МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи
УДК 512.543.2

Микаелян Ваагн Гамлетович

ВЕРБАЛЬНЫЕ ВЛОЖЕНИЯ И СПЛЕТЕНИЯ ГРУПП

(01.01.06 - математическая логика, алгебра и теория чисел)

А в т о р е ф е р а т
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва - 2011

Работа выполнена на кафедре дискретной математики и теоретической информатики Ереванского государственного университета.

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук,
профессор **Альфред Львович Шмелькин**,
доктор физико-математических наук,
профессор **Владимир Никанорович Ремесленников**,
доктор физико-математических наук,
профессор **Михаил Владимирович Волков**.

Ведущая организация:

Ярославский государственный университет
имени П. Г. Демидова.

Защита состоится 10 июня 2011 года в 16 час. 45 мин. на заседании диссертационного совета Д 501.001.84 при Московском государственном университете по адресу: 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д.1, МГУ имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).
Автореферат разослан 8 мая 2011 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 501.001.84 при МГУ,
доктор физико-математических наук,
профессор О. А. Иванов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Вложения групп, существование вложений с определенными заданными свойствами являются одними из самых интересных и продуктивных тематик исследований в теории групп. Можно сказать, что мотив вложений проходит через всю теорию групп, начиная с ее зарождения. Причем вложения групп часто сами оказываются очень полезными инструментами для решения задач в других областях теории групп: с их помощью строят примеры групп с заданными свойствами, решают алгоритмические вопросы и т. д..

Цель настоящей работы - разработать методы вербальных нормальных и субнормальных вложений групп, другие методы связанные со сплетениями групп и с их помощью решить ряд проблем, обобщить известные результаты в теории многообразий групп, обобщенных разрешимых, обобщенных нильпотентных групп, сплетений групп, вложений групп, хопфовых групп и по близким вопросам. Так как эти методы в диссертации применяются к разным вопросам теории групп, то ниже будет удобнее представить краткую предысторию каждого из вопросов непосредственно перед результатами, полученными по данной теме.

Вложение (мономорфный гомоморфизм) $\varphi : H \to G$ группы H в группу G с образом $H \cong \tilde{H} = H^{\varphi} \leq G$ называется *нормальным* или *субнормальным*, если $\tilde{H}$ нормальная или, соответственно, субнормальная подгруппа в G. Пусть $V \subseteq F_{\infty}$ - множество слов. Назовем это вложение V*-вербальным* (или просто *вербальным*), если $\tilde{H}$ лежит в вербальной подгруппе $V(G)$, где $V(G) = \langle v(g_1, ..., g_n) | v = v(x_1, ..., x_n) \in V; g_1, ..., g_n \in G \rangle$. Понятие вербального вложения есть обобщение таких широко используемых понятий, как «вложение в коммутант группы», «вложение в n-ый член нижнего центрального ряда группы» и т. д..

Основные методы исследования. Основными в работе являются классические методы вложений групп, многообразий групп, сплетений групп, обобщенных разрешимых и обобщенных нильпотентных групп, в частности методы Ф. Холла, Б. Х. Ноймана, А. Ю. Ольшанского, А. Л. Шмелькина, Г. Хайнекена, Л. Ковача. Также используются методы, введенные автором: методы вербальных (нормальных, субнормальных) вложений, методы построения конструкций, «близких» к сплетениям и т.д..

Научная новизна и основные результаты. Основные результаты диссертации являются новыми. Они заключаются в следующем:

• Решается проблема Г. Хайнекена о нормальной вербальной вложимости групп: когда для данной группы H и данного множества слов V существует группа G, допускающая нормальное вербальное вложение H в G? Этот вопрос был решен Г. Хайнекеном для всех конечных p-групп[1]. Б. Айк решила[2] вопрос для случая всех конечных групп. Мы даем полный ответ для случая любой группы H.

• Доказывается, что в отличии от нормального случая, субнормальная вербальная вложимость имеет место всегда. Даны усиления ряда известных теорем о вложениях счетных групп, в частности, теоремы о вложимости любой счетной группы в 2-порожденную группу[3]. Каждая счетная группа для любого нетривиального множества слов V-вербально вложима в 2-порожденную группу, причем это вложение может быть субнормальным. В качестве иллюстрации решается один из пунктов Проблемы 14.10 де ля Арпа и Бридсона из Коуровской Тетради[4] о явной вложимости группы рациональных чисел $\mathbb{Q}$.

---

[1]H. Heineken, *Normal embeddings of p-groups into p-groups*, Proc. Edinburgh Math. Soc. 35 (1992) , 309–314.

[2]B. Eick, *The converse of a theorem of W. Gaschütz on Frattini subgroups*, Math. Z. 224, (1997), 1, 103–111. см. также: B. Eick, *Characterisierung und Konstruktion von Frattinigruppen mit Anwendungen in der Konstruktion endlicher Gruppen*, Aachener Beiträge zur Mathematik, Band 17, Aachen, 1996.

[3]B. H. Neumann, Hanna Neumann, Embedding theorems for groups, *J. London Math. Soc.* **34** (1959), 465–479.

[4]Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп, 14-е издание, под ред. Мазурова В.Д., Хухро Е.В.. Сибирское отделение РАН, Институт математики, Новосибирск, 1999.

• Изучаются случаи, когда счетная группа данного класса вложима в 2-порожденную группу того же класса и когда это вложение может быть вербальным, сохраняющим отношение порядка на группах. Именно: если счетная группа является разрешимой группой, SN^*-группой, SI^*-группой, SN-группой, SI-группой, $SN^{\backprime}$- группой, $SI^{\backprime}$-группой или же SD-группой, то для любого нетривиального множества слов V существует субнормальное V-вербальное вложение этой группы в 2-порожденную группу, которую можно выбрать в том же из перечисленных классов. Подобное не верно для классов абелевых групп, нильпотентных групп, ZA-групп или N-групп.

• Обсуждаются многообразия, порожденные сплетениями абелевых групп и сплетениями множеств абелевых групп. Находятся критерии, классифицирующие все случаи, когда для данных множеств абелевых групп $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ их сплетение $\mathfrak{X} \,\mathrm{Wr}\, \mathfrak{Y}$ порождает произведение $\mathrm{var}\,(\mathfrak{X})\,\mathrm{var}\,(\mathfrak{Y})$ многообразий, порожденных множествами $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$. Если множества состоят каждая из одной группы, мы получаем критерии, классифицирующие случаи, когда $\mathrm{var}\,(A \,\mathrm{Wr}\, B) = \mathrm{var}\,(A)\,\mathrm{var}\,(B)$. Эти результаты обобщают известные факты, например, теорему Хоутона.

• Мы используем (вербальные) вложения групп для построения групп и классов групп с различными свойствами. Например, доказывается, что существует континуум 3-порожденных разрешимых нехопфовых групп, порождающих попарно различные многообразия групп. Дана геометрическая конструкция, иллюстрирующая известную концепцию *бесконечных сплетенных степеней* Ф. Холла и с их помощью дан ответ на один вопрос Плоткина. Приводятся примеры локально-неразрешимых SI^*-групп.

Теоретическая и практическая ценность. Работа имеет теоретический характер. Полученные в ней результаты могут быть использованы в различных задачах теории групп, в частности вложений групп, многообразий групп, сплетений групп.

Апробация результатов. Результаты диссертации начиная с 1997 г. неоднократно докладывались на научно-исследовательских семинарах, международных конференциях и воркшопах. В их числе можно отметить:

• XXII Международный математический конгресс в Берлине, Германия, 1998.

• Объединенный алгебраический семинар университетов Фрайбурга, Нюрнберга и Вюрцбурга, Германия, 1998.

• Биместр памяти Рейхолда Бэра в Университете Неаполя, Италия, 2002 (два часовых доклада).

• Международная конференция по теории групп и групповых колец в Гливице, Польша, 2003.

• Международная алгебраическая конференция в Москве к 250-летнему юбилею Московского государственного университета, и к 75-летнему юбилею кафедры алгебры Московского государственного университета, Москва, Россия, 2004.

• Международная конференция по комбинаторной и геометрической теории групп в Университете Вандербильдт, Нэшвилль, США, 2005.

• Международная конференция к 80 юбилею профессора Бориса Плоткина, Иерусалим, Израиль, 2006.

• Первая международная конференция по алгебре и геометрии в Армении, Ереван, 2007.

• Семинар по теории групп кафедры высшей алгебры Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия, 2011.

• Кафедральный семинар кафедры высшей алгебре Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия, 2011.

Большинство результатов диссертации включены в опубликованные тезисы этих конференций.

Работа автора *Subnormal embedding theorems for groups* (J. London Math. Soc., 62 (2000), 398-406) была удостоена Первой международной премии имени Эмиля Артина в 2001 г. (см. Notices of the American Mathematical Society 2001, 48, 8, с. 834):
`http://www.ams.org/notices/200108/people.pdf`

Публикации. Результаты работы представлены в статьях [1]-[15], указанных в конце автореферата. В этом списке приведены только публикации в международных реферируемых журналах, указаны MR-коды статей в Mathematical Reviews. Публикации в других изданиях и тезисы докладов не включены в этот список.

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, из 5 глав (разбитых на параграфы) и из списка литературы. Нумерация параграфов, теорем, лемм, определений и т.д. - сквозная. Полный объем диссертации 167 страниц, библиография включает 87 наименований, из которых 15 - публикации автора по теме диссертации.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Глава 1. Нормальные вербальные вложения групп.

Стартовой точкой для работы над вербальными вложениями для нас послужила проблема Г. Хайнекена[5] о нормальных вербальных вложениях, т. е. о классификации тех случаев, когда заданная группа H для заданного множества слов V нормально и вербально вложима в какую-либо группу G (как ранее было неоднократно отмечено в литературе, есть группы H и множества V, для которых такие группы G не существуют). Нормальным вербальным вложениям посвящена **Глава 1**.

Вот предыстория проблемы и основные результаты. В 1912 В. Бернсайд доказал, что неабелева группа с циклическим центром или неабелева

[5]Эта задача была темой исследования автора в 1997-98 гг. по программе DAAD (German Academic Exchange Service, grant Nr. A/97/13683). См. статьи:
H. Heineken, *Normal embeddings of p-groups into p-groups*, Proc. Edinburgh Math. Soc. 35 (1992) , 309–314.
H. Heineken, V. H. Mikaelian, *On normal verbal embeddings of groups*, J. Math. Sci., New York, 100 (2000), 1, 1915–1924.
V. H. Mikaelian, *Über die normalen verbalen Einbettungen einiger Klassen der Gruppen (On normal verbal embeddings of some classes of groups)*, Beiträge zur Algebra und Geometrie, 45 (2004), 2, 501-516.

группа, индекс коммутанта которой есть p^2, не может быть коммутантом (или вложенным в коммутант) какой-либо p-группы[6]. С другой стороны Блэкбурн нашел все 2-порожденные p-группы, которые являются коммутантами (или могут быть вложены в коммутанты) p-групп[7]. Г. Хайнекен поставил вопрос шире и рассмотрел вместо коммутанта или члена нижнего центрального ряда случай вербальных подгрупп для любого слова $v \in F_\infty$. Он показал[8], что конечная p-группа нормальна в некоторой (конечной) p-надгруппе G и лежит в ее вербальной подгруппе $w(G)$ тогда и только тогда, когда $v(L) \supseteq \mathrm{Inn}\,(H)$, где L есть некоторая силовская p-подгруппа в группе автоморфизмов $\mathrm{Aut}\,(H)$. Им же был поставлен вопрос описания как можно более широких классов групп и множеств слов, для которых имеет место нормальная вербальная вложимость в какую-либо группу. Б. Айк решила[9] этот вопрос для случая любой конечной группы H и любого слова $v \in F_\infty$. Интерес к нормальной вложимости связан и с алгоритмическими, вычислительными задачами (в частности, в компьютерной системе **GAP**).

Полный ответ для случая любой группы H и для любого нетривиального множества слов V был дан в нашей совместной работе с Г. Хайнекеном [2]. **Теорема 1** в Параграфе 4 диссертации описывает ситуацию: *для данного нетривиального множества слов V и для данной группы H существует группа G и нормальное V-вербальное вложение $\varphi : H \to G$ тогда и только тогда, когда имеет место:*

$$V(\mathrm{Aut}\,(H)) \supseteq \mathrm{Inn}\,(H)\,.$$

[6]W. Burnside, *On some properties of groups whose orders are powers of primes*, Proc. London Math. Soc. (2) 11 (1912) 225–245.

[7]N. Blackburn, *On prime power groups in which the derived group has two generators*, Proc. Cambridge Philos. Soc. 53 (1957), 19–27.

[8]H. Heineken, *Normal embeddings of p-groups into p-groups*, Proc. Edinburgh Math. Soc. 35 (1992) , 309–314.

[9]B. Eick, *The converse of a theorem of W. Gaschütz on Frattini subgroups*, Math. Z. 224, (1997), 1, 103–111. см. также: B. Eick, *Characterisierung und Konstruktion von Frattinigruppen mit Anwendungen in der Konstruktion endlicher Gruppen*, Aachener Beiträge zur Mathematik, Band 17, Aachen, 1996.

И если H - конечная (конечно-порожденная) группа, то G тоже может быть выбрана конечной (конечно-порожденной). В качестве простого примера применения этого критерия дается описание всех случаев нормальной вербальной вложимости для всех (конечных или бесконечных) симметрических групп.

Далее в Главе 1 рассматриваются нормальные вербальные вложения «с дополнительными условиями»: т. е. когда можно выбрать группу G абелевой (нильпотентной, разрешимой и т. д.) для V-вербального вложения группы H, если группа H сама является абелевой (нильпотентной, разрешимой и т. д.). С помощью полученного критерия в Параграфе 7 дается одно обобщение теоремы В. Бернсайда о вложениях конечных p-групп. Глава 1 заканчивается иллюстрацией использованной техники – определением одной конструкции, «близкой» к конструкции сплетений групп.

Глава 2. Субнормальные вербальные вложения групп

Эта глава посвящена результатам о *субнормальных* вербальных вложениях групп - естественным продолжениям результатов Главы 1 о *нормальных* вербальных вложениях групп. В отличии от нормального вербального случая, субнормальная вербальная вложимость групп имеет место всегда: по пункту **A** Теоремы 10 в Параграфе 10, *для любой группы H и для любого нетривиального множества слов V всегда существует группа G, допускающая субнормальное вложение $\varphi : H \to G$, которое вербально: $\varphi(H) \leq V(G)$.*

Более того, в случае субнормальных вложений полученные методы вербальных вложений имеют приложения к более широкому кругу задач. Например, ограничиваясь лишь счетными группами, можно получить усиления ряда известных теорем о вложениях счетных групп, в частности, знаменитой Теоремы Г. Хигмена и Нойманов[10] о вложимости любой

[10]G. Higman, B. Neumann, Hanna Neumann, *Embedding theorems for groups*, J. London Math. Soc. 3 **24**, (1949), 247–254.

счетной группы в 2-порожденную группу. По пункту B Теоремы 10 в Параграфе 10 нашей работы, *каждая счетная группа для любого нетривиального множества слов V-вербально вложима в 2-порожденную группу, причем это вложение может быть субнормальным.*

Ранее в литературе были доказаны теоремы о таких вложениях счетных групп в 2-порожденные группы, которые на самом деле являются вложениями даже в коммутант или во второй коммутант 2-порожденной группы (что есть частные случаи вербальных подгрупп). Так что Теорема 10 обобщает сразу несколько теорем такого рода. Более подробно о вложениях счетных групп будет сказано в Главе 3.

Далее в Главе 2 рассматривается один из пунктов Проблемы 14.10 П. де ля Арпа и М. Бридсона в Коуровской Тетради[11]: *существует ли явное вложение аддитивной группы рациональных чисел $\mathbb{Q}$ в конечно-порожденную группу?* Мы дали положительный ответ: такое явное вложение построено[12]. Более того, эта конечно-порожденная группа может быть 2-порожденной (см. Параграф 15).

Глава 2 заканчивается рассмотрением вложений вполне упорядоченных групп в Параграфе 16 и Параграфе 17.

Глава 3. Вложения счетных обобщенных разрешимых и обобщенных нильпотентных групп

Известная теорема о вложимости любой счетной группы в 2-порожденную группу стала началом обширных исследований о вложениях счетных групп в 2-порожденные группы (или вообще в конечно-порожденные группы) с дополнительными условиями. Краткий перечень ссылок на

[11]Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп, 14-е издание, под ред. Мазурова В.Д., Хухро Е.В.. Сибирское отделение РАН, Институт математики, Новосибирск, 1999

[12]V. H. Mikaelian, *On a problem on explicit embeddings of the group Q*, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 2005:13 (2005), 2119–2123.

эти результаты дан в Параграфе 10. Основная цель **Главы 3** - изучение случаев, когда счетная группа данного класса (нильпотентная группа, обобщенная разрешимая группа и т. д.) вложима в 2-порожденную группу того же класса. Параллельно рассматривается, когда это вложение может быть вербальным, сохраняющим отношение порядка на группах и т. д..
В частности, по Теореме 16 и Теореме 15 в Параграфе 21 и по Теореме 18 в Параграфе 25, *если счетная группа H является разрешимой группой, SN^*-группой, SI^*-группой, SN-группой, SI-группой, SN`-группой, $SI$`-группой или же SD-группой (см. определения и обозначения в Параграфе 19), то для любого нетривиального множества слов V существует 2-порожденная группа G и субнормальное V-вербальное вложение $\varphi : H \to G$, причем группу G можно выбрать в том же из выше перечисленных классов, которому принадлежит исходная группа H.*

Более того, если группа H вполне упорядочена, то группу G можно выбрать вполне упорядоченной так, что порядок на ней продолжает порядок изоморфной копии группы H.

Такие утверждения имеют место не для всех классов групп, конечно. Например, не все счетные абелевы группы вложимы в 2-порожденные абелевы группы (очевидный факт), не все счетные нильпотентные группы вложимы в 2-порожденные нильпотентные группы (факт следует из того, что в конечно-порожденной нильпотентной группе все подгруппы тоже конечно-порожденные). Еще два примера мы приводим в Параграфе 24: такими классами обобщенных нильпотентных групп, счетные группы из которых не всегда могут быть вложены в 2-порожденные группы того же класса, являются классы ZA-группы и N-группы (см. определения в Параграфе 19).

Глава 4. Многообразия, порожденные сплетениями абелевых групп

Глава посвящена многообразиям, порожденным сплетениями абелевых групп и сплетениями множеств абелевых групп. Хотя полученные в этой главе результаты не всегда касаются вербальных вложений групп, тем не менее техника примененная здесь (особенно сплетения групп) тесно связана с методами, используемыми в других главах.

Основная задача главы - найти эффективные критерии, классифицирующие все случаи, когда для данных множеств абелевых групп $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ их декартово сплетение

$$\mathfrak{X} \operatorname{Wr} \mathfrak{Y} = \{X \operatorname{Wr} Y \mid X \in \mathfrak{X}, Y \in \mathfrak{Y}\}$$

или их прямое сплетение

$$\mathfrak{X} \operatorname{wr} \mathfrak{Y} = \{X \operatorname{wr} Y \mid X \in \mathfrak{X}, Y \in \mathfrak{Y}\}$$

порождают произведение многообразий, порожденных данными множествами групп $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$:

$$\operatorname{var}(\mathfrak{X}) \operatorname{var}(\mathfrak{Y}).$$

В частности, когда множества $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ состоят каждая из одной группы: $\mathfrak{X} = \{A\}$ и $\mathfrak{Y} = \{B\}$, мы получаем критерии, классифицирующие все случаи, когда $\operatorname{var}(A \operatorname{Wr} B) = \operatorname{var}(A) \operatorname{var}(B)$ и $\operatorname{var}(A \operatorname{wr} B) = \operatorname{var}(A) \operatorname{var}(B)$. Эти результаты обобщают известные факты о выполнении таких равенств в частных случаях (см. в частности результаты К. Хоутона или Г. Хигмена, упомянутые ниже). В Главе 4 мы попутно приведем и другие результаты в смежных вопросах.

Используем обозначение C для бесконечной циклической группы и обозначение C_n для циклической группы порядка n. Первый результат о многообразиях, порожденных сплетениями абелевых групп (Лемма

4.5 и Пример 4.9 в работе Г. Хигмена[13] или 24.65, 54.41 в монографии Нойман[14]), принадлежит Г. Хигмену, который показал, что *если* C_p *и* C_n *конечные циклические группы порядков* p *и* n *(*p *- простое число не делящее* n*), тогда сплетение* $C_p \,\mathrm{wr}\, C_n$ *порождает произведение* $\mathfrak{A}_p\mathfrak{A}_n$, где, как обычно, $\mathfrak{A}_n = \mathrm{var}\,(C_n)$ есть многообразие всех абелевых групп конечных экспонент, делящих n. Результат Хоутона описал все случаи с $A = C_m$ и $B = C_n$. Именно, *равенство*

$$\mathrm{var}\,(C_m \,\mathrm{wr}\, C_n) = \mathrm{var}\,(C_m)\,\mathrm{var}\,(C_n) = \mathfrak{A}_m\mathfrak{A}_n$$

имеет место тогда и только тогда, когда m *и* n *взаимно просты.*

Для удобства изложения нашего критерия дадим его сначала для случая сплетения абелевых групп A и B, а не множеств групп. Обозначим через B_p так называемую p-примарную компоненту абелевой группы B конечного порядка (т. е. подгруппу группы B, состоящую из элементов, порядки которых есть степени простого числа p). По Теореме Прюфера каждая абелева группа конечной экспоненты, в частности и p-примарная компонента B_p группы B, есть прямая сумма конечных циклических групп, порядки которых есть степени простых чисел:

$$B_p = \sum_{i \in I} C_{p^{k_i}}.$$

Обозначим через k' самую высокую из этих экспонент k_i. Тогда, по Теореме 19 в Параграфе 28 *Для любых абелевых групп* A *и* B *равенство* $\mathrm{var}\,(A \,\mathrm{Wr}\, B) = \mathrm{var}\,(A)\,\mathrm{var}\,(B)$ *выполняется тогда и только тогда, когда:*

(1) *если хотя бы одна из этих групп* A *и* B *не имеет конечную экспоненту;*

[13]G. Higman, *Some remarks on varieties of groups*, Quart. J. Math. Oxford, (2) 10 (1959), 165–178.

[14]Hanna Neumann, *Varieties of Groups*, Springer–Verlag, Berlin (1967).

(2) *или если* $\exp A = m$ *и* $\exp B = n$ *обе конечные и для любого простого делителя* p *чисел* m *и* n, p*-примарная компонента*

$$B_p = \sum_{i \in I} C_{p^{k_i}}, \quad (p^{k_i} | n,\ i \in I)$$

группы B *содержит бесконечно много слагаемых* $C_{p^{k'}}$ *порядка* $p^{k'}$, *где* $p^{k'}$ *есть наивысшая степень* p, *делящая* n.

Так как декартово и прямое сплетения любых двух групп всегда порождают одно и то же многообразие, аналог этого утверждения имеет место и для прямых сплетений.

Когда A и B конечные группы, наше условие просто означает, что $\mathrm{var}\,(A \,\mathrm{Wr}\, B) = \mathrm{var}\,(A)\,\mathrm{var}\,(B)$ выполняется тогда и только тогда, когда их порядки m и n взаимно просты.

А для случая сплетений множеств абелевых групп имеет место Теорема 20 в Параграфе 29: *Для любых множеств абелевых групп* $\mathfrak{X}$ *и* $\mathfrak{Y}$ *равенство* $\mathrm{var}\,(\mathfrak{X} \,\mathrm{Wr}\, \mathfrak{Y}) = \mathrm{var}\,(\mathfrak{X})\,\mathrm{var}\,(\mathfrak{Y})$ *выполняется тогда и только тогда, когда:*

(1) *если хотя бы одно из множеств* $\mathfrak{X}$ *и* $\mathfrak{Y}$ *не имеет конечную экспоненту;*

(2) *или если* $\exp \mathfrak{X} = m$ *и* $\exp \mathfrak{Y} = n$ *обе конечны и для любого простого делителя* p *чисел* m *и* n, *и для любого положительного целого числа* s *множество* $\mathfrak{Y}$ *содержит группу* $B(s)$ *такую, что* p*-примарная компонента*

$$B(s)_p = \sum_{i \in I(s)} C_{p^{k_i}}, \quad (p^{k_i} | n,\ i \in I(s))$$

группы $B(s)$ *содержит не менее* s *прямых слагаемых* $C_{p^{k'}}$ *порядка* $p^{k'}$, *где* $p^{k'}$ *наивысшая степень числа* p, *делящая* n.

Аналог утверждения верен и для случая прямых сплетений.

В Главе 4 также собрано много примеров конкретных случаев применения этих критериев к сплетениям абелевых групп. В Параграфе 39 мы используем полученный критерий для описания всех подмногообразий многообразия $\mathfrak{A}_p^2$, порожденных сплетениями нетривиальных абелевых групп.

А в Параграфе 40, заключающем Главу 4, рассматриваются некоторые связанные со сплетениями вопросы о произведениях многообразий групп. Вот, например, один немного неожиданный результат. В литературе часто использована известная теорема Г. Баумслага и Нойманов о том, что для любой группы A и для любой дискриминирующей группы B сплетение $A \,\mathrm{Wr}\, B$ дискриминирует (а поэтому и порождает) многообразие $\mathrm{var}\,(A)\,\mathrm{var}\,(B)$[15]. Оказывается, для абелевых групп это условие - необходимое и достаточное: *Для любых нетривиальных абелевых групп A и B сплетение $A \,\mathrm{Wr}\, B$ дискриминирует многообразие*

$$\mathrm{var}\,(A)\,\mathrm{var}\,(B)$$

тогда и только тогда, когда B дискриминирует многообразие $\mathrm{var}\,(B)$ (см. Теорему 33, Теорему 34 и ремарку Дж. Гроувза в Параграфе 40).

Глава 5. Групповые конструкции, основанные на вербальных вложениях групп

В заключительной главе мы используем (вербальные) вложения групп для построения групп и классов групп с различными свойствами.

Группа G называется хопфовой, если G не изоморфна ни одной из своих собственных фактор-групп. Каждая конечно-порожденная финитно-аппроксимируемая группа (в частности, каждая свободная группа конечного ранга или каждая свободная полинильпотентная группа конечного ранга) является хопфовой группой[16]. С другой стороны легко

[15] Hanna Neumann, *Varieties of Groups*, Springer–Verlag, Berlin (1967).

[16] А. И. Мальцев, *Об изоморфном представлении бесконечных групп матрицами*, Мат. Сб. 28 (1940), 405–422.

видеть, что свободная группа бесконечного ранга или свободная абелева группа бесконечного ранга - нехопфовы группы. Этот контраст делает примеры конечно-порожденных нехопфовых групп интересными (на самом деле оригинальная проблема Хайнца Хопфа была поставлена им в 1930-х годах именно о существовании таких групп[17]. Первые ответы на этот вопрос были даны Б. Нойманом[18] и Г. Хигменом[19].

В Теореме 37 в Параграфе 42 доказывается, *что существует континуум 3-порожденных разрешимых нехопфовых групп, порождающих попарно различные многообразия групп. Длина разрешимости этих групп не более девяти.* Там же дана одна иллюстрация к Проблеме 16 Ханны Нойман и к результату Дж. Гроувза[20]. В нашей конструкции мы используем множество мощности континуум $\{N_i | i \in I\}$ счетных групп N_i, порождающих попарно различные многообразия групп, построенное А.Ю. Ольшанским[21] для решения известной проблемы конечной базы тождеств.

Далее в Главе 5, в Параграфах 46 - 49 дана геометрическая конструкция, иллюстрирующая известную концепцию *бесконечных сплетенных степеней* Ф. Холла и с их помощью дан ответ на один вопрос Б.И. Плоткина: *Существует ли 2-порожденная группа $G = \langle x, y \rangle$ такая, что G не разрешима (поэтому она и не локально-разрешима), но нормальное замыкание $\langle x \rangle^G$ элемента x в G есть локально разрешимая подгруппа.* Мы даем положительный ответ на этот вопрос двумя явно сконструированными группами, из которых первая основана на бесконечных сплетенных степенях Ф. Холла, а вторая

[17] H. Hopf, *Beiträge zur Klassifizierung der Flächenabbildungen,* J. Reine Angew. Math. 1965 (1931), 225–236.
[18] B. H. Neumann, *A two-generator group isomorphic to a proper factor group*, J. London Math. Soc. 25 (1950), 247–248.
[19] G. Higman, *A finitely related group with an isomorphic proper factor group,* J. London Math. Soc. 26 (1951), 59–61.
[20] J. R. J. Groves, *On some finiteness conditions for varieties of metanilpotent groups*, Arch. Math. 24 (1973), 252-268.
[21] А. Ю. Ольшанский, *О проблеме конечного базиса тождеств в группах*, Изв. АН СССР. Сер. матем., 34 (1970), 376–384.

дается как группа автоморфизмов некоторого специально сконструированного графа.

Глава 5 закрывается третьим примером использования вербальных вложений групп для построения новых классов групп. В Параграфе 50 мы приводим примеры локально-неразрешимых SI^*-групп. Из всех типов обобщенных разрешимых групп SI^*-группы, т. е. группы, допускающие возрастающий (не обязательно конечный) нормальный ряд с абелевыми факторами, в каком-то смысле самые близкие к разрешимым группам (среди всех классов обобщенных разрешимых групп).

Но в литературе до настоящего времени был всего один пример такой группы, построенный в шестидесятых годах независимо Ф. Холлом[22], Л. Ковачем и Б. Нойманом[23]. Мы строим континуум примеров таких групп, все лежащие в многообразии

$$\mathfrak{A} \cdot \big((\mathfrak{K}_p \cap \mathfrak{E}_n) \cup (\mathfrak{G}_5 \cap \mathfrak{B}_{8qr})\big) \cdot \mathfrak{A}^3.$$

Более того, эти группы не только попарно неизоморфны, но порождают попарно различные многообразия групп.

Заметим, что так как, согласно работам А.Ю. Ольшанского[24] или С.И. Адяна[25] множество всех многообразий имеет мощность континуум, получаем, что многообразий, порожденных локально-неразрешимыми SI^*-группами «столько же», сколько и вообще всех многообразий групп.

[22] P. Hall, *The Frattiny subgroups of finitely generated groups*, Proc. London Math. Soc., (3) 11 (1961), 327–352.

[23] L. G. Kovács, B. H. Neumann, *An embedding theorem for some countable groups*, Acta Sci. Math. (Szegel) 26 (1965), 139–142.

[24] А. Ю. Ольшанский, *О проблеме конечного базиса тождеств в группах*, Изв. АН СССР. Сер. матем., 34 (1970), 376–384.

[25] С. И. Адян, *Бесконечные неприводимые системы групповых тождеств*, ДАН СССР, 1970, 190, 3, 499--501.

СПИСОК РАБОТ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

[1] V. H. Mikaelian, *Subnormal embedding theorems for groups,* J. London Math. Soc., 62 (2000), 398–406. MR1783633

[2] H. Heineken, V. H. Mikaelian, *On normal verbal embeddings of groups,* Algebra, 12. J. Math. Sci. (New York) 100 (2000), no. 1, 1915–1924. MR1774361 (диссертанту принадлежит основной критерий о нормальной вербальной вложимости для всех групп упомянутый в Главе 1 диссертации.)

[3] V. H. Mikaelian, *On varieties of groups generated by wreath products of abelian groups,* Abelian groups, rings and modules (Perth, Australia, 2000), 223–238, Contemp. Math., 273, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001. MR1817165

[4] V. H. Mikaelian, *On embeddings of countable generalized soluble groups in two-generated groups*, J. Algebra, 250 (2002), 1–17. MR1898374

[5] V. H. Mikaelian, *Two problems on varieties of groups generated by wreath products of groups*, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 31 (2002), 2, 65–75. MR1916454

[6] V. H. Mikaelian, *An embedding construction for ordered groups*, J. Austral. Math. Soc. (A), 74 (2003), 379–392. MR1970055

[7] V. H. Mikaelian, *On wreath products of finitely generated abelian groups*, Advances in Group Theory, Proc. Internat. Research Bimester dedicated to the memory of Reinhold Baer, (Napoli, Italy, May-June, 2002), Aracne, Roma, 2003, 13–24. MR2053433

[8] V. H. Mikaelian, *Über die normalen verbalen Einbettungen einiger Klassen der Gruppen*, Beiträge zur Algebra und Geometrie, 45 (2004), 2, 501-516 (Deutsch und Englisch). MR2093021

V. H. Mikaelian, *On normal verbal embeddings of some classes of groups*, Contributions to Algebra and Geometry, 45 (2004), 2, 501-516 (in German and English). MR2093021

[9] V. H. Mikaelian, *Infinitely many not locally soluble SI*-groups*, Ricerche di Matematica, Univ. Studi Napoli, Naples, 52 (2003), 1–19. MR2090057

[10] V. H. Mikaelian, *On embedding properties of SD-groups*, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 2004:2 (2004) 65–76. MR2471850

[11] V. H. Mikaelian, *On a problem on explicit embeddings of the group Q*, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 2005:13 (2005) 2119–2123. MR2177699

[12] V. H. Mikaelian, *Metabelian varieties of groups and wreath products of abelian groups*, J. Algebra, 2007 (313), 2, 455–485. MR2329555

[13] V. H. Mikaelian, *On finitely generated soluble non-Hopfian groups, an application to a problem of Neumann*, IJAC, International Journal of Algebra and Computations, 17 (2007), Nos. 5-6, 1107–1113. MR2355688

[14] V. H. Mikaelian, *SD-groups and embeddings*, Armen. J. Math. 1 (2008), no. 3, 23-42. MR2471850

[15] В. Г. Микаелян, *О конечно порождённых разрешимых нехопфовых группах*, Фундамент. и прикл. матем., 14:8 (2008), 185-202 (на русском и английском). MR2355688

V. H. Mikaelian, *On finitely generated soluble non-Hopfian groups*, Fundam. Prikl. Mat., 14:8 (2008), 185202 (in Russian and English). MR2355688