$$[\Phi_t](p)=\lim_{k\to\infty}\int\limits_{P^{n_k}\ni\mathbf{u}=(u_1,\dots,u_{n_k})}(\nu^{\frac{t}{n_k}})^{\otimes n_k}(d\mathbf{u})\ e^{-\sum\limits_{\ell=0}^{n_k-1}g_P^a(p-\sum\limits_{j=0}^{\ell}u_j)\cdot\frac{t}{n_k}}\cdot\varphi_0(p-\sum_{j=1}^{n_k}u_j)\ ,\quad (2.25),$$

в которых можно взять просто $n_k=k$, и эта сходимость к $[\Phi_t]$ одновременно имеет место в L_1 и, во-вторых, что аппроксимация в теореме 2.2 является равномерной. Ранее такие результаты доказывались чрезвычайно громоздкой техникой рядов типа Дайсона [21].

На случай матрично-значной меры ν последние формулы Фейнмана и Фейнмана–Каца обобщаются непосредственно.

Наконец, в том же случае с $g=\widetilde{\nu}$ и $\psi_0\in L_2\cap L_1$ существуют еще два представления того же решения — функциональными интегралами по траекториям в фазовом пространстве, — одно из них содержит счетно аддитивную меру интегрирования, другое — симплектическую меру типа Фейнмана.

Именно, пусть $x\in\mathbb{Q}_\mathfrak{p}$, функции $f:\mathbb{Q}_\mathfrak{p}\times\mathbb{Q}_\mathfrak{p}\to\mathbb{C}$ и $h:\mathbb{Q}_\mathfrak{p}\to\mathbb{C}$ борелевские, $t>0$ и для каждого $n=1,2,...$ существуют повторные интегралы, в каждом из которых $q_n=x$ и интегрирование ведется по указанным дифференциалам справа налево:

$$\int\!\!..\!\!\int e^{2i\pi\{\sum\limits_{k=1}^{n}(q_k-q_{k-1})p_k\}_\mathfrak{p}}e^{\sum_{k=1}^{n}f(q_k,p_k)\cdot\frac{t}{n}}\ h(q_0)\ dp_n\,dq_{n-1}\,dp_{n-1}\,dq_{n-2}...dp_2\,dq_1\,dp_1\,dq_0.$$

Если существует предел этих чисел при $n\to\infty$, он называется гамильтоновым интегралом Фейнмана по траекториям $[0;t]\ni\tau\mapsto\binom{q(\tau)}{p(\tau)}\in\mathbb{Q}_\mathfrak{p}{}^2$ в “фазовом” пространстве $Q\times P$ (по пространству фазовых траекторий), таким, что $q(t)=x$, от функционала

$$F\begin{pmatrix}q(\cdot)\\ p(\cdot)\end{pmatrix}=h(q(0))\cdot e^{2i\pi\int_0^t\{p(\tau)dq(\tau)\}_\mathfrak{p}}\cdot e^{\int_0^t f(q(\tau),p(\tau))d\tau}$$

и обозначается

$$\int\limits_{\{\binom{q(\cdot)}{p(\cdot)};\ q(t)=x\}}F\begin{pmatrix}q(\cdot)\\ p(\cdot)\end{pmatrix}\prod_{\tau\in[0;t]}d(p(\tau))d(q(\tau)).$$

[21]см., напр., *Смолянов О.Г., Шавгулидзе Е.Т.*: Континуальные интегралы.// Москва, Издательство МГУ, 1990.

Теорема 2.8 (о формула Фейнмана–Каца с гамильтоновым интегралом Фейнмана по траекториям в фазовом пространстве.) *Для каждого* $\psi_0 \in L_2 \cap L_1$ *справедливо равенство непрерывных по совокупности аргументов* $t > 0$ *и* $x \in \mathbb{Q}_\mathfrak{p}$ *функций*

$$\psi(t,x) = \int\limits_{\{\binom{q(\cdot)}{p(\cdot)};\ q(t)=x\}} e^{2i\pi \int_0^t \{p(\tau)dq(\tau)\}_\mathfrak{p}} e^{-\int_0^t H_{a,g}(q(\tau),p(\tau))d\tau} \psi_0(q(0)) \prod_{\tau\in[0;t]} d(p(\tau))d(q(\tau)). \quad (2.27)$$

Для доказательства используется соответствующая формула Фейнмана в фазовом пространстве, приводимая в следующем предложении.

Предложение 2.7.1. *При каждом н.у.* $\psi_0 \in L_2 \cap L_1(Haar)$ *и каждом* $t > 0$ *к непрерывному представителю* $[\Psi(t)] = \psi(t,\cdot)$ *элемента* $\Psi(t)$ *поточечно сходится при* $n \to \infty$ *последовательность непрерывных функций, являющихся представителями классов* $\left(\widehat{e^{-\frac{t}{n}\cdot H_{a,g}}}\right)^n \psi_0 \in L_2$ *, и принимающих во всякой точке* $x \in \mathbb{Q}_\mathfrak{p}$ *значение, равное повторному интегралу (в котором* $Haar(dq_0)$ *заменено на* dq_0 *и т.д.):*

$\int dp_n\ \chi_{\mathbb{Q}_\mathfrak{p}}(p_n \cdot x) e^{-(\widetilde{\nu}(x)+g^a(p_n))t/n} \int dq_{n-1}\ \chi_{\mathbb{Q}_\mathfrak{p}}(-p_n q_{n-1})\times$

$\dots$

$\times \int dp_3\ \chi_{\mathbb{Q}_\mathfrak{p}}(p_3 q_3) e^{-(\widetilde{\nu}(q_3)+f^a(p_3))t/n} \int dq_2\ \chi_{\mathbb{Q}_\mathfrak{p}}(-p_3 q_2)\times$

$\times \int dp_2\ \chi_{\mathbb{Q}_\mathfrak{p}}(p_2 q_2) e^{(\widetilde{\nu}(q_2)-g^a(p_2))t/n} \int dq_1\ \chi_{\mathbb{Q}_\mathfrak{p}}(-p_2 q_1)\times$

$\times \int dp_1\ \chi_{\mathbb{Q}_\mathfrak{p}}(p_1 q_1) e^{-(\widetilde{\nu}(q_1)+g^a(p_1))t/n} \int dq_0\ \chi_{\mathbb{Q}_\mathfrak{p}}(-p_1 q_0)\psi_0(q_0).$

Другими словами, полагая при каждом n *под знаком суммирования* $q_n \equiv x$ *и понимая каждый интеграл как повторный, в котором интегрирование ведется по указанным дифференциалам справа налево (всякий раз от суммируемой функции), получаем равенство*

$$\psi(t,x) = \lim_{n\to\infty} \int \cdots \int dp_n dq_{n-1} dp_{n-1} dq_{n-2} ... dp_2 dq_1 dp_1 dq_0 \times$$
$$\times e^{2i\pi \{\sum_{k=1}^n (q_k - q_{k-1})p_k\}_\mathfrak{p}} \cdot e^{-\sum_{k=1}^n (\widetilde{\nu}(q_k)-g^a(p_k))t/n} \cdot \psi_0(q_0) \quad (2.26)$$

Отметим также, что функция $(p(\cdot), q(\cdot)) \mapsto \exp(2i\pi \int_0^t \{p(\tau)dq(\tau)\}_\mathfrak{p})$ играет роль обобщенной плотности “симплектической меры Фейнмана”.

Значительная часть этих рассуждений инвариантна относительно выбора поля Q вида $\mathbb{Q}_\mathfrak{p}$ ($\mathfrak{p} \in \bar{\mathbb{P}}$) и оказалась имеющей эвристическую ценность даже в вещественном случае. Именно так получающаяся формула Фейнмана–Каца в фазовом пространстве для классического уравнения теплопроводности привела к серии работ о таких представлениях для уравнений, управляющих более сложными диффузиями, когда деформация меры Винера делает работу с ней привычным способом неудобной. Метод оказался применим также и для полугрупп, порождаемых более общими феллеровскими процессами.

Наконец, справедлива и следующая формула со счетно аддитивной мерой на пространстве фазовых траекторий. Для её вывода надо учесть, что подынтегральная экспонента в формуле Фейнмана–Каца в конфигурационном пространстве представляет преобразование Фурье некоторой счетно аддитивной меры в импульсном пространстве, абсолютно непрерывной относительно построенной выше меры $\mathbf{M}_\nu^t$.

Теорема 2.9 *Для произвольных* $[\psi_0] \in \psi \in L_2$ *и* $t > 0$ *существует непрерывный представитель* $[\Psi_t] \in \Psi_t = G^t\psi_0$ *такой, что при каждом* $x \in \mathbb{Q}_\mathfrak{p}$ *выполнено равенство*

$$[\Psi_t](x) = \int\limits_{X\times Y\ni(\xi,\eta)} \chi_{\mathbb{Q}_\mathfrak{p}}(b_\mathfrak{p}(x-\xi,\eta)) \cdot [\psi_0](x-\xi(t)) \cdot M^t{\times}\mathbf{M}_\nu^t\ (d(\xi,\eta))\ ,$$

где $b_\mathfrak{p}(\xi,\eta)$ при $\xi \in X = C_1(I,Q)$ и $\eta \in Y = CR(I,P)$ определяется равенством $b_\mathfrak{p}(\xi,\eta) = \sum\limits_{s\in D_\eta} \xi(s)\cdot\Delta_\eta(s)$, в котором D_η — множество всех точек разрыва функции η и в каждой такой точке $\Delta_\eta(s) = \eta(s) - \eta(s-0)$.

Третья глава посвящена уравнениям типа Шредингера относительно функций p-адического аргумента: основными результатами являются представление решений с помощью интеграла по траекториям в конфигурационном и импульсном пространстве. Формулы Фейнмана–Каца в конфигурационном пространстве содержат обобщение классической (обобщенной) меры Фейнмана, тогда как соответствующие формулы в импульсном пространстве содержат обобщение комплексной меры Пуассона–Маслова–Чеботарева.

Относительно постановок задач Коши для уравнения

$$i\partial u(t,x)/\partial t = (-D^a - M_{\tilde{\nu}})u(t,x) \qquad (Schr)$$

с искомой функцией $u : [0,\infty) \times \mathbb{Q}_{\mathfrak{p}} \to \mathbb{C}$ отметим, что оператор D^a не является в собственном смысле дифференциальным (в силу его нелокальности), как интегральный он обладает лишь обобщенным ядром (и в частности, как оператор в L_2 он неограничен при любом $\alpha > 0$). Далее мы будем понимать равенство $(Schr)$ при каждом $t > 0$ как равенство элементов пространства L_2 , и используем тот факт, что оператор $i(D^a + M_{\widetilde{\nu}})$ имеет вид суммы антисамосопряженного и ограниченного, и потому [22] является генератором сильно непрерывной однопараметрической полугруппы $G = \{G(t) = G^t\}_{t\geqslant 0}$, обозначаемой далее $\{G^t\}_{t\geqslant 0}$, ограниченных всюду определенных линейных операторов в L_2 .

Решением уравнения $(Schr)$, отвечающим начальному условию (н.у.)

$$u(0,\cdot) = \psi_0 \in D_a \ , \tag{3_0}$$

будем называть непрерывную функцию Ψ аргумента t, определенную на неотрицательной вещественной полуоси $t \geqslant 0$, принимающую значения в нормированном подпространстве $D_a \subset L_2$ и определяемую при каждом $t \geqslant 0$ равенством

$$\Psi(t) = G^t \, \psi_0 \ , \tag{4}$$

где $\{G^t\}_{t\geqslant 0}$ — описанная выше полугруппа с генератором $i(D^a + (\widetilde{\nu}\cdot))$. Для краткости вместо $\Psi(t)$ будем писать Ψ_t . Задачу найти описанное решение по уравнению $(Schr)$ с н.у. $\psi_0 \in D_a$ будем называть задачей (Коши) $(3, 3_0)$.

Теорема 3.2 (о формуле Фейнмана–Каца в импульсном пространстве). *Для преобразования Фурье $\varphi_t = \mathcal{F}_2\Psi_t$ L_2-решения задачи $(3, 3_0)$ при $\psi_0 \in L_2 \cap L_1$ справедливы для $\lambda_{\mathfrak{p}}$-почти всех x равенства*

$$[\varphi_t](x) = \int_{Y\ni\eta} e^{\int_0^t ig^a(x-\eta(s))\,d\,s} \cdot [\varphi_0](x-\eta(t)) \cdot \mathbf{M}^t_{-i\nu}(d\,\eta) \ . \tag{10}$$

Теорема 3.4 *Решение задачи Коши $(3, 3_0)$ с начальным данным $\psi_0 = F(\varphi_0)$ класса $\mathcal{S}_{\mathfrak{p}}$, представленное преобразованием Фурье элемента $\varphi \in \mathcal{S}_{\mathfrak{p}}$ может быть задано при каждом $t > 0$ в виде такого элемента $\Psi(t) \in$*

[22] *Engel K.-J., Nagel R.:* One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations.// Springer-Verlag, N.Y., 2000.

L_2 , преобразование Фурье которого $F(\Psi(t))$ представлено, в свою очередь, ограниченной непрерывной функцией $\varphi_t : Q_p \to \mathbf{C}$, определенной при каждом $x \in Q_p$ равенством

$$\varphi_t(x) = \int_{C_1(I)} K(x,\xi)\ \Phi_a^t(d\xi)$$

где квазимера типа Фейнмана Φ_a^t имеет преобразование Фурье вида $\eta \mapsto e^{i\int_0^t \|\eta(s)\|^a ds}$, и $K(x,\cdot)$ является $(C_1(I),\bar{G})$-преобразованием Фурье счетно аддитивной меры на $CR(I,P)$ имеющей плотность $\eta \mapsto \varphi_0(\eta(0))$ относительно счетно аддитивной меры заданной формулой $A \mapsto \mathbf{M}^t_{-i\nu}((x\cdot\mathbf{1})-A)$.

По-видимому, определенная в данной теореме с помощью преобразования Фурье квазимера типа Фейнмана связана с классической секвенциальной, как в вещественном аналоге данной теоремы[23], и прояснение этой связи было бы полезным для теории интеграла Фейнмана.

В четвертой главе с помощью интеграла по траекториям в вещественном импульсном пространстве представлено решение классического уравнения Дирака.

Уравнение Дирака для релятивистского электрона — это уравнение

$$\left[p_0 + \frac{e}{c}A_0 + \sum_{j=1}^{3} a_j(p_j + \frac{e}{c}A_j) + a_4 mc\right]\psi = 0 \quad ,$$

где $\psi : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}^4$ — искомая функция переменных $t \in \mathbb{R}$ и $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $a_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$$a_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, a_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$A_j : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$ $(j = 0,...,3)$ — вещественные компоненты электромагнитного 4-потенциала, зависящие, вообще говоря, как от переменной (времени) $t \in \mathbb{R}$,

[23] *Смолянов О.Г., Шавгулидзе Е.Т.*: Континуальные интегралы.// Москва, Издательство МГУ, 1990.

так и от (пространственных) переменных x_1, x_2, x_3 ; $p_0 = -i\partial/\partial t \equiv -i\partial_0$, $p_j = -i\partial/\partial x_j = -i\partial_j$, $j = 1,2,3$; заряд электрона e, его масса m и скорость света c — константы. Можем считать, без ограничения общности, что $e = c = 1$ (либо что эта дробь $\frac{e}{c}$ включена в соответствующие компоненты потенциала), и последний коэффициент mc обозначается далее m . Тогда уравнение принимает вид $\left[p_0 + A_0 + \sum_{j=1}^{3} a_j(p_j + A_j) + m\, a_4\right]\psi = 0$, или, после выделения производной по времени и отделения дифференциального полинома от умножения на матрично-значную функцию,

$$\partial_t\psi = -i\left[m\, a_4 + \sum_{j=1}^{3} a_j p_j\right]\psi + (-i)\left[A_0 + \sum_{j=1}^{3} a_j A_j\right]\psi \quad .$$

Первая скобка задаёт некоторый самосопряжённый оператор H_0 (это вытекает из перестановочности пар самосопряжённых множителей, участвующих в каждом из четырех её слагаемых), вторая — оператор умножения на матрично-значную функцию $V = -i(A_0 + \sum_{j=1}^{3} a_j A_j)$, и при надлежащем выборе потенциалов A_j $(j = 0,1,2,3)$ — то есть при независимости их от времени и свойстве быть преобразованиями Фурье числовых либо $\mathbb{A}$-значных счётно-аддитивных борелевских мер на $\mathbb{R}^d$ — мы приходим к классическому двучленному уравнению $\Psi'(t) = -i(H_0 + V)\Psi(t)$. Далее предполагается, что $-iV = \widetilde{\nu}$ для некоторой матричнозначной счетноаддитивной борелевской меры ν на $\mathbb{R}^4$. Далее для каждого $t > 0$ строится такая матричнозначная счетноаддитивная мера M_t на пространстве $CR = CR[0;t]$ кусочно-постоянных траекторий в $\mathbb{R}^4$, для которой справедлива следующая теорема.

Теорема 4.2. *Преобразование Фурье Φ_t решения $\Psi(t)$ $(t > 0)$ уравнения Дирака с непрерывным начальным данным $\Psi_0 \in L_2 \cap L_1$ таким, что и $\Phi_0 \in L_2 \cap L_1$, имеет вид $\Phi_t(\mathbf{x}) = \int_{CR} M_t(d\eta)[\Phi_0](x - \eta(t))$, где $[\Phi_0] \in \Phi_0$ — непрерывный представитель.*

При этом мера M_t символически может быть записана в виде $M_t(d\eta) = e^{i\int_0^t P(\eta(s))ds} \cdot_T \mathbf{M}_\nu^t(d\eta)$, где интеграл — риманов, мера $\mathbf{M}_\nu^t$ пуассоновская, а символом $\cdot_T$ обозначено хронологическое (упорядоченное) по отрезку $[0;t]$ (времени) умножение. Версия формулы Чернова с неравномерными разбиениями отрезка времени является дополнительной мотивировкой этого обозначения.

В **добавлениях** приведены формулы Фейнмана–Каца в бесконечномерном $\mathfrak{p}$-адическом конфигурационном пространстве, функциональный интеграл для для решения задачи Неймана, а также фиксируются обозначения и собрана воедино используемая специальная терминология и вспомогательные факты из теории полугрупп.

Автор благодарен участникам всех обсуждений результатов диссертации за их стимулирующий интерес. Автор также пользуется случаем выразить особую благодарность научному консультанту доктору физико–математических наук профессору Евгению Тенгизовичу Шавгулидзе, руководителю семинара по бесконечномерному анализу доктору физико–математических наук профессору Олегу Георгиевичу Смолянову и сотрудникам кафедры математического анализа за творческую атмосферу и постоянную поддержку в работе.

Список публикаций автора по теме диссертации

Работы 1–14 опубликованы в журналах из официального перечня ВАК.

[1] N.N. Shamarov: Explicit Formulas for Fourier Transforms of Distributions of some Markov Processes.// Russian Journal of Mathematical Physics. vol. 8, No. 4, 2001, pp. 493–494.

[2] N.N. Shamarov: Matrix-Valued Cylindrical Measures of Markov Type and their Fourier Transforms // Russian Journal of Mathematical Physics, 2003, vol.10, No 3, p. 1–16

[3] Н.Н. Шамаров: Преобразование Фурье распределений однородных случайных полей с независимыми приращениями и комплексные цепи Маркова–Маслова// Матем. заметки, 2004, V.75. No.2. c. 275–281.

[4] N.N. Shamarov: Poisson–Maslov types formulas for Schroedinger equations with matrix valued potentials// Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics, vol.10, No 4, Dec.2007, 641–650.

[5] Н.Н. Шамаров: Полиномиальные замены антикоммутирующих переменных в функциональном суперанализе// Вестник Московского университета. Серия 1. Математика, Механика. 2006, № 4, 3–8.

[6] Н.Н. Шамаров: Некоторые формулы исчисления дифференциальных форм конечной костепени на локально–выпуклом пространстве.// — Вестник МГУ, сер. математика, механика, 1996, № 2, с 26–33.

[7] Н.Н. Шамаров: Вероятностное решение задачи Неймана для уравнения Пуассона в области гильбертова пространства// — Вестник МГУ, сер. математика, механика, 1996, № 4, с. 102–106.

[8] О.Г. Смолянов, Н.Н. Шамаров: Представления функциональными интегралами решений уравнения теплопроводности с оператором Владимирова// Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. 2008. № 4. С. 16–22.

[9] О.Г. Смолянов, Н.Н. Шамаров: Формулы Фейнмана и Фейнмана-Каца для эволюционных уравнений с оператором Владимирова// ДАН, 2008, том 420, № 1, с. 4–6.

[10] О.Г. Смолянов, Н.Н. Шамаров: Представление решений эволюционных уравнений с оператором Владимирова интегралами Фейнмана по траекториям// Докл. РАН. 2009. Т.425. № 4. 600–604.

[11] О.Г. Смолянов, Н.Н. Шамаров: Гамильтоновы интегралы Фейнмана для уравнений с оператором Владимирова// Докл. РАН. 2010. Т.431. № 2. С. 170–174.

[12] О.Г. Смолянов, Н.Н. Шамаров: Формулы Фейнмана и интегралы по траекториям для эволюционных уравнений с оператором Владимирова Труды Математического института им. В.А. Стеклова РАН. 2009. Т. 265. С. 229-240.//

[13] Н.Н. Шамаров: Мера Пуассона–Маслова и формулы Фейнмана для решения уравнения Дирака// Фундаментальная и прикладная математика, 2006, т. 12, вып. 6, 193–211.

[14] Н.Н. Шамаров: Функциональный интеграл по счетно-аддитивной мере, представляющий решение уравнения Дирака// Труды Московского Математического Общества, 2005, т.66., с. 263–276.

[15] O.G.Smolyanov, N.N. Shamarov: Feynman path integrals over p-adic vector space// AIP Conf. Proc. – March 24, 2009 – Volume 1106, pp. 286-297 MATHEMATICAL MODELING OF WAVE PHENOMENA: 3rd Conference on Mathematical Modeling of Wave Phenomena, 20th Nordic Conference on Radio Science and Communications;
doi:10.1063/1.3117106 .

[16] Н.Н. Шамаров: Применения нестандартных числовых систем в математической физике.// "Итоги науки и техники" ВИНИТИ, сер. "Современные проблемы математики и ее приложения", тематические обзоры, том посвященный памяти В.В.Трофимова, 2007 Том 23, 182—194.

[17] Н.Н. Шамаров: Преобразование Фурье распределений некоммутативных процессов типа Маркова–Маслова// — Труды конференции молодых ученых МГУ - 2003, с.89–91.

[18] Н.Н. Шамаров: О восстановлении гладкой плотности одной меры относительно другой гладкой меры на бесконечномерном пространстве по их обобщенным плотностям// — Труды конференции молодых ученых МГУ - 1996, с.46–49.

Из совместных работ в диссертацию включены только результаты автора.