МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 517.938, 517.97

Плахов Александр Юрьевич

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ НЬЮТОНОВСКОЙ АЭРОДИНАМИКИ

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ
01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва
2010

Работа выполнена на кафедре общих проблем управления механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук,
член-корреспондент РАН,
профессор Трещев Дмитрий Валерьевич;

доктор физико-математических наук,
профессор Арутюнов Арам Владимирович;

доктор физико-математических наук,
профессор Левин Владимир Львович.

Ведущая организация:
Владимирский государственный университет
им. А. Г. и Н. Г. Столетовых.

Защита состоится 10 июня 2011 г. в 16 час. 40 мин. на заседании диссертационного совета Д 501.001.85 при Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Ленинские горы, МГУ имени М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, ауд. 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ (14 этаж).

Автореферат разослан 28 апреля 2011 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д 501.001.85 при МГУ
доктор физико-математических наук
профессор В. Н. Сорокин

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Диссертация посвящена изучению задач о наименьшем аэродинамическом сопротивлении, о биллиардном рассеянии на препятствии и связанной с ними задачи Монжа-Канторовича.

Актуальность темы. Задача о наименьшем сопротивлении была впервые поставлена Ньютоном в его книге "Principia". Рассматривалось тело, движущееся в разреженной среде неподвижных точечных частиц, в предположении, что частицы не взаимодействуют между собой, а при столкновении с поверхностью тела отражаются от нее абсолютно упруго. Ньютон рассмотрел задачу о нахождении формы тела, при которой сила сопротивления движению тела в среде минимальна, в классе выпуклых тел фиксированной длины и ширины, обладающих вращательной симметрией относительно оси, параллельной направлению движения.

Эта задача сводится к минимизации функционала

$$\int_0^1 \frac{r}{1+\varphi'^2(r)}\,dr \tag{1}$$

в классе выпуклых неубывающих функций $\varphi : [0,\, 1] \to [0,\, h]$. Здесь график функции $z = -\varphi(\sqrt{x^2+y^2})$ определяет верхнюю часть границы тела в подходящей системе координат (в которой движение происходит вверх вдоль оси Oz), а h обозначает высоту тела. Ньютон описывает тело наименьшего сопротивления, но не дает никаких указаний на то, каким образом оно найдено. В настоящее время принято считать, что эта задача послужила одним из истоков вариационного исчисления и даже оптимального управления[1].

Впоследствии математики неоднократно обращались к задаче Ньютона и ее модификациям. Как правило, модификации заключались в том, что задача минимизации функционала (1) рассматривалась в классах функций, отличных от ньютоновского. Так, в работе Лежандра[2] задача минимизации (1) рассматривалась при условии, что длина графика функции f (а не ее амплитуда h) постоянна.

В 1993 г. начался новый этап в изучении этой задачи. Была поставлена задача о минимизации сопротивления в классе выпуклых (не обязательно осесимметричных) тел, вписанных в заданных прямой круговой цилиндр (скажем, радиуса 1 и высоты h)[3]. Она сводится к минимизации функционала

$$\iint_\Omega \frac{1}{1+|\nabla f(x,y)|^2}\,dx\,dy \tag{2}$$

[1]Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление. – 2-е изд. – М., Физматлит, 2005.

[2]Legendre, A. M. *Mémoire sur la Manière de distinguer le Maxima et les Minima dans les Calcul des Variations.* Mémoires de L'Académie royale des Sciences, Année MDCCLXXVI (Paris 1788), pp. 7-37.

[3]G. Buttazzo and B. Kawohl. *On Newton's problem of minimal resistance.* Math. Intell. **15**, 7-12 (1993).

в классе выпуклых функций $f : \Omega \to [0, h]$, где Ω — единичный круг. Таким образом, от одномерной вариационной задачи перешли к (намного более трудной) задаче в двух измерениях. Она до сих пор не решена полностью; тем не менее в статьях[4] был получен ряд важных результатов. В частности, было доказано, что решение задачи (2) существует и не является осесимметричным, а следовательно, наименьшее сопротивление меньше ньютоновского. Были установлены некоторые свойства минимизирующей функции. Кроме того, было найдено решение в более узком классе функций, график которых есть выпуклое замыкание объединения единичной окружности в плоскости $z = 0$ и выпуклого множества в плоскости $z = h$[5].

В статье[3] был также поставлен вопрос о нахождении тела наименьшего сопротивления в различных классах *невыпуклых* тел. Значительные результаты в этом направлении были получены Комте и Лашан-Робером[6]. Некоторые задачи были ими с большой изобретательностью решены в предположении, что каждая частица среды испытывает не больше одного соударения с телом. Это предположение получило название *single impact assumption.* Оно является необходимым и достаточным условием для того, чтобы сопротивление тела выражалось формулой (2), и поэтому служит необходимой предпосылкой для применимости вариационных техник к задаче минимизации сопротивления.

Без этого предположения, однако, вопрос о наименьшем сопротивлении невыпуклых тел некоторое время оставался открытым. Впоследствии стало ясно, что задачи такого рода следует решать с привлечением математической теории биллиардов. В настоящее время эта теория достигла высокого уровня развития; обзоры по этой теории, разной степени трудности и охвата материала, можно найти, например, в книгах[7]. Детально изучены биллиарды внутри ограниченной области (к таким биллиардам можно свести и газ Лоренца); имеются результаты о биллиардах в неограниченных областях (к ним относятся и результаты по оценке числа соударений в системе конечного

[4]F. Brock, V. Ferone, and B. Kawohl. *A symmetry problem in the calculus of variations.* Calc. Var. **4**, 593-599 (1996); G. Buttazzo, V. Ferone, and B. Kawohl. *Minimum problems over sets of concave functions and related questions.* Math. Nachr. **173**, 71-89 (1995); G. Buttazzo and P. Guasoni. *Shape optimization problems over classes of convex domains.* J. Convex Anal. **4**, 343-351 (1997); T. Lachand-Robert and M. A. Peletier. *An example of non-convex minimization and an application to Newton's problem of the body of least resistance.* Ann. Inst. H. Poincaré, Anal. Non Lin. **18**, 179-198 (2001); T. Lachand-Robert and E. Oudet. *Minimizing within convex bodies using a convex hull method.* SIAM J. Optim. **16**, 368-379 (2006).

[5]T. Lachand-Robert and M. A. Peletier. *Newton's problem of the body of minimal resistance in the class of convex developable functions.* Math. Nachr. **226**, 153-176 (2001).

[6]M. Comte and T. Lachand-Robert. *Newton's problem of the body of minimal resistance under a single-impact assumption.* Calc. Var. Partial Differ. Equ. **12**, 173-211 (2001); M. Comte and T. Lachand-Robert. *Existence of minimizers for Newton's problem of the body of minimal resistance under a single-impact assumption.* J. Anal. Math. **83**, 313-335 (2001).

[7]Г. А. Гальперин и А. Н. Земляков. *Математические бильярды.* М.: Наука, 1990; Г. А. Гальперин и Н. И. Чернов. *Биллиарды и хаос.* М.: Знание, 1991; В. В. Козлов и Д. В. Трещев. *Биллиарды. Генетическое введение в динамику систем с ударами.* М.: Изд-во МГУ, 1991; S. Tabachnikov. *Billiards, Paris: Société Mathématique de France* (1995); S. Tabachnikov. *Geometry and billiards.* (Student Mathematical Library, Vol. 30.) Providence, RI: AMS, 2005; N. Chernov and R. Markarian. *Chaotic billiards.* American Mathematical Society, 2006.

числа шаров)[8]. Однако, по-видимому, мало или совсем не изучался биллиард во внешности ограниченной области в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^d$.[9] Такая теория могла бы сыграть роль корпускулярного аналога теории волнового рассеяния на препятствии.

Еще одна математическая дисциплина, которая также оказалась тесно связанной с задачами о наименьшем сопротивлении, — это задача Монжа-Канторовича об оптимальном переносе массы. Она весьма динамично развивается начиная примерно с середины 80-х гг. (см. книги и обзоры[10]). По-видимому, описание оптимального транспорта в явном виде может быть получено лишь в некоторых весьма редких случаях; тем не менее, представляет интерес выявление таких случаев и описание точных решений. (Ситуация здесь такая же, как и в теории интегрируемых динамических систем.) В настоящее время известно еще очень немного таких случаев. Отметим здесь статьи Мак-Кенна[11] и Укельмана[12] в одномерной задаче и В. Л. Левина[13] в двумерной задаче. Мак-Кенн изучал задачу на прямой с четной функцией ценности, вогнутой на положительной полуоси. Укельман рассматривал функцию ценности с тремя интервалами выпуклости и начальное и конечное распределения массы, заданные лебеговой мерой на единичном отрезке. В. Л. Левин рассматривал начальное распределение, заданное лебеговой мерой на некоторой фигуре на плоскости — в частности, были рассмотрены прямоугольник размера 1×2, равносторонний треугольник, квадрат, — и конечное распределение, полученное из начального некоторой изометрией: прямоугольник поворачивался вокруг своего центра на 90^0; треугольник поворачивался вокруг центра на 60^0 или отражался относительно одной из своих сторон; квадрат поворачивался вокруг центра на 45^0. Функция ценности равнялась расстоянию или квадрату расстояния между двумя точками. Кроме того, В. Л. Левин рассмотрел две фигуры, полученные одна из другой сдвигом, и функцию ценности, равную

---

[8] Я. Г. Синай. *Биллиардные траектории в многогранном угле.* УМН, 1978, т. 33, вып. 1 (199), с. 229-230; T. J. Murphy and E. G. D. Cohen. *On the sequences of collisions among hard spheres in infinite space*, pp 29-50, in "Hard ball systems and the Lorentz gas"(Editor D. Szász), Springer, 2000.

[9] Здесь мы не касаемся теории так называемого *внешнего биллиарда*, в которой динамика определяется по-другому.

[10] S. T. Rachev, L. Rüschendorf. *Mass transportation problems. Vol. 1: Theory.* Springer, 1998; L. Ambrosio. *Lecture notes on optimal transport problems.* Lectures given in Madeira (PT), Euro Summer School "Mathematical aspects of evolving interfaces 2-9 July 2000; C. Villani. *Topics in optimal transportation.* Graduate Studies in Mathematics, 58. American Mathematical Society, Providence, RI, 2003; L. C. Evans. *Partial differential equations and Monge-Kantorovich mass transfer*, pp. 26-87, in "Current Developments in Mathematics"(R. Bott et al., eds), International Press, Cambridge, 1997.

[11] R. J. McCann. *Exact solutions to the transportation problem on the line.* Proc. R. Soc. Lond. A **455**, 1341-1380 (1999).

[12] L. Uckelmann. *Optimal couplings between one-dimensional distributions.* Distributions with given marginals and moment problems (ed. V. Benes & J. Stepan), pp. 275-281. Dordrecht: Kluwer (1997).

[13] В. Л. Левин. *Решение задач Монжа и Монжа-Канторовича. Теория и примеры.* ДАН **388**, No.1, 7-10 (2003); V. L. Levin. *Optimal solutions of the Monge problem.* Advances in Mathematical Economics, **6**, 85-122 (2004); В. Л. Левин. *Условия оптимальности и точные решения двумерной задачи Монжа-Канторовича.* Записки научных семинаров ПОМИ, **312** (2004). Специальный выпуск "Теория представлений. Динамические системы XI (ответственный редактор А. М. Вершик), с 1456-1463.

квадрату расстояния. Во всех описываемых случаях оптимальный транспорт реализуется с помощью кусочно-изометрических отображений специального вида.

Цель работы. Основной целью настоящей работы является (i) изучение задач оптимизации сопротивления движению тела в разреженной среде для различных классов как выпуклых, так и (преимущественно) невыпуклых тел, для случая поступательного движения тела и для случая поступательного движения вместе с вращением; (ii) изучение задач о характеризации биллиардного рассеяния на невыпуклых и шероховатых телах; (iii) получение в явном виде решения задачи Монжа-Канторовича на прямой с нечетной и вогнутой на положительной полуоси функцией ценности и задачи Монжа-Канторовича на сфере с функцией ценности, равной квадрату расстояния; (iv) выявление связи между этими тремя видами задач.

Методы исследования. В работе систематически используются методы теории биллиардов (главы 2, 4, 6). В задачах, связанных с изучением выпуклых тел, мы обращаемся к вариационным методам (глава 3). В главах 5 и 7 используются методы оптимального транспорта массы.

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми. Основные результаты заключаются в следующем.

• Для нескольких классов невыпуклых тел в случае поступательного движения доказано, что инфимум сопротивления равен нулю.

• Подробно изучена обобщенная задача Ньютона для выпуклых осесимметричных тел, движущихся в среде с тепловым движением частиц. Обнаружено, что имеется 2 вида решений в трехмерном случае и 5 видов решений в двумерном случае, и найдены условия (на скорость движения тела и распределение скоростей теплового движения), обеспечивающие принадлежность решения тому или иному виду.

• Дано определение шероховатого тела, адаптированное к задаче о биллиардном рассеянии на поверхности. Получены результаты о характеризации законов биллиардного рассеяния на невыпуклых и шероховатых телах.

• Решена частная задача Монжа-Канторовича на прямой с нечетной функцией ценности, вогнутой на положительной полуоси, а также частная задача Монжа-Канторовича на сфере, где функция ценности равна квадрату расстояния.

• Решена двумерная задача о минимизации сопротивления невыпуклого тела фиксированной площади для случая медленного равномерного вращения. Кроме того, в случае произвольной размерности решена задача об оптимальном рифлении выпуклого медленно вращающегося (кувыркающегося) тела, обеспечивающем наименьшее или наибольшее сопротивление.

• Изучена динамика быстро вращающегося шероховатого диска, движущегося на плоскости. Исследована зависимость силы и момента силы, действующих на диск, от вида шероховатости. Эта зависимость представлена в виде интегральной формулы. Задача о нахождении всех возможных сил ставится и решается как векторнозначная задача Монжа-Канторовича.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Ее результаты могут быть полезны в теории биллиардов, в теории оптимального транспорта массы, в задачах оптимизации формы. В то же время результаты работы могут представлять интерес для космической аэродинамики и геометрической оптики.

Апробация работы. Результаты работы докладывались автором на следующих конференциях:

• Международная конференция по динамическим системам и приложениям к теоретической небесной механике, посвященная памяти В. М. Алексеева, Москва, декабрь 2002 г.

• Международная конференция "Колмогоров и современная математика", Москва, июнь 2003 г.

• Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам, Суздаль, 2004 и 2010 гг.

• 4-я Международная конференция по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям, Москва, авг. 2005 г.

• 22-я конференция по дифференциальным уравнениям и смежным вопросам, посвященная памяти И. Г. Петровского, МГУ, май 2007 г.

• Международная конференция по анализу и сингулярностям, посвященная 70-летию В. И. Арнольда, Москва, август 2007 г.

• XXIV Workshop on Geometric Methods in Physics, Białowieża (Польша), июнь 2005 г.

• MSRI Workshop on Optimal Mass Transport and its Applications, Беркли (США), ноябрь 2005 г.

• Workshop on Calculus of Variations, Oberwolfach (Германия), 2006 и 2010 гг.

• ICMS Workshop on Optimal Transportation and Applications to Geophysics and Geometry, университет Эдинбурга (Великобритания), июль 2007 г.

• Workshop on Variational Analysis and Aerospace Engineering, Erice (Италия), 2007 и 2010 гг.

• Workshop on Geometric Probability and Optimal Transportation, Институт Филдса, Торонто (Канада), ноябрь 2010 г.

Результаты диссертации докладывались также на следующих научных семинарах:

• МГУ им. М. В. Ломоносова, семинар по динамическим системам под рук. акад. РАН Д. В. Аносова и проф. А. М. Степина, 2002, 2003, 2004, 2006 гг, март и сент. 2008 г, 2009 г.

• Семинар Математического Института им. В. А. Стеклова РАН, Москва, 2004, 2010 гг.

• ИППИ им. А. А. Харкевича РАН, Москва (семинар добрушинской математической лаборатории и семинар под рук. акад. РАН Я. Г. Синая): 2004, 2005, 2006, 2008, 2009, 2010 гг.

• семинар кафедры аэромеханики МГУ им. М. В. Ломоносова, 2004 г.

• МГУ им. М. В. Ломоносова, семинар кафедры теоретической механики под рук. вице-президента РАН акад. В. В. Козлова и чл.-корр. РАН Д. В. Трещева, 2005, 2008, 2010 гг.

• МГУ им. М. В. Ломоносова, семинар по геометрии под рук. акад. РАН А. Т. Фоменко, 2005 и 2008 гг.

• Семинар кафедры ОПУ под рук. проф. В. М. Тихомирова, МГУ им. М. В. Ломоносова, март 2010 г.

• Семинар по математической физике, Институт Прикладной Математики им М. В. Келдыша, Москва, дек. 2010 г.

• Семинар в Независимом Университете, Москва, март 2010 г.

• Семинар университета Пизы (Италия) под рук. проф. Дж. Буттаццо, 2003 г.

• Семинар по динамическим системам, Университет г. Порто (Португалия), 2003, 2004, 2007 гг.; семинар в Instituto Superior Técnico, Лиссабон (Португалия), февраль и май 2004 г. и 2005 г.; семинар в Лиссабонском университете, февр. 2007 г.

• Семинар университета Chambéry (Франция), янв. 2004 г.

• Семинар в Georgia Institute of Technology, Атланта, США, март 2006 г.

• Семинар на Филдсовском Коллоквиуме по прикладной математике, Торонто, Канада, янв. 2007 г.

• Семинар DynamIC, Imperial College, Лондон, янв. 2008 г.

• Семинар в University of Surrey, окт. 2008 г.

• London Analysis Seminar, University College of London (Великобритания), окт. 2010 г.

• Семинар в университете г. Лидса (Великобритания), окт. 2010 г.

• Семинар в Queen Mary University of London (Великобритания), окт. 2010.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 15 работах автора, рекомендованных ВАК, список которых приводится в конце автореферата.

Структура диссертации. Диссертация состоит из семи глав, разбитых на разделы (первая глава — введение), и списка литературы из 67 наименований. Общий объем диссертации составляет 223 страниц. Нумерация теорем, лемм, формул, рисунков — двойная: номер главы и собственный номер. В работе имеется 48 иллюстраций.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Глава 1: Введение. В первой главе вначале дана общая характеристика работы: исторический обзор рассматриваемых вопросов и формулировка задач, поставленных в диссертации. Затем даны основные определения, которые систематически используются в дальнейшем: определяются понятие *тела, биллиардного рассеяния* на нем и *сопротивления* тела.

Ограниченное множество с кусочно-гладкой границей в $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, называется *телом* и обозначается буквой B. Рассматривается биллиард в $\mathbb{R}^d \setminus B$ и выбирается выпуклое ограниченное тело C, содержащее B. Обозначим $n(\xi)$ внешнюю единичную нормаль к ∂C в регулярной точке $\xi \in \partial C$ и $\langle \cdot\, , \cdot \rangle$ — скалярное произведение. Обозначим также $(\partial C \times S^{d-1})_{\pm} := \{(\xi, v) \in \partial C \times S^{d-1} : \pm\langle n(\xi), v\rangle \geq 0\}$.

Для биллиардной частицы, в начальный момент находящейся в точке ξ и имеющей скорость v, $(\xi, v) \in (\partial C \times S^{d-1})_{-}$, фиксируем точку $\xi^{+} = \xi^{+}_{B,C}(\xi, v)$, в которой частица пересечет ∂C во второй раз, и ее скорость $v^{+} = v^{+}_{B,C}(\xi, v)$ в этой точке. Отображение $\xi^{+}_{B,C}(\xi, v),\ v^{+}_{B,C}(\xi, v)$ описывает биллиардное рассеяние на теле B.

Сопротивление тела B определяется как

$$R_{\chi}(B) := \int_{(\partial C \times S^{d-1})_{-}} c(v, v^{+}_{B,C}(\xi, v))\, |\langle n(\xi), v\rangle|\, d\xi\, d\chi(v). \tag{3}$$

Оно не зависит от выбора объемлющего тела C. Здесь подынтегральная функция (ценности) $c : S^{d-1} \times S^{d-1} \to \mathbb{R}^q$, $q \geq 1$, удовлетворяющая условию $c(v, v) = 0$, и борелевская вероятностная мера χ на S^{d-1} определяются спецификой задачи.

Так, функция $c(v, v^{+}) = v - v^{+}$ соответствует случаю, когда на неподвижное тело налетает поток частиц, причем распределение скоростей в потоке задается мерой χ. В этом случае R_{χ} (3) есть сила давления потока на тело. Подынтегральное выражение $v - v^{+}_{B}(\xi, v)$ пропорционально импульсу, который индивидуальная частица передает телу.

В частности, обозначим δ_{v_0} вероятностную меру, сосредоточенную в точке $v_0 \in S^{d-1}$; тогда $R_{\delta_{v_0}}(B)$ есть сопротивление тела в направлении v_0.

Функция $c(v, v^{+}) = \langle v - v^{+}, v\rangle$ соответствует случаю, когда на тело налетает поток параллельных частиц, причем направление потока выбирается случайно из S^{d-1} с распределением χ. В этом случае значение R_{χ} равно математическому ожиданию продольной компоненты силы давления потока. Подынтегральное выражение $\langle v - v^{+}_{B}(\xi, v),\ v\rangle$ пропорционально проекции импульса, переданного телу индивидуальной частицей, на направление потока.

Функции ценности c других видов (как скалярные, так и векторнозначные) используются в задаче оптимизации сопротивления быстро вращающегося шероховатого диска.

Аэродинамическая задача Ньютона и ее непосредственное обобщение сформулированы во введенных выше терминах.

Напомним, что решение классической задачи Ньютона есть выпуклое тело вращения, передняя и задняя часть поверхности которого есть плоские диски, а боковая поверхность гладкая и строго выпуклая. Неформально выражаясь, это тело напоминает усеченный конус со слегка раздутой боковой поверхностью. Угол излома поверхности в граничных точках переднего диска равен 135^0.

Далее в главе 1 кратко изложены результаты последующих глав диссертации.

Глава 2: Задача о наименьшем сопротивлении поступательно движущихся тел. Эта задача изучена в некоторых классах невыпуклых тел. А именно, рассмотрены следующие классы:

(1) $\mathcal{P}(h)$ — класс связных тел B, содержащихся в некотором прямом круговом цилиндре и таких, что проекция B на плоскость, содержащую перпендикулярное сечение цилиндра, совпадает с этим сечением.

(2) $\mathcal{S}(h)$ — класс связных тел, содержащихся в цилиндре и содержащих хотя бы одно его перпендикулярное сечение.

(3) Для любых двух выпуклых ограниченных тел K_1 и K_2 таких, что $K_1 \subset K_2$ и $\partial K_1 \cap \partial K_2 = \emptyset$, $\mathcal{B}(K_1, K_2)$ обозначает класс связных тел B таких, что $K_1 \subset B \subset K_2$.

Рассмотрены задачи о наименьшем сопротивлении $R_{\delta_{v_0}}$ в классах (1), (2) и (3), где вектор v_0 в случаях (1) и (2) параллелен оси цилиндра. Результаты выражены следующей теоремой.

Теорема 1. *В каждом из трех классов* $\mathcal{P}(h)$, $\mathcal{S}(h)$, $\mathcal{B}(K_1, K_2)$ *справедливо равенство* $\inf R_{\delta_{v_0}}(B) = 0$.

Другими словами, получен довольно неожиданный результат: в каждом из рассмотренных классов существуют "почти абсолютно обтекаемые" тела.

Наконец, мы рассматриваем задачу о наименьшем сопротивлении для аналогов классов (1) и (2) в двумерном случае. Найден инфимум сопротивления; он всегда положителен.

Глава 3: Задача Ньютона в средах с ненулевой температурой. Рассмотрена задача о минимизации сопротивления в случае, когда имеется *тепловое движение* частиц среды, в трехмерном и двумерном случаях. Она (как и классическая задача Ньютона) решена в классе выпуклых осесимметричных тел фиксированной длины и ширины, поступательно движущихся в среде.

Оказывается, в случае ненулевой температуры возникает гораздо большее разнообразие решений, нежели в исходной задаче Ньютона. В отличие от задачи Ньютона, здесь приходится учитывать состав среды: решение для случая однородной (то есть содержащей частицы одинаковой массы) среды не такое, как в случае среды, состоящей из нескольких однородных компонент и тем самым содержащей частицы различной массы.

В трехмерном случае имеется два различных вида решений. Решение первого вида подобно решению классической задачи Ньютона: задняя часть его поверхности есть плоский диск, а передняя ее часть состоит из плоского диска меньшего размера посредине и строго выпуклой боковой поверхности. Заметим, что, в отличие от решения Ньютона, угол излома передней поверхности в граничных точках переднего диска, вообще говоря, не равен 135^0.

Решение второго вида есть объединение двух тел, подобных решению Ньютона, "склеенных" задними частями своих поверхностей. Длина (вдоль направления движения) переднего тела всегда больше длины заднего "перевернутого"тела. Решения первого и второго вида реализуются, когда скорость V движения тела в среде больше или меньше некоторого критического значения V_c, соответственно.

В двумерном случае классификация решений в некотором смысле более сложная. Существует пять видов решений:

(а) трапеция;

(б) равнобедренный треугольник;

(в) объединение треугольника и трапеции;

(г) объединение двух равнобедренных треугольников;

(д) объединение двух треугольников и трапеции.

Решения (а) – (г) реализуются для любых распределений скоростей теплового движения частиц в среде и для любых значений V; решение (д) реализуется лишь для некоторых. Можно сказать, что оптимальные формы (а) – (г) реализуются уже в случае однородного одноатомного газа, в то время как форма (д) может возникнуть в случае, когда газ есть смесь по крайней мере двух однородных компонент. Заметим также, что в двумерном аналоге классической задачи Ньютона (соответствующей случаю нулевой температуры) имеются только два вида оптимальных форм: (а) и (б).

В предельном случае, когда скорость тела велика по сравнению со средней скоростью теплового движения частиц, $V \to +\infty$, оптимальная форма совпадает с решением классической задачи Ньютона. В другом предельном случае, $V \to 0^+$, трехмерное оптимальное тело становится симметричным относительно плоскости, перпендикулярной направлению движения, то есть является объединением двух *одинаковых* ньютоноподобных тел. Двумерное же оптимальное тело есть, в зависимости от длины h, одна из четырех фигур: (a) трапеция при $0 < h < 1.272$; (b) равнобедренный треугольник при $h = 1.272$; (c) объединение равнобедренного треугольника и трапеции при $1.272 < h < 2.544$; (d) ромб при $h \geq 2.544$. Оптимальная форма наименьшего сопротивления, в пределе низкой скорости, является универсальной: она зависит только от длины тела h и не зависит от распределения скоростей частиц.

Глава 4: О рассеянии в биллиардах. Изложенные в главе 2 результаты о телах сколь угодно малого сопротивления получены при весьма ограничительных условиях; в частности, температура среды предполагается равной нулю и вращательное движение тела отсутствует. В связи с этим возникли новые вопросы об оптимизации сопротивления для тел, которые движутся не только поступательно, но и вращательно, а также для случая, когда невыпуклое тело движется в среде с тепловым движением частиц. Многие из этих вопросов сводятся к задаче изучения сопротивления, усредненного по континууму направлений, и поэтому требуют предварительной работы по изучению биллиардного рассеяния во внешности ограниченных множеств.

Такая работа проделана в главе 4. В двумерном случае дано определение *ямки* на границе связного невыпуклого тела и *закона биллиардного рассеяния* на ямке. Закон рассеяния — это мера, описывающая совместное распределение начальной и конечной скоростей случайно выбранной частицы, падающей на ямку. Оказывается, закон рассеяния может быть более естественно записан в виде совместного распределения угла падения частицы φ и угла при ее вылете из ямки φ^+. Закон рассеяния на выпуклой части границы тела определяется известным правилом "угол падения равен углу отражения" и является мерой, сосредоточенной на диагонали $\varphi^+ = -\varphi$. Далее, определена мера η_B — "редуцированный" закон рассеяния на всем теле B — которая выражает совместное распределение угла падения частицы на тело и угла отраженной частицы. Она является взвешенной суммой законов отражения на всех ямках тела и на выпуклой части его границы.

Более точно, для $C = \mathrm{Conv} B$ и $(\xi, v) \in (\partial C \times S^1)_\pm$ обозначим $\varphi(\xi, v) \in [-\pi/2,\, \pi/2]$ угол между v и $\pm n(\xi)$, отмеряемый против часовой стрелки. Определим меру μ на $(\partial C \times S^1)_-$ согласно $d\mu(\xi, v) = \frac{1}{2}\, |\langle v, n(\xi)\rangle|\, d\xi\, dv$ и зададим отображение T_B из $(\partial C \times S^1)_-$ в $\Box := [-\pi/2,\, \pi/2] \times [-\pi/2,\, \pi/2]$ согласно $T_B : (\xi, v) \mapsto \varphi = \varphi(\xi, v),\ \varphi^+ = \varphi(\xi^+_{B,C}(\xi, v), v^+_{B,C}(\xi, v))$. Образ меры μ под действием отображения T_B обозначается η_B.

Классификация законов рассеяния на двумерных невыпуклых телах дается следующей теоремой.

Определим вероятностную меру λ на $[-\pi/2,\, \pi/2]$ согласно $d\lambda(\varphi) = \frac{1}{2}\, \cos\varphi\, d\varphi$. Обозначим π_φ и π_{φ^+} естественные проекции, $\pi_\varphi(\varphi, \varphi^+) = \varphi,\ \pi_{\varphi^+}(\varphi, \varphi^+) = \varphi^+$, и определим отображение π_d согласно $\pi_d(\varphi, \varphi^+) = (\varphi^+, \varphi)$. Здесь и ниже $\pi^\# \eta$ обозначает образ меры η под действием отображения π.

Определение 1. *$\mathcal{M}$ обозначает множество борелевских мер η на $\Box$, для которых справедливо (M1) $\pi^\#_\varphi \eta = \lambda = \pi^\#_{\varphi^+} \eta$ и (M2) $\pi^\#_d \eta = \eta$.*

Пусть K_1 и K_2 — выпуклые ограниченные тела таких, что $K_1 \subset K_2$ и

$\partial K_1 \cap \partial K_2 = \emptyset$.

Теорема 2. *Справедливо* $\mathcal{M} = \overline{\{\eta_B : B \in \mathcal{B}(K_1, K_2)\}}$, *где верхняя черта обозначает замыкание в слабой топологии.*

В случае произвольной размерности определено *шероховатое выпуклое* тело. Закон рассеяния на нем — это совместное распределение тройки векторов: начальной и конечной скорости и нормали в точке соударения — для случайно выбранной частицы, столкнувшейся с телом. Таким образом, закон рассеяния на шероховатом теле B — это мера на $S^{d-1} \times S^{d-1} \times S^{d-1}$.

Неформально шероховатое тело можно описать следующим образом. На поверхности выпуклого тела делаются микроскопические ямки; таким образом, с макроскопической точки зрения полученное тело с ямками (шероховатое тело) неотличимо от выпуклого, но закон биллиардного рассеяния на нем может быть совершенно другим.

Математическое определение шероховатого тела таково. Пусть C — ограниченное выпуклое тело в $\mathbb{R}^d$, содержащее некоторое тело B. Определим меру $\mu = \mu_{\partial C}$ на $\partial C \times S^{d-1}$ согласно $d\mu(\xi, v) = b_d \, |\langle n(\xi), v\rangle| \, d\xi \, dv$, где $b_d = \Gamma(\frac{d+1}{2})\pi^{(1-d)/2}$ есть нормировочная постоянная, выбранная так, что $\mu\left(\partial C \times S^{d-1}\right)$ $= 2|\partial C|$. По определению, мера $\nu_{B,C}$ задана на $(S^{d-1})^3$ и является образом меры μ под действием отображения $(\xi, v) \mapsto (v, v^+_{B,C}, n(\xi))$.

Определение 2. *Мы говорим, что последовательность тел* $\{B_n,\, n = 1,\, 2, \ldots\}$ *представляет* шероховатое тело, *полученное рифлением выпуклого тела* C, *если (R1)* $B_n \subset C$ *и* $Vol(C \setminus B_n) \to 0$ *при* $n \to \infty$; *(R2) последовательность мер* $\nu_{B_n,C}$ *слабо сходится. Две такие последовательности называются эквивалентными, если соответствующие им предельные меры совпадают, а объемлющее тело* C *одно и то же. Шероховатое тело* $\mathcal{B}$ *есть класс эквивалентности таких последовательностей. Предельная мера* $\nu_{\mathcal{B}}$ *называется законом биллиардного рассеяния на* $\mathcal{B}$.

Шероховатое тело иначе называется телом, полученным *рифлением* выпуклого тела C; ясно, что у каждого выпуклого тела имеется бесконечно много рифлений, отличающихся, неформально говоря, формой ямок.

Следующие определение и теорема дают характеризацию законов рассеяния на шероховатых телах. Обозначим τ_C поверхностную меру выпуклого множества C. Меры $\hat{\tau}^+_C$ и $\hat{\tau}^-_C$ на $(S^{d-1})^2$ определяются следующим равенством $\int_{(S^{d-1})^2} f(v,n)\, d\hat{\tau}^{\pm}_C(v,n) = \int_{S^{d-1}} \int_{S^{d-1}} f(v,n)\, b_d \langle v, n\rangle_{\pm}\, dv\, d\tau_C(n)$, справедливым для любой непрерывной функции f на $(S^{d-1})^2$. Определим отображение $\pi_a : (v, v^+, n) = (-v^+, -v, n)$ из $\left(S^{d-1}\right)^3$ в себя.

Определение 3. *Обозначим* Γ_C *множество мер* ν *на* $(S^{d-1})^3$ *таких, что (Г1)* $\pi^{\#}_{v,n}\nu = \hat{\tau}^-_C$ *и* $\pi^{\#}_{v^+,n}\nu = \hat{\tau}^+_C$; *(Г2)* $\pi^{\#}_a \nu = \nu$.

Теорема 3. $\{\nu_{\mathcal{B}},\ \mathcal{B}$ *получены рифлением* $C\} = \Gamma_C$.

Общая форма утверждения в теоремах 2 и 3 одинакова: утверждается, что мера является (или может быть приближена) законом рассеяния в том и только том случае, если она имеет фиксированные проекции и обладает определенным свойством симметрии.

Глава 5: Некоторые специальные задачи оптимального переноса массы В ряде случаев задача оптимизации сопротивления шероховатых поверхностей при помощи вышеупомянутых теорем 2 и 3 может быть сведена к задаче о нахождении меры с фиксированными проекциями (то есть закона рассеяния), минимизирующей или максимизирующей некоторый линейный функционал. Последняя задача носит название задачи об оптимальном переносе массы, или задачи Монжа-Канторовича. В главе 5 мы рассматриваем частную одномерную задачу оптимального переноса массы, порожденную задачей о наименьшем усредненном сопротивлении.

А именно, обозначим $\Gamma(\lambda_1, \lambda_2)$ множество мер на $\mathbb{R}^2_{x,y}$, проекции которых на оси x и y совпадают с λ_1 и λ_1, соответственно. Требуется найти меру ν_*, решающую задачу

$$\inf_{\nu \in \Gamma(\lambda_1,\lambda_2)} \iint_{\mathbb{R}^2} c(x,y)\, d\nu(x,y).$$

Мы рассматриваем случай, когда $c(x,y) = f(x+y)$, причем f — нечетная функция, строго вогнутая при $x \geq 0$ (а значит, строго выпуклая при $x \leq 0$), и $\lambda_1 = \lambda_2$, причем носитель меры λ_1 есть объединение конечного числа ограниченных отрезков и λ_1-мера любой точки равна нулю.

Решение этой задачи основывается на том свойстве, что носитель оптимальной меры ν_*, $\operatorname{spt} \nu_*$, является c-монотонным множеством, то есть для любых двух точек (x_1, y_1), $(x_2, y_2) \in \operatorname{spt} \nu_*$ справедливо неравенство $c(x_1, y_1) + c(x_2, y_2) \leq c(x_1, y_2) + c(x_2, y_1)$. Довольно легко видеть, что этот носитель есть объединение графика некоторой монотонно убывающей функции, лежащей в полуплоскости $x + y \leq 0$, и графика монотонно возрастающей функции, принадлежащей полуплоскости $x + y \geq 0$. Уточнение вида этих графиков составляет содержание большей части главы 5. В результате оказывается, что график монотонно возрастающей функции принадлежит прямой $x = y$ и, более того, оптимальная мера ν_* принадлежит конечно- или счетнопараметрическому семейству мер, которое определяется только мерой λ_1 и не зависит от f. Более точно, справедлива следующая теорема 4.

Будем обозначать $\lambda_1 = \lambda$. Зададим знакопеременную меру $\tilde{\lambda}$ на $\mathbb{R}_+ := [0, +\infty)$ формулой $\tilde{\lambda}(B) = \lambda(B) - \lambda(-3B)$, где $B \subset \mathbb{R}_+$ — произвольное борелевское множество, $-3B := \{-3x : x \in B\}$, и обозначим λ_+ и λ_- верхнюю и нижнюю вариации $\tilde{\lambda}$. Рассмотрим конечное или счетное семейство интервалов $\mathcal{I} = \{I_i\}$, где индексы i — целые неотрицательные числа. При $i \neq 0$ интервалы семейства имеют вид $I_i = (a_i,\, b_i)$, где $0 < a_i < b_i \le +\infty$. Если значение $i = 0$ принадлежит множеству индексов $\{i\}$, то соответствующий интервал имеет вид $I_0 = [0,\, b_0)$; таким образом, $a_0 = 0$. Замыкания интервалов семейства попарно не пересекаются: $\bar{I}_i \cap \bar{I}_j = \emptyset$ при $i \neq j$. Наконец, справедливо включение $\mathbb{R}_+ \setminus (\cup_i I_i) \subset \operatorname{spt}\lambda_+$. Семейство $\mathcal{I}$ содержит ровно один полубесконечный интервал. Соответствующий ему индекс обозначим $i = r$. Если $r \neq 0$, то этот интервал имеет вид $I_r = (a_r,\, +\infty)$, то есть справедливо $b_r = +\infty$. Может оказаться, что $r = 0$; в таком случае семейство $\mathcal{I}$ содержит ровно один этот интервал $[0,\, +\infty)$.

Определение 4. *Семейство интервалов $\mathcal{I}$ называется допустимым, если оно (дополнительно к вышеизложенным) обладает следующими свойствами.*

(а) Для любого $i \neq 0$ справедливо $\tilde{\lambda}(I_i) = 0$.

(б) Для любого i и при $x \in \begin{cases} (a_i,\, b_i), & \text{если } a_i > 0 \\ (-3b_i,\, b_i), & \text{если } a_i = 0 \end{cases}$ справедливо

$$\lambda((-3b_i,\, -2b_i - x)) \le \lambda((x,\, b_i)) \le \lambda((-3b_i,\, -2a_i - x)).$$

Определим множество на плоскости $G_{\mathcal{I}}$, ассоциированное с допустимым семейством $\mathcal{I}$. Для этого сначала зададим множество $G^+ = G^+(\mathcal{I})$ согласно $G^+ := \{(x, x) : x \in \mathbb{R}_+ \setminus (\cup_i I_i)\}$. Далее, положим $G^D_{(0)} := \{(x, y) : y = -3x,\, x \in \mathbb{R}_+ \setminus (\cup_i I_i)\,,\, y \in \operatorname{spt}\lambda\}$, обозначим $G^L_{(0)}$ множество, симметричное $G^D_{(0)}$ относительно прямой $\{x = y\}$ и определим $G_{(0)} = G_{(0)}(\mathcal{I})$ согласно $G_{(0)} := G^D_{(0)} \cup G^L_{(0)}$. При $i \neq 0$ положим $G^D_i := \{(x, y) : x \in \operatorname{spt}\lambda \cap I_i,\, y \in \operatorname{spt}\lambda \cap (-3I_i),\, \lambda((x,\, b_i)) = \lambda((-3b_i,\, y))\}$, обозначим G^L_i множество, симметричное G^D_i относительно прямой $\{x = y\}$, и зададим множество $G_i = G_i(\mathcal{I})$ согласно $G_i := G^D_i \cup G^L_i$. Если множество индексов $\{i\}$ содержит 0 (другими словами, если семейство $\mathcal{I}$ содержит интервал вида $(0,\, b_0)$), то положим $G_0 = \{(x, y) : x,\, y \in \operatorname{spt}\lambda \cap (-3b_0,\, b_0),\, \lambda((x,\, b_0)) = \lambda((-3b_0,\, y))\}$. Обозначим множество $G^- = G^-(\mathcal{I})$ формулой $G^- := G_{(0)} \cup (\cup_i G_i)$ и, наконец, положим $G_{\mathcal{I}} = G^+ \cup G^-$.

Теорема 4. *(а) Для любого допустимого семейства $\mathcal{I} = \{I_i\}$ существует единственная мера $\nu_{\mathcal{I}} \in \Gamma(\lambda, \lambda)$, имеющая носитель $G_{\mathcal{I}}$.*

(б) Оптимальная мера ν_* совпадает с $\nu_{\mathcal{I}}$ для некоторого допустимого семейства интервалов $\mathcal{I}$.

Таким образом, решение данной задачи Монжа-Канторовича сводится к нахождению минимума некоторой функции конечного или счетного числа переменных (в наиболее интересных случаях — функции всего лишь одного переменного).

Глава 6: Задачи оптимизации усредненного сопротивления. В этой главе рассматривается задача об оптимизации функционала $R_u(B)$ (3) с функцией ценности $c(v, v^+) = \langle v - v^+, v\rangle$ и равномерной вероятностной мерой u на S^{d-1}. Этот функционал можно интерпретировать следующим образом.

Тело B движется поступательно с фиксированной скоростью и в то же время совершает медленное вращательное движение (кувыркается). Скорость этого вращения настолько мала, что им можно пренебречь при рассмотрении взаимодействия тела с индивидуальными частицами. В системе отсчета, связанной с телом, вектор скорости описывает кривую на сфере S^{d-1} и тем самым индуцирует некоторую (сингулярную) меру на этой сфере: мера множества $A \subset S^{d-1}$ есть доля времени, проведенного вектором скорости в A. Предположим, что при неограниченном увеличении периода наблюдения эта мера слабо сходится к u. Тогда среднее значение сопротивления в течение этого периода стремится к $R_u(B)$.

В двумерном случае сопротивление $R_u(B)$ связного тела B представлено в виде интеграла по мере, представляющей закон рассеяния,

$$R_u(B) = |\partial(\mathrm{Conv}B)| \iint_{\Box} (1 + \cos(\varphi - \varphi^+))\, d\eta_B(\varphi, \varphi^+),$$

где $\Box = [-\pi/2,\ \pi/2] \times [-\pi/2,\ \pi/2]$. Ставится задача 1 о наименьшем значении сопротивления $\inf R_u(B)$ в классе (а) связных (вообще говоря, **невыпуклых**) тел B фиксированной площади; (б) **выпуклых** тел B фиксированной площади.

С помощью теоремы 4 о характеризации мер η_B задача 1 (а) сведена к следующей частной задаче Монжа-Канторовича (МК): найти

$$\inf_{\eta \in \Gamma(\lambda,\lambda)} \iint_{\Box} (1 + \cos(\varphi - \varphi^+))\, d\eta(\varphi, \varphi^+), \tag{4}$$

которая, в свою очередь, сведена к задаче МК на прямой, рассмотренной в главе 5. Затем строится минимизирующая последовательность тел, которая может быть отождествлена с шероховатым кругом заданной площади. В результате доказана следующая теорема.

Теорема 5. *Рассмотрим задачи о наименьшем сопротивлении*
(а) $I_1 = \inf\{R_u(B) :\ B$*— связное* тело, $\mathrm{Area}(B) = c\}$*;*
(б) $I_2 = \inf\{R_u(B) :\ B$*— выпуклое* тело, $\mathrm{Area}(B) = c\}$.

Справедливо следующее. Решением задачи (б) является круг $B_{(c)}$ площади c. Существует последовательность тел B_n, $n \geq 1$, решающая задачу минимизации (а) и такая, что

(i) $\lim_{n\to\infty} Area(B_n \Delta B_{(c)}) = 0$*;*

(ii) последовательность редуцированных законов рассеяния, порожденных этими телами, η_{B_n}, слабо сходится к мере ν_*, служащей решением задачи МК (4).

С помощью численного счета найдено отношение $m_2 = I_1/I_2$: $m_2 \approx 0.9878$. Иными словами, справедливо

$$\frac{\text{(наименьшее сопротивление в классе } \textbf{невыпуклых} \text{ тел)}}{\text{(наименьшее сопротивление в классе } \textbf{выпуклых} \text{ тел)}} \approx 0.9878.$$

Пусть C_1 и C_2 — ограниченные выпуклые тела такие, что $C_1 \subset C_2 \subset \mathbb{R}^2$ и $\partial C_1 \cap \partial C_2 = \emptyset$. Рассматривается класс связных тел B таких, что $C_1 \subset B \subset C_2$. Ставится задача 2 о нахождении

$$\text{(a)} \inf_{C_1 \subset B \subset C_2} R_u(B); \qquad \text{(б)} \sup_{C_1 \subset B \subset C_2} R_u(B).$$

Решение задачи 2 (а) по существу повторяет решение (а) предыдущей задачи. Минимизирующие последовательности тел в случаях (а) и (б) можно отождествить с шероховатыми телами, полученными рифлением C_1 и C_2, соответственно. Доказана следующая теорема.

Теорема 6. *Справедливы равенства*

$$\frac{\inf_B R_u(B)}{R_u(C_1)} = m_2 \approx 0.9878 \quad \textit{и} \quad \frac{\sup_B R_u(B)}{R_u(C_2)} = 1.5.$$

Далее, показано, что сопротивление тела в среде с тепловым движением частиц пропорционально сопротивлению в среде неподвижных частиц, причем коэффициент пропорциональности больше 1 и зависит только от характера движения частиц: чем выше температура, тем больше этот коэффициент, тем больше сопротивление. Таким образом, задачи 1 и 2 в средах с ненулевой температурой имеют те же решения, что и при нулевой температуре.

В случае произвольной размерности, $d \geq 2$, решаются задачи оптимизации сопротивления в классе шероховатых тел, полученных рифлением фиксированного выпуклого тела C. Ставится задача 3 о нахождении

$$\text{(а)} \quad \frac{1}{R(C)} \sup\{R_u(\mathcal{B}) : \ \mathcal{B} \text{ — рифление } C\};$$

$$\text{(б)} \quad \frac{1}{R(C)} \inf\{R_u(\mathcal{B}) : \ \mathcal{B} \text{ — рифление } C\}.$$

Оказывается, эти отношения зависят только от размерности d, но не от конкретного тела C. При помощи теоремы 3 о характеризации мер, порожденных многомерными шероховатыми телами, задача 3 сводится к частной задаче о переносе массы на S^{d-1}, которая затем (благодаря присущей ей осевой симметрии) сводится к одномерной задаче Монжа-Канторовича

$$\inf_{\eta \in \Gamma(\lambda_n, \lambda_n)} \iint_{\square_+} (1 + \cos(\varphi - \varphi^+))\, d\eta(\varphi, \varphi^+).$$

где $\square_+ = [0,\, \pi/2]^2$, а мера λ_n на $[0,\, \pi/2]$ задается своей плотностью $d\lambda_d(\varphi) = (d-1)\sin^{d-2}\varphi\, \cos\varphi\, d\varphi$. Последняя задача, в свою очередь, сводится к задаче, рассмотренной в главе 5. Приведем лишь численные ответы.

Справедливо

$$\frac{\sup_{\mathcal{B}} R_u(\mathcal{B})}{R(C)} = \frac{d+1}{2} \quad \text{и} \quad \frac{\inf_{\mathcal{B}} R_u(\mathcal{B})}{R(C)} = m_d,$$

где $m_2 \approx 0.9878$, $m_3 \approx 0.9694$ и

$$\lim_{d\to\infty} m_d = \frac{1}{2}(1 + \int_0^1 \sqrt{\ln z \ln(1-z)}\, dz) \approx 0.791.$$

Проиллюстрируем эти результаты на следующем примере. Рассмотрим искусственный спутник сферической формы, вращающийся вокруг Земли и тормозимый остатками ее атмосферы. Предположим, что поверхность спутника изготовлена из материала, обеспечивающего упругое отражение от нее молекул атмосферы. Задача двоякого рода состоит в том, чтобы (а) уменьшить или (б) увеличить сопротивление спутника, нанося на его поверхность рифление подходящим образом. Из наших результатов следует, что сопротивление в результате рифления может быть уменьшено самое большее на 3.05% и увеличено самое большее вдвое.

Суммируя некоторые результаты глав 2 и 6, заключаем, что нижняя грань сопротивления по одному направлению (для разумных классов тел) равна нулю, а усредненного сопротивления по всем возможным направлениям — положительна. В первом случае мера χ сосредоточена в одной точке ($\chi = \delta_{v_0}$), а во втором — равномерно распределена на сфере ($\chi = u$).

Глава 7 В последней главе мы продолжаем изучение сопротивления вращающихся тел, но, в отличие от предыдущей главы, рассматривается случай *быстрого вращения*. Последнее означает, что произведение угловой скорости вращения и диаметра тела имеет тот же порядок величины, что и скорость поступательного движения тела. Рассмотрен простейший случай шероховатого диска (круга), вращающегося и движущегося в разреженной среде на плоскости. Центр масс круга совпадает с его геометрическим центром.

Основная особенность быстрого вращения заключается в том, что сила сопротивления, вообще говоря, не параллельна направлению движения тела. Это явление хорошо известно физикам и называется *эффектом Магнуса*. Перпендикулярная составляющая силы сопротивления может быть сонаправлена или противонаправлена мгновенной скорости передней точки границы тела; в этих случаях говорят, соответственно, о *собственном* или *обратном* эффекте Магнуса. Физикам хорошо известно также, что в плотных газах обычно возникает собственный эффект, в то время как обратный эффект чаще всего реализуется в разреженных газах.

Эффект Магнуса обычно выводят из *неупругого* взаимодействия частиц газа с телом. В нашей модели, напротив, этот эффект возникает вследствие сложного взаимодействия частиц с ямками тела. Величина и направление силы сопротивления, а также вид эффекта (собственный или обратный) определяются видом шероховатости, причем обратный эффект в некотором смысле встречается чаще.

Сила, действующая на диск, и момент этой силы представлены в виде (соответственно, векторнозначного и скалярного) линейных функционалов на множестве мер. Каждая мера из этого множества представляет определенный (редуцированный) закон рассеяния на диске. А именно, справедлива следующая теорема.

Теорема 7. *Сила сопротивления и момент этой силы, действующие на шероховатый диск радиуса r, движущийся на плоскости в направлении $(0, v)$ в разреженной среде плотности ρ и вращающийся (против часовой стрелки) с угловой скоростью ω, равны*

$$\vec{R} = \frac{8}{3}\, r\rho v^2 \cdot \vec{R}[\eta, \lambda],$$

$$R_I = \frac{8}{3}\, r^2\rho v^2 \cdot R_I[\eta, \lambda].$$

Здесь η есть редуцированный закон рассеяния, порожденный диском, $\lambda = \omega r/v$, а безразмерные величины $\vec{R}[\eta, \lambda]$ и $R_I[\eta, \lambda]$ определяются интегральными формулами

$$\vec{R}[\eta, \lambda] = \begin{bmatrix} R_T[\eta, \lambda] \\ R_L[\eta, \lambda] \end{bmatrix} = \iint_{\square} \vec{c}(x, y, \lambda)\, d\eta(x, y),$$

$$R_I[\nu, \lambda] = \iint_{\square} c_I(x, y, \lambda)\, d\eta(x, y),$$

где подынтегральные функции $\vec{c}$ и c_I заданы соотношениями (5)–(12), приведенными ниже. Напомним, что $\square = [-\pi/2,\, \pi/2] \times [-\pi/2,\, \pi/2]$. Мы также используем обозначения $\zeta = \zeta(x, \lambda) = \arcsin\sqrt{1 - \lambda^2\cos^2 x}$ и $x_0 = x_0(\lambda) = \arccos\frac{1}{\lambda}$, а χ обозначает характеристическую функцию.

(a) Если $0 < \lambda \le 1$, то

$$\vec{c}(x, y, \lambda) \;=\; \frac{3}{4}\,\frac{(\lambda\sin x + \sin\zeta)^3}{\sin\zeta}\,\cos\frac{x - y}{2}\begin{bmatrix} \cos\left(\zeta + \frac{x-y}{2}\right) \\ -\sin\left(\zeta + \frac{x-y}{2}\right) \end{bmatrix}, \tag{5}$$

$$c_I(x, y, \lambda) \;=\; -\frac{3}{8}\,\frac{(\lambda\sin x + \sin\zeta)^3}{\sin\zeta}\,(\sin x + \sin y)\,; \tag{6}$$

в частности,

$$\vec{c}(x,y,1) = 3\sin^2 x \begin{bmatrix} \cos(2x-y)+\cos x \\ -\sin(2x-y)-\sin x \end{bmatrix} \chi_{x\geq 0}(x,y), \tag{7}$$

$$c_I(x,y,1) = -3\sin^2 x\,(\sin x+\sin y)\,\chi_{x\geq 0}(x,y). \tag{8}$$

В предельном случае $\lambda \to 0^+$ *справедливо*

$$\vec{c}(x,y,\lambda) \;=\; -\frac{3}{8}\begin{bmatrix} \sin(x-y) \\ 1+\cos(x-y) \end{bmatrix} + O(\lambda), \tag{9}$$

$$c_I(x,y) \;=\; \frac{9\lambda}{8}\,\sin x\,(\sin x+\sin y) + O(\lambda^2). \tag{10}$$

(б) Если $\lambda > 1$, *то*

$$\vec{c}(x,y,\lambda) \;=\; \frac{3}{2}\,\frac{\cos\frac{x-y}{2}}{\sin\zeta}\Bigg\{(\lambda^3\sin^3 x + 3\lambda\sin x\sin^2\zeta)\cos\zeta \begin{bmatrix} \cos\frac{x-y}{2} \\ -\sin\frac{x-y}{2} \end{bmatrix} -$$
$$- (3\lambda^2\sin^2 x\sin\zeta + \sin^3\zeta)\sin\zeta \begin{bmatrix} \sin\frac{x-y}{2} \\ \cos\frac{x-y}{2} \end{bmatrix}\Bigg\}\chi_{x\geq x_0}(x,y), \tag{11}$$

$$c_I(x,y,\lambda) \;=\; -\frac{3}{4}\,\frac{\lambda^3\sin^3 x + 3\lambda\sin x\sin^2\zeta}{\sin\zeta}\,(\sin x+\sin y)\,\chi_{x\geq x_0}(x,y). \tag{12}$$

Таким образом, задача нахождения всех допустимых сил сведена к *векторнозначной* задаче Монжа-Канторовича[14]. Эта задача решена численно для нескольких значений угловой скорости.

Наконец, выписаны уравнения динамики диска и в нескольких простых случаях явно найдена его траектория. Так, в случае, если шероховатость образована ямками в виде равностороннего треугольника, наблюдаются три разных вида траектории диска, в зависимости от соотношения его линейной и угловой скоростей в начальный момент времени. Эти траектории есть сходящаяся спираль, окружность и кривая, неограниченно приближающаяся к прямой линии.

Выражаю глубокую благодарность профессору Анатолию Михайловичу Степину за постоянное внимание к работе и полезные обсуждения и сотрудникам кафедры ОПУ за конструктивные обсуждения рассматривамого круга задач и полученных результатов.

[14] *Векторнозначная* задача Монжа-Канторовича рассматривается здесь, по-видимому, впервые.

СПИСОК ОСНОВНЫХ РАБОТ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

В журналах из официального перечня ВАК

1. А. Ю. Плахов. *К задаче Ньютона о теле наименьшего аэродинамического сопротивления.* Доклады РАН, **390**, N^o 3, с. 1-4 (2003).

2. А. Ю. Плахов. *Задача Ньютона о теле наименьшего сопротивления с ограниченным числом соударений.* Успехи математических наук, **58**, N^{o}1, с. 195-196 (2003).

3. А. Ю. Плахов. *Задача Ньютона о теле наименьшего усредненного сопротивления.* Мат. сборник, **195**, N^{o}7, с. 105-126 (2004).

4. А. Ю. Плахов. *Точные решения одномерной задачи Монжа-Канторовича.* Мат. сборник, **195**, N^{o}9, с. 57-74 (2004).

5. А. Ю. Плахов. *Тела наименьшего аэродинамического сопротивления в разреженных средах с тепловым движением частиц.* Доклады РАН, **403**, N^{o}1, с. 1-5 (2005).

6. А. Ю. Плахов и Д. Ф. М. Торреш. *Аэродинамическая задача Ньютона в средах хаотически движущихся частиц.* Мат. сборник, **196**, N^{o}6, с. 111-160 (2005).

   Теоретическую часть статьи 6 выполнил А. Ю. Плахов, в то время как Д. Ф. М. Торреш выполнил работу по компьютерному счету и изготовлению иллюстраций.

7. А. Ю. Плахов. *О бильярдах в неограниченных областях, обращающих направление движения частиц.* Успехи математических наук, **61**, с. 179-180 (2006).

8. А. Ю. Плахов и А. И. Алексенко. *Об аэродинамической задаче Ньютона для невыпуклых тел.* Успехи математических наук, **63**, N^{o}5, с. 181-183 (2008).

   В статье 8 основная идея и метод построения тела наименьшего сопротивления принадлежат А. Ю. Плахову, в то время как А. И. Алексенко провела детальные вычисления, реализующие этот план.

9. А. Ю. Плахов и Т. В. Чемисова. *Сила, действующая на вращающийся шероховатый диск в потоке невзаимодействующих частиц.* Доклады РАН, **424**, N^{o}1, с. 26-30 (2009).

Теоретическая часть статьи 9 выполнена А. Ю. Плаховым, в то время как Т. В. Чемисова выполнила работу по компьютерному счету и изготовлению иллюстраций.

10. А. Ю. Плахов. *Рассеяние в биллиардах и задачи ньютоновской аэродинамики.* Успехи математических наук, **64**, с. 3–72 (2009).

В журналах, включенных в базы цитирования MathSciNet и Zentralblatt Math

11. A. Plakhov. *Newton's problem of minimal resistance for bodies containing a half-space.* J. Dynam. Control Syst. **10**, 247-251 (2004).

12. A. Plakhov. *On the minimum and maximum averaged resistance problem of moving bodies.* J. Math. Sci. (N.Y.) **145**, 5295-5302 (2007).

13. A. Plakhov. *Problems of minimal and maximal aerodynamic resistance.* Chapter 19 in the book *Variational Analysis and Aerospace Engineering* (Eds G. Buttazzo and A. Frediani), pp. 349-365, Springer Optim. Appl., Vol. 33, Springer, New York, 2009.

14. A. Plakhov. *Billiard scattering on rough sets: Two-dimensional case.* SIAM J. Math. Anal.**40**, 2155-2178 (2009).

15. A. Plakhov. *Billiards and two-dimensional problems of optimal resistance.* Arch. Ration. Mech. Anal. **194**, 349-382 (2009).