МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи
УДК 517.938.5+515.164.15

Ошемков Андрей Александрович

Топология особенностей интегрируемых гамильтоновых систем

01.01.04 — геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва — 2011

Работа выполнена на кафедре дифференциальной геометрии и приложений Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова

Научный консультант:	академик РАН, профессор Фоменко Анатолий Тимофеевич
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Борисов Алексей Владимирович
	член-корреспондент РАН, профессор Матвеев Сергей Владимирович
	доктор физико-математических наук, профессор Мищенко Александр Сергеевич
Ведущая организация:	Санкт-Петербургский государственный университет

Защита диссертации состоится 10 июня 2011 г. в 16 ч. 45 мин. на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 при Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, МГУ имени М. В. Ломоносова, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан «10» мая 2011 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д.501.001.84 при МГУ
доктор физико-математических наук,
профессор А.О.Иванов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы

Представленная работа является исследованием в области топологии интегрируемых систем.

Топологические свойства интегрируемой гамильтоновой системы тесно связаны со структурой особенностей соответствующего ей отображения момента. Прообразы регулярных значений этого отображения являются инвариантными многообразиями системы, диффеоморфными фактору $\mathbb{R}^n$ по некоторой решетке. Например, если фазовое пространство системы компактно, то, как следует из классической теоремы Лиувилля, такие инвариантные многообразия диффеоморфны n-мерным торам (называемым торами Лиувилля), на которых траектории системы являются условно периодическими.

Если рассматривать прообразы всех точек при отображении момента, то соответствующее слоение на фазовом пространстве системы (называемое слоением Лиувилля) имеет особенности. Кроме торов Лиувилля у него имеются слои, содержащие особые точки отображения момента. Слоение Лиувилля в окрестности этих особых слоев устроено более сложно как с топологической точки зрения, так и с точки зрения динамики.

Локальная классификация невырожденных особенностей для интегрируемых гамильтоновых систем хорошо известна (теорема Элиассона[1]). А именно, тип особенности полностью определяется количеством ее гиперболических, эллиптических и фокусных компонент. Однако для описания топологии конкретной интегрируемой системы необходимо исследовать структуру особенности не в малой окрестности особой точки, а в окрестности всего особого слоя, содержащего эту точку. Иногда такое исследование особенности называют полулокальным.

Полный ответ в задаче полулокальной классификации особенностей известен лишь для систем с одной и двумя степенями свободы. Иными словами, для каждого типа особенностей таких систем имеется алгоритм их перечисления (описание этих алгоритмов изложено в книге А. В. Болсинова, А. Т. Фоменко[2]). Следует отметить, что наиболее сложным является случай гиперболических особенностей ранга 0 (мы называем их седловыми особенностями; в случае двух степеней свободы они также называются точками типа седло-седло). В отличие от эллиптических и фокусных осо-

[1] L. H. Eliasson, *"Normal forms for Hamiltonian systems with Poisson commuting integrals — elliptic case"*, Comm. Math. Helv., **65**, (1990), 4–35.

[2] А.В. Болсинов, А.Т. Фоменко, *Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация*, т. 1, 2, Ижевск: Издательский дом "Удмуртский университет", 1999.

бенностей структура особенности типа седло-седло не определяется однозначно ее сложностью (т. е. количеством особых точек на слое). Например, имеется 4 различные особенности сложности 1, а для сложности 2 число неэквивалентных особенностей типа седло-седло равно 39.

Во второй главе диссертации исследуется структура седловых особенностей произвольной сложности (т.е. с произвольным количеством особых точек ранга 0 на особом слое) с полулокальной точки зрения. Опишем кратко известные результаты, связанные с этой темой.

Первые результаты о полулокальной классификации седловых особенностей были получены в работах Л. М. Лермана и Я. Л. Уманского[3], где рассматривались особенности сложности 1 для систем с двумя степенями свободы. В этом случае особый слой представляет из себя двумерный комплекс, клетками которого являются орбиты гамильтонова действия. Для особенностей сложности 1 особый слой содержит одну 0-мерную клетку (особая точка), четыре 1-мерные клетки и четыре 2-мерные. При этом каждая 2-мерная клетка является "квадратом", т. е. ее граница разбита на четыре отрезка, внутренность каждого из которых гомеоморфно отображается на 1-мерную клетку при характеристическом отображении. Л. М. Лерман и Я. Л. Уманский показали, что в случае двух степеней свободы седловые особенности сложности 1 полулокально эквивалентны тогда и только тогда, когда их особые слои гомеоморфны. Исследовав все возможные варианты, они получили полный список, состоящий из четырех попарно неэквивалентных особенностей.

Имеется другой естественный инвариант седловой особенности (в случае двух степеней свободы), называемый "круговой молекулой". Этот инвариант можно кратко описать следующим образом. Пусть образ особого слоя при отображении момента $\mathbf{F}$ есть точка $P \in \mathbb{R}^2$. Бифуркационная диаграмма в окрестности точки P состоит из двух гладких кривых, трансверсально пересекающихся в точке P, которые можно считать координатными линиями. Рассмотрим маленькую окружность γ с центром в точке P и ее прообраз при отображении момента. Круговая молекула — это инвариант, описывающий топологию слоения Лиувилля в трехмерном многообразии $\mathbf{F}^{-1}(\gamma)$. Круговые молекулы для всех четырех особенностей сложности 1 были вычислены А. В. Болсиновым[4]. Как оказалось, все они различны, и поэтому также дают классификацию особенностей сложно-

[3] Л. М. Лерман, Я. Л. Уманский, *"Классификация четырехмерных гамильтоновых систем и пуассоновских действий $\mathbb{R}^2$ в расширенных окрестностях простых особых точек. I; II; III"*, Матем. сборник, **183**, № 12, (1992), 141–176; **184**, № 4, (1993), 103–138; **186**, № 10, (1995), 89–102.

[4] A. V. Bolsinov, *"Methods of calculation of the Fomenko–Zieschang invariant"*, In book: "Topological classification of integrable Hamiltonian systems", Adv. Soviet Math., vol. 6, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991, p. 147–183.

сти 1 для систем с двумя степенями свободы.

Полулокальная классификация особенностей сложности 2 для систем с двумя степенями свободы была получена А. В. Болсиновым[4]. Оказалось, что для особенностей сложности 2 топология особого слоя уже не является полным топологическим инвариантом. Поэтому А. В. Болсинов ввел еще один инвариант седловой особенности, называемый "l-типом", и в результате получил полный список особенностей сложности 2 для систем с двумя степенями свободы, состоящий из 39 особенностей. Круговые молекулы для всех 39 особенностей сложности 2 были построены В. С. Матвеевым[5] Представление 39 особенностей сложности 2 в виде почти прямых произведений было получено В. В. Корнеевым[6].

Случай особенностей сложности 1 для трех степеней свободы исследован В. В. Калашниковым[7]. Он использует подход, основанный на разложении особенностей в почти прямое произведение, предложенный Н. Т. Зунгом[8]. В работе В. В. Калашникова[7] сформулирована теорема о том, что количество особенностей сложности 1 для случая трех степеней свободы равно 32, и приведен их список. Как было потом выяснено, в этом списке пропущены некоторые особенности, а некоторые из почти прямых произведений, указанных в списке, на самом деле задают эквивалентные особенности. Отметим, что рассуждения, использованные В. В. Калашниковым, правильны, но его доказательство теоремы о классификации сводится к некоторому перебору, который в работе не приведен. По-видимому, ошибки в списке возникли именно на этом последнем этапе доказательства.

Также в работе В. В. Калашникова[7] доказано следующее утверждение для систем с любым числом степеней свободы: особенности сложности 1 полулокально эквивалентны тогда и только тогда, когда их особые слои гомеоморфны.

Для систем с двумя степенями свободы ни топология особого слоя, ни l-тип особенности не являются полными инвариантами (уже для особенностей сложности 2). Однако, оказывается, что пара $\{$топология особого слоя, l-тип$\}$ (этот инвариант называется также

[5] В. С. Матвеев, *"Вычисление значений инварианта Фоменко для точки типа седло-седло интегрируемой гамильтоновой системы"*, Труды сем. по вект. и тенз. анализу, **25**, ч. 1, (1993), 75–104.

[6] В. В. Корнеев *"Представление четырехмерной особенности типа седло-седло в виде почти прямого произведения двумерных атомов. Случай сложности два"*, В кн.: "Топологические методы в теории гамильтоновых систем" (Сборник статей под ред. А. В. Болсинова, А. Т. Фоменко, А. И. Шафаревича), М.: изд-во "Факториал", 1998, с. 127–135.

[7] В. В. Калашников, *"Простые гиперболические особенности пуассоновых действий"*, В кн.: "Топологические методы в теории гамильтоновых систем" (Сборник статей под ред. А. В. Болсинова, А. Т. Фоменко, А. И. Шафаревича), М.: изд-во "Факториал", 1998, с. 115–126.

[8] Nguyen Tien Zung, *"Symplectic topology of integrable Hamiltonian systems, I: Arnold–Liouville with singularities"*, Compositio Math., **101**, (1996), 179–215.

C-l-типом особенности) однозначно определяет седловую особенность с точностью до полулокальной эквивалентности. Этот факт был доказан В. С. Матвеевым[9] (см. также работу А.В. Болсинова и В.С. Матвеева[10]). Отметим, что C-l-тип особенности можно рассматривать и в случае любого числа степеней свободы. Неизвестно, будет ли этот инвариант полным для систем с числом степеней свободы больше двух.

Отметим также, что круговая молекула, которая является полным инвариантом для особенностей сложности 1 и 2, в общем случае таковым не является. Примеры неэквивалентных особенностей с одинаковыми круговыми молекулами были построены А. В. Грабежным (см. раздел 7.3 в обзоре А. В. Болсинова и А. А. Ошемкова[11]). Простейший из них имеет сложность 4.

Одним из важных результатов о полулокальной структуре особенности безусловно является теорема Н. Т. Зунга[8] о разложении любой седловой особенности в почти прямое произведение атомов. Задача классификации тесно связана с вопросом о единственности такого разложения. Очевидно, что любую особенность можно представить в виде почти прямого произведения атомов различными способами, поскольку каждый атом V можно представить как фактор другого атома $\tilde{V}$ по действию конечной группы. Поэтому естественным является вопрос о существовании некоторого "канонического" представления особенности в виде почти прямого произведения. Н. Т. Зунг вводит понятие "минимальной модели" особенности (он также называет ее "канонической моделью"). Далее Н. Т. Зунг доказывает утверждение о том, что для каждой особенности существует единственная минимальная модель (Proposition 7.4). Это утверждение сформулировано им для особенностей произвольного типа и ранга. В такой общности оно заведомо неверно (контрпример легко строится уже для особенностей ранга 1; см. раздел 5.1 в обзоре А. В. Болсинова и А. А. Ошемкова[11]). В варианте работы[8], появившемся позднее в электронном архиве препринтов, некоторые ошибки в формулировках и доказательствах были отмечены в подстрочных примечаниях[12]. Тем не менее, для седловых особенностей

[9] В. С. Матвеев, *"Интегрируемые гамильтоновы системы с двумя степенями свободы. Топологическое строение насыщенных окрестностей точек типа фокус-фокус и седло-седло"*, Матем. сборник, **187**, № 4, (1996), 29–58.

[10] A. V. Bolsinov, V. S. Matveev, *"Integrable Hamiltonian systems: Topological structure of saturated neighborhoods of nondegenerate singular points"*, In book: "Tensor and vector analysis. Geometry, mechanics, and physics" (Edited by A. T. Fomenko, O. V. Manturov, V. V. Trofimov), Gordon and Breach Sci. Publ., 1998, p. 31–56.

[11] A. V. Bolsinov, A. A. Oshemkov, *"Singularities of integrable Hamiltonian systems"*, In book: "Topological methods in the theory of integrable systems" (Edited by A. V. Bolsinov, A. T. Fomenko, A. A. Oshemkov), Cambridge Sci. Publ., 2006, p. 1–67.

[12] arXiv:math.DS/0106013v1

ранга 0 утверждение о единственности минимальной модели (и его доказательство, приведенное Н. Т. Зунгом) верно. Отметим, что это утверждение следует также из результатов диссертации.

Представление особенностей в виде почти прямых произведений достаточно удобно для описания списков особенностей, а также особенностей конкретных систем. Однако теорема Н. Т. Зунга о разложении особенности в почти прямое произведение не позволяет непосредственно получить список особенностей данного типа и данной сложности, поскольку не дает ответа на вопрос о том, как устроены сомножители почти прямого произведения и действие группы на них.

Задача полулокальной классификации седловых особенностей произвольной сложности и для произвольного числа степеней свободы решена в диссертации (глава 2). В частности, для таких особенностей построен полный топологический инвариант и получены оценки на сложность сомножителей в минимальной модели.

Третья глава диссертации посвящена классификации потоков Морса–Смейла на двумерных многообразиях. Здесь нет прямой связи с основной темой исследования (особенностями интегрируемых гамильтоновых систем), но для решения этой задачи применены те же подходы и методы.

Вопросы, связанные с качественным исследованием динамических систем на двумерных многообразиях (в частности, классификация таких систем) обсуждались многими авторами. Первые важные результаты в этом направлении были получены в работах А. А. Андронова, Л. С. Понтрягина[13], Е. А. Леонтович, А. Г. Майера[14] [15] [16], где исследовались векторные поля достаточно общего вида. В дальнейшем С. Смейл[17] [18] выделил класс потоков (названных впоследствии потоками Морса–Смейла), которые на двумерном многообразии, с одной стороны, являются типичными, а с другой стороны, имеют простое качественное описание.

М. М. Пейксото[19] ввел понятие "различающего графа", сопоставляемого произвольному потоку Морса–Смейла, и сформулировал теорему о том, что этот граф является полным топологическим инвариантом, классифи-

[13] А. А. Андронов, Л. С. Понтрягин, *"Грубые системы"*, ДАН СССР, **14**, № 5, (1937), 247–250.

[14] Е. А. Леонтович, А. Г. Майер, *"О траекториях, определяющих качественную структуру разбиения сферы на траектории"*, ДАН СССР, **14**, № 5, (1937), 251–257.

[15] Е. А. Леонтович, А. Г. Майер, *"О схеме, определяющей топологическую структуру разбиения на траектории"*, ДАН СССР, **103**, № 4, (1955), 557–560.

[16] А. Г. Майер, *"О траекториях на ориентируемых поверхностях"*, Мат. сборник, **12(54)**, № 1, (1943), 71–84.

[17] С. Смейл, *"Неравенства Морса для динамических систем"*, Сб. пер. Мат., **11**, № 4, (1967), 79–87.

[18] С. Смейл, *"Дифференцируемые динамические системы"*, УМН, **25**, вып. 1, (1970), 113–185.

[19] M. M. Peixoto, *"On the classification of flows on 2-manifolds"*, In book: "Dynamical systems", New York, London: Academic Press, 1973, p. 389–419.

цирующим потоки Морса–Смейла на двумерных многообразиях с точностью до траекторной топологической эквивалентности. Однако инвариант, предъявленный М. М. Пейксото, имеет сложное описание. Поэтому трудно реализовать алгоритм сравнения двух таких графов или, например, алгоритм их перечисления для малого количества вершин. Более того, на самом деле, различающий граф является полным траекторным топологическим инвариантом лишь для потоков Морса–Смейла без предельных циклов (такие потоки называют также потоками Морса). Утверждение о том, что классы эквивалентности потоков Морса–Смейла находятся во взаимно-однозначном соответствии с различающими графами в самой работе[19] не доказывается, но приводится ссылка на другую работу[20], где, как говорит М. М. Пейксото, "с точностью до обозначений доказана содержательная часть этого утверждения".

В диссертации показано, что различающий граф Пейксото не является полным инвариантом. А именно, приведен пример траекторно топологически не эквивалентных потоков с одинаковым различающим графом.

Позже появились другие описания инварианта Пейксото или похожих инвариантов. Так, например, Г. Флейтас[21] описал некоторый инвариант для потоков Морса на двумерных многообразиях, который существенно проще, чем инвариант Пейксото. В работе К. Вонга[22] также предъявляется более простой инвариант для потоков Морса–Смейла на ориентируемых двумерных многообразиях, но поскольку К. Вонг строит свой инвариант на основе работы Пейксото, этот новый инвариант также является полным инвариантом лишь для потоков Морса. Теорема 4.14 работы К. Вонга утверждающая, что этот инвариант классифицирует потоки Морса–Смейла общего вида на двумерных многообразиях, неверна (в работе она не доказывается).

Одна из целей главы 3 диссертации — дать описание полного траекторного топологического инварианта, классифицирующего произвольные потоки Морса–Смейла на произвольных двумерных многообразиях.

Другая цель заключается в следующем. В работах А. Т. Фоменко[23] [24] была получена классификация особенностей боттовских интегралов на

[20] M. C. Peixoto, M. M. Peixoto, *"Structural stability in the plane with enlarged boundary conditions"*, Anais Acad. Brasil. Ciências, **31**, № 2, (1959), 135–160.

[21] G. Fleitas, *"Classification of gradient-like flows on dimensions two and three"*, Bol. Soc. Bras. Mat., **6**, (1975), 155–183.

[22] X. Wang, *"The C^*-algebras of Morse–Smale flows on two-manifolds"*, Ergod. Th. & Dynam. Sys., **10**, (1990), 565–597.

[23] А. Т. Фоменко, *"Топология поверхностей постоянной энергии интегрируемых гамильтоновых систем и препятствия к интегрируемости"*, Изв. АН СССР, Сер. мат., **50**, № 6, (1986), 1276–1307.

[24] А. Т. Фоменко, *"Теория Морса интегрируемых гамильтоновых систем"*, ДАН СССР, **287**, № 5, (1986), 1071–1075.

изоэнергетических поверхностях гамильтоновой системы с двумя степенями свободы. Позже достаточно удобное и формальное описание этой классификации было дано в работе А. В. Болсинова, С. В. Матвеева, А. Т. Фоменко[25], где были введены понятия атомов и молекул. Разработанный подход, терминология, система обозначений оказались удобными для классификации не только интегрируемых гамильтоновых систем, но и других естественных геометрических объектов. Таким образом, вторая цель главы 3 диссертации — продемонстрировать, как указанный подход может быть применен к решению задачи траекторной топологической классификации потоков Морса–Смейла на двумерных поверхностях.

В четвертой главе диссертации обсуждаются некоторые "глобальные" свойства интегрируемых гамильтоновых систем и их особенностей.

Вопрос о "классификации" систем на данном фазовом пространстве (т.е. получении их "списка") в общем случае, конечно, не решен. Отметим один важный частный результат на эту тему: для интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы А. Т. Фоменко и Х. Цишангом[26] был построен полный топологический инвариант, решющий задачу классификации (с точностью до лиувиллевой эквивалентности) на трехмерных изоэнергетических поверхностях.

Отметим также еще один результат Н. Т. Зунга[27]. Он вводит понятие "характеристического класса Черна" для интегрируемой гамильтоновой системы и доказывает, что этот инвариант является полным инвариантом систем, рассматриваемых с точностью до лиувиллевой эквивалентности. Следует отметить, что инвариант, предложенный Н. Т. Зунгом является полезным инструментом при сравнении двух систем, но не позволяет описать класс возможных систем, например, на данном конкретном фазовом пространстве.

Глава 5 диссертации посвящена применению разработанных методов топологического анализа интегрируемых гамильтоновых систем к нескольким конкретным системам.

Множество примеров систем, исследованных ранее различными методами (в частности, методами теории топологической классификации), содержатся в книге А. В. Болсинова, А. Т. Фоменко[2]. Выбор примеров, ис-

[25] А. В. Болсинов, С. В. Матвеев, А. Т. Фоменко, *"Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Список систем малой сложности"*, УМН, **45**, вып. 2(272), (1990), 49–77.

[26] А. Т. Фоменко, Х. Цишанг, *"Топологический инвариант и критерий эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы"*, Известия АН СССР, **54**, № 3, (1990), 546–575.

[27] Nguyen Tien Zung, *"Symplectic topology of integrable Hamiltonian systems, II: Topological classification"*, Compositio Math., **138**, № 2, (2003), 125–156.

следованных в главе 5 был отчасти мотивирован тем, чтобы показать, как работают указанные методы в различных ситуациях (например, когда гамильтоновы поля неполны или когда система обладает бигамильтоновой структурой).

Цель работы и основные задачи

Основные цели диссертации — разработка новых топологических методов исследования интегрируемых гамильтоновых систем, в частности, методов изучения особенностей интегрируемых гамильтоновых систем, а также применение этих методов к исследованию конкретных интегрируемых систем, возникающих в механике, физике, геометрии.

Основные задачи диссертации: получение полулокальной классификации чисто гиперболических особенностей многомерных интегрируемых гамильтоновых систем и изучение свойств их минимальных моделей; исследование топологических свойств множества особых точек интегрируемой гамильтоновой системы как подмножества в фазовом пространстве и описание таких подмножеств для комплексной проективной плоскости; классификация потоков Морса–Смейла на двумерных поверхностях; разработка новых методов топологического анализа интегрируемых гамильтоновых систем и применение этих методов к некоторым конкретным системам, в частности, к случаю Соколова на алгебре Ли $\mathrm{so}(4)$, задаче двух центров на двумерной сфере, случаю Манакова в динамике n-мерного твердого тела.

Основные методы исследования

В работе используются методы теории Морса, алгебраической топологии, теории топологической классификации интегрируемых гамильтоновых систем, теории алгебр Ли, симплектической геометрии.

Научная новизна

В диссертации получены следующие новые результаты.

1) Решена задача полулокальной классификации чисто гиперболических особенностей ранга 0 для интегрируемых гамильтоновых систем с любым числом степеней свободы. В частности, построен новый топологический инвариант (f_n-граф), решающий эту задачу, описан алгоритм, реализующий перечисление указанных инвариантов, эффективность этого алгоритма продемонстрирована на примере составления списков особенностей малой сложности.

2) Для чисто гиперболических особенностей ранга 0 интегрируемых гамильтоновых систем с любым числом степеней свободы построен алгоритм нахождения сомножителей минимальной модели по f_n-графу, а также получена оценка для сложности атомов, являющихся сомножителями минимальной модели особенности произвольной сложности, не зависящая от числа степеней свободы, что обобщает известный ранее результат об особенностях сложности 1.

3) Описаны гомологические свойства комплекса особенностей для интегрируемой гамильтоновой системы с двумя степенями свободы. В частности, доказано, что циклы, заданные особыми точками интегрируемой гамильтоновой системы фиксированного ранга, двойственны по Пуанкаре соответствующим классам Чженя касательного расслоения фазового пространства. Также доказано, что подмногообразия, заполненные гиперболическими особенностями, имеют тривиальное нормальное расслоение в фазовом пространстве системы. В качестве следствия получено описание всех систем с невырожденными особенностями на комплексной проективной плоскости.

4) Предъявлен новый топологический инвариант, классифицирующий потоки Морса-Смейла на двумерных поверхностях. В частности, получен список таких потоков для малой сложности.

5) Проведен топологический анализ интегрируемого случая Соколова на алгебре Ли so(4). В частности, вычислены инварианты Фоменко для этой интегрируемой системы.

6) Исследована топология задачи двух центров на двумерной сфере. В частности, вычислены соответствующие инварианты Фоменко–Цишанга. Тем самым на этом примере продемонстрирована возможность применения теории топологической классификации к интегрируемым системам, гамильтоновы потоки которых не являются полными.

7) Для интегрируемых систем, обладающих бигамильтоновой структурой, получено описание в алгебраических терминах множества особенностей ранга 0 и условие их невырожденности. В частности, на основе этих результатов получено описание особенностей многомерной интегрируемой системы, описывающей динамику n-мерного твердого тела.

Теоретическая и практическая ценность

Диссертация носит теоретический характер. Полученные в ней результаты могут быть использованы при проведении топологического анализа конкретных интегрируемых гамильтоновых систем, а также в различных задачах, связанных с изучением и классификацией особенностей отображения момента, исследованием интегрируемых систем на алгебрах Ли, бигамильтоновых систем.

Апробация результатов

Результаты диссертации неоднократно излагались на семинаре «Современные геометрические методы» и Кафедральном семинаре кафедры дифференциальной геометрии и приложений Механико-математического факультета МГУ, а также на научно-исследовательских семинарах в различных зарубежных научных центрах (Токио, Лейпциг, Бохум, Бремен, Бонн, Йена, Белград, Лафборо). Кроме того, были сделаны доклады на следующих международных конференциях:

- International conference dedicated to the 90th anniversary of L. S. Pontryagin (1998, Москва).
- Symposium dedicated to 150th anniversary of birthday of Sofia V. Kovalevskaya (2000, Санкт-Петербург).
- International conference «Differential Equations and Related Topics» dedicated to the Centenary Anniversary of I. G. Petrovskii (2001, Москва).
- International conference «Contemporary Geometry and Related Topics» (2002, Белград).
- International conference «Classical Problems in the Rigid Body Dynamics» (2004, Донецк).
- The 3rd Seminar on Geometry & Topology (2004, Табриз).
- International conference «Alexandroff Readings» dedicated to 110th anniversary of birthday of P. S. Alexamdroff (2006, Москва).
- International Conference «Geometry, Dynamics, Integrable Systems» (2008, Белград).
- International conference «Modern problems of mathematics, mechanics and their applications» dedicated to the 70th anniversary of rector of MSU acad. V. A. Sadovnichy (2009, Москва).

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в 16 работах автора, список которых приведен в конце автореферата (тезисы докладов не включены в этот список) [1–16].

Структура диссертации

Диссертация состоит из введения и 5 глав, разбитых на разделы и подразделы. Объем диссертации — 268 страниц, список литературы включает 124 наименования.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** содержится история вопроса, формулируются цели работы, дается краткое описание основных результатов и структуры диссертации.

Глава 1 содержит основные определения, описание некоторых методов топологического анализа интегрируемых гамильтоновых систем, а также изложение необходимых классических результатов.

Слоение Лиувилля.

Говоря об *интегрируемой гамильтоновой системе*, мы имеем в виду набор данных $(M, \omega, F_1, \ldots, F_n)$, где (M, ω) — это гладкое $2n$-мерное симплектическое многообразие (фазовое пространство), а $F_1, \ldots, F_n$ — гладкие функции на M (интегралы), которые функционально независимы почти всюду и для которых соответствующие векторные поля $\operatorname{sgrad} F_i$ попарно коммутируют и полны на M (через $\operatorname{sgrad} f$ обозначено поле, двойственное df относительно ω).

Интегрируемой гамильтоновой системе $(M, \omega, F_1, \ldots, F_n)$ соответствует *отображение момента* $\mathbf{F} \colon M \to \mathbb{R}^n$, определяемое формулой $\mathbf{F}(x) = (F_1(x), \ldots, F_n(x))$.

Точки, в которых интегралы зависимы, называются *особыми точками* системы. Они являются критическими точками отображения момента $\mathbf{F}$. Если $\operatorname{rank} d\mathbf{F}(x) = r$, то x является *особой точкой ранга* r (или *особой точкой коранга* $n - r$). Обозначим множество всех критических точек через K. Множество критических значений $\Sigma = \mathbf{F}(K)$ называется *бифуркационной диаграммой* отображения момента $\mathbf{F}$.

Слоение на фазовом пространстве M интегрируемой гамильтоновой системы $(M, \omega, F_1, \ldots, F_n)$, образованное связными компонентами прообразов $\mathbf{F}^{-1}(y)$ при отображении момента, называется *слоением Лиувилля*, соответствующим этой системе.

Слои слоения Лиувилля, не содержащие особых точек, называются *регулярными*. Все остальные слои называются *особыми* (или *сингулярными*). Согласно классической теореме Лиувилля все компактные регулярные слои являются n-мерными торами (*торы Лиувилля*). Особый слой L является *особенностью ранга* r (*коранга* $n - r$), если $r = \min\limits_{x \in L} \operatorname{rank} d\mathbf{F}(x)$.

Лиувиллева эквивалентность.

Две интегрируемые гамильтоновы системы на U_1 and U_2 называются *лиувиллево эквивалентными*, если существует диффеоморфизм $\Psi\colon U_1 \to U_2$, отображающий каждый слой слоения Лиувилля на U_1 в слой слоения Лиувилля на U_2.

Выбирая в качестве множеств U_1 и U_2 окрестности особых точек или окрестности особых слоев соответствующих слоений Лиувилля, мы, фактически, говорим об "эквивалентности особенностей" интегрируемых систем. Более точно, *локальная* и *полулокальная* классификации особенностей интегрируемых гамильтоновых систем означают их классификацию относительно следующих отношений эквивалентности.

Определение. Пусть x_1 и x_2 — критические точки отображений момента для интегрируемых гамильтоновых систем на (M_1, ω_1) и (M_2, ω_2) соответственно, а $L_1 \ni x_1$ и $L_2 \ni x_2$ — особые слои соответствующих слоений Лиувилля. Будем говорить, что эти *особенности локально* (соотв. *полулокально*) *лиувиллево эквивалентны*, если существуют такие окрестности U_1 и U_2 точек x_1 и x_2 (соотв. слоев L_1 и L_2), что системы на U_1 и U_2 лиувиллево эквивалентны, причем отображение Ψ, устанавливающее эту эквивалентность, отображает точку x_1 в точку x_2 (соотв. слой L_1 в слой L_2).

Невырожденность.

Если $x \in M$ — особая точка ранга 0 интегрируемой гамильтоновой системы $(M, \omega, F_1, \ldots, F_n)$, то для каждой функции F_i линеаризация векторного поля $\operatorname{sgrad} F_i$ в точке x задает оператор A_{F_i}, который может быть интерпретирован как элемент алгебры Ли $\mathrm{sp}(T_xM)$ (т. е. алгебры Ли группы линейных симплектических преобразований касательного пространства T_xM). Поскольку интегралы $F_1, \ldots, F_n$ попарно коммутируют, каждая особая точка x ранга 0 задает коммутативную подалгебру $\mathfrak{h}_x$ в $\mathrm{sp}(T_xM)$ порожденную операторами $A_{F_1}, \ldots, A_{F_n}$. Особая точка $x \in M^{2n}$ ранга 0 называется *невырожденной*, если $\mathfrak{h}_x$ является подалгеброй Картана в алгебре Ли $\mathrm{sp}(T_xM)$.

Для особой точки $x \in M$ ранга r рассмотрим следующие два линейных подпространства в T_xM: подпространство L_x, порожденное косыми градиентами функций $F_1, \ldots, F_n$ в точке x, и его косо-ортогональное дополнение L'_x. Форма ω индуцирует симплектическую форму $\tilde{\omega}$ на факторпространстве L'_x/L_x. Размерность стабилизатора St_x точки x (при гамильтоновом действии, порожденном функциями $F_1, \ldots, F_n$) равна $n-r$. Связная компонента единицы группы St_x изоморфна $\mathbb{R}^{n-r}$ и ее действие на M порождает действие на T_xM линейными симплектическими преобразованиями. Поскольку L_x и L'_x инвариантны относительно этого действия, мы получаем симплектическое (относительно формы $\tilde{\omega}$) действие группы $\mathrm{St}_x = \mathbb{R}^{n-r}$ на пространстве L'_x/L_x размерности $2(n-r)$ и коммутативную подалгебру $\tilde{\mathfrak{h}}_x$ в алгебре Ли $\mathrm{sp}(L'_x/L_x, \tilde{\omega})$. Особая точка $x \in M^{2n}$ ранга r называется *невырожденной*, если $\tilde{\mathfrak{h}}_x$ является подалгеброй Картана в алгебре Ли $\mathrm{sp}(L'_x/L_x, \tilde{\omega})$.

Особый слой L слоения Лиувилля $\mathcal{L}$ будем называть *невырожденным*, если все его точки являются невырожденными.

Теорема 1 (теорема Элиассона). *Пусть x — невырожденная особая точка ранга r интегрируемой гамильтоновой системы $(M, \omega, F_1, \ldots, F_n)$. Тогда в некоторой окрестности точки x можно ввести симплектические координаты $q_1, \ldots, q_n$, $p_1, \ldots, p_n$ и заменить интегралы $F_1, \ldots, F_n$ на $\widetilde{F}_1, \ldots, \widetilde{F}_n$ (задающие то же самое слоение Лиувилля), так что функции $\widetilde{F}_i(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$ при $i = 1, \ldots, r$ имеют вид $\widetilde{F}_i = p_i$, а при $i > r$ — один из следующих видов*:

$$
\begin{array}{lll}
(1) & \widetilde{F}_i = p_i^2 + q_i^2 & (\textit{эллиптический случай}), \\
(2) & \widetilde{F}_i = p_i q_i & (\textit{гиперболический случай}), \\
(3) & \begin{array}{l} \widetilde{F}_i = p_i q_{i+1} - p_{i+1} q_i \\ \widetilde{F}_{i+1} = p_i q_i + p_{i+1} q_{i+1} \end{array} & (\textit{случай фокус-фокус}).
\end{array}
$$

Из теоремы Элиассона следует, что локальная структура невырожденной особенности однозначно характеризуется ее *типом*, т. е. ее (ко)рангом и количеством эллиптических, гиперболических и фокусных компонент.

Почти прямые произведения.

Пусть $(M^{2k}, \omega, F_1, \ldots, F_k)$ и $(\tilde{M}^{2l}, \tilde{\omega}, \tilde{F}_1, \ldots, \tilde{F}_l)$ — интегрируемые гамильтоновы системы. Рассмотрим прямое произведение $M^{2k} \times \tilde{M}^{2l}$. Интегралы $F_i, \tilde{F}_j$ и 2-формы $\omega, \tilde{\omega}$ естественным образом поднимаются на многообразие $M^{2k} \times \tilde{M}^{2l}$ (сохраним для них прежние обозначения). В результате мы получаем новую интегрируемую систему (с $k+l$ степенями свободы)

$$(M^{2k} \times \tilde{M}^{2l}, \omega + \tilde{\omega}, F_1, \ldots, F_k, \tilde{F}_1, \ldots, \tilde{F}_l).$$

Интегрируемая гамильтонова система, полученная описанным способом, называется *прямым произведением*. Аналогичным образом эту операцию можно определить для произвольного числа сомножителей. Особенность интегрируемой гамильтоновой системы, рассматриваемая с локальной (соотв. полулокальной) точки зрения, называется *особенностью типа прямого произведения*, если она локально (соотв. полулокально) эквивалентна прямому произведению систем на некоторых окрестностях соответствующих точек (соотв. слоев).

Из теоремы Лиувилля следует, что любую интегрируемую гамильтонову систему с n степенями свободы в окрестности тора Лиувилля можно рассматривать как прямое произведение n тривиальных систем с одной степенью свободы. Теорема Элиассона говорит о том, что локально каждая невырожденная особенность может быть разложена в прямое произведение базисных невырожденных особенностей (двумерных и четырехмерных). аналогичное описание топологии невырожденных особенностей существует и в полулокальном случае. Это описание дается в терминах "почти прямых произведений", которые определяются следующим образом.

Рассмотрим особенность $U = W_1 \times \cdots \times W_m$, являющуюся прямым произведением особенностей, и действия $\rho_1, \ldots, \rho_m$ конечной группы G на ее сомножителях, удовлетворяющие следующим условиям:

- каждое отображение $\rho_i(g) \colon W_i \to W_i$ является симплектоморфизмом, сохраняющим функции, которые определяют слоение Лиувилля на W_i;
- действие ρ группы G на $U = W_1 \times \cdots \times W_m$, заданное формулой $\rho(g)(x_1, \ldots, x_m) = (\rho_1(g)(x_1), \ldots, \rho_m(g)(x_m))$, свободно.

Факторизуя пространство $U = W_1 \times \cdots \times W_m$ по действию ρ группы G, мы получаем гладкое многообразие U/G, причем симплектическая структура и коммутирующие функции, определяющие слоение Лиувилля, переносятся естественным образом с U на U/G. Особенности вида $(W_1 \times \cdots \times W_m)/G$ называются *почти прямыми произведениями.* Особенности, лиувиллево эквивалентные почти прямым произведениям, будем называть *особенностями типа почти прямого произведения.*

Как было доказано Н. Т. Зунгом, все невырожденные особенности, удовлетворяющие некоторому естественному "условию нерасщепляемости", лиувиллево эквивалентны почти прямым произведениям простейших (двумерных и четырехмерных) особенностей. Мы сформулируем "условие нерасщепляемости" и теорему Зунга "о разложении" для случая гиперболических особенностей ранга 0.

Определение. Будем говорить, что невырожденная гиперболическая особенность ранга 0 для системы с n степенями свободы удовлетворяет *условию нерасщепляемости*, если для некоторой окрестности U особого слоя L бифуркационная диаграмма отображения момента $\mathbf{F} : U \to \mathbb{R}^n$ может быть переведена некоторым диффеоморфизмом $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ в объединение координатных гиперплоскостей.

Теорема 2 (теорема Зунга). *Любая невырожденная гиперболическая особенность ранга* 0 (*для системы с n степенями свободы*), *удовлетворя-*

ющая условию нерасщепляемости, полулокально лиувиллево эквивалентна почти прямому произведению гиперболических особенностей систем с одной степенью свободы (*т.е. атомов*).

Определение. *Минимальная модель* — это такое почти прямое произведение атомов $(V_1 \times \cdots \times V_n)/G$, что каждый (нетривиальный) элемент группы G действует нетривиально не менее чем на двух компонентах произведения $V_1 \times \cdots \times V_n$.

В **главе 2** рассматриваются невырожденные особенности ранга 0, имеющие только гиперболические компоненты. Основная цель — получить полулокальную классификацию таких особенностей с точностью до лиувиллевой эквивалентности.

Опишем более точно класс особенностей, для которых решается задача классификации:

1) рассматриваемый особый слой невырожден и содержит лишь конечное число особых точек ранга 0, причем все они чисто гиперболические;
2) в некоторой окрестности рассматриваемого особого слоя все слои слоения Лиувилля компактны;
3) рассматриваемая особенность удовлетворяет условию нерасщепляемости.

Особенности, для которых выполнены условия 1–3, будем называть *седловыми особенностями.*

Ясно, что имеется бесконечное число неэквивалентных седловых особенностей. Поскольку n (число степеней свободы) и k (сложность, т. е. количество особых точек ранга 0 на слое) являются инвариантами седловой особенности относительно лиувиллевой эквивалентности, имеет смысл говорить о классификации особенностей для данной пары чисел n и k. Тем самым бесконечный "список" всех особенностей можно разбить на конечные части.

Задача полулокальной классификации седловых особенностей с точностью до лиувиллевой эквивалентности может быть сформулирована следующим образом: описать алгоритм, позволяющий для данных n и k получить полный список неэквивалентных седловых особенностей сложности k для систем с n степенями свободы.

Поставленная задача решается в работе следующим образом: каждой невырожденной седловой особенности ранга 0 сопоставляется комбинаторный объект (f_n-граф), являющийся графом с дополнительной структурой в виде раскраски ребер и ориентации некоторых ребер. Это сопоставление становится однозначным, если рассматривать f_n-графы с точностью до применения к ним двух простых операций (называемых изменением ориентации и переворачиванием). Тем самым задача полулокальной классификации седловых особенностей ранга 0 сводится к задаче перечисления f_n-графов.

Один из основных результатов данной главы — следующая теорема классификации.

Теорема 3. *Две седловые особенности интегрируемых гамильтоновых систем с n степенями свободы полулокально лиувиллево эквивалентны тогда и только тогда, когда соответствующие им f_n-графы эквивалентны. При этом любой связный f_n-граф соответствует некоторой седловой особенности.*

Доказательство этой теоремы основано на том, что построенное соответствие между невырожденными седловыми особенностями ранга 0 и f_n-графами является естественным в следующем смысле: операция прямого произведения простейших особенностей (атомов) соответствует операции произведения f-графов, а факторизация прямых произведений особенностей по свободному покомпонентному действий конечной группы соответствует аналогичной факторизации f_n-графов. В силу теоремы Зунга все особенности, удовлетворяющие условию нерасщепляемости, могут быть получены из атомов при помощи этих двух операций.

В разделе 2.1 вводится понятие f-графа (это f_n-граф при $n = 1$), с помощью которого решается задача классификации седловых особенностей для систем с одной степенью свободы (или, что то же самое, функций Морса на двумерных поверхностях с одним критическим седловым значением; такой объект также называется *атомом*). В разделе 2.2 приводится обзор известных ранее результатов о классификации седловых особенностей. В разделе 2.3 описано построение инварианта (f_n-графа). Раздел 2.4 посвящен доказательству теоремы классификации.

В разделе 2.5 дана другая интерпретация построенного инварианта (на языке наборов перестановок, удовлетворяющих некоторым условиям коммутирования) и описан алгоритм, позволяющий получить список седловых особенностей сложности k для систем с n степенями свободы. Приведем некоторые результаты вычислений по разработанным алгоритмам для особенностей малой сложности.

Предложение. 1) *Для интегрируемых гамильтоновых систем с $n = 2$ степенями свободы количество попарно неэквивалентных седловых особенностей сложности $k = 1, 2, 3$ равно соответственно $4, 39, 147$.*

2) *Для интегрируемых гамильтоновых систем с $n = 1, 2, 3, 4$ сте-*

пенями свободы количество попарно неэквивалентных седловых особенностей сложности $k = 1$ *равно* 1, 4, 32, 622 *соответственно.*

Отметим, что программа, реализующая указанный алгоритм, выдает, конечно, не только количество, но и список особенностей. В частности, в разделе 2.7 приведен список из 32 особенностей сложности 1 для трех степеней свободы, в котором исправлены ошибки, имевшиеся в списке из работы В. В. Калашникова[7].

В разделе 2.7 более подробно исследованы особенности сложности 1. Доказано, что в этом случае в каждом классе эквивалентности f_n-графов сложности 1 можно однозначно выбрать "простой" f_n-граф. Вследствие этого удалось упростить формулировку теремы классификации для особенностей сложности 1, заменив в ней "эквивалентность" f_n-графов на "изоморфность". Еще один эффект, обнаруженный для особенностей сложности 1, заключается в том, что перестановки, соответствующие данному f_n-графу сложности 1, задают на множестве его вершин структуру аффинного пространства (над полем $\mathbb{Z}_2$) и набор аффинных преобразований. Точнее, каждому f_n-графу сложности 1 соответствует набор аффинных преобразований $P_1, \dots P_n$, $Q_1, \dots, Q_n \in \mathrm{GA}(n, \mathbb{Z}_2)$, удовлетворяющих следующим условиям:

(A1) $P_1, \dots P_n$ образуют базис в подгруппе сдвигов группы $\mathrm{GA}(n, \mathbb{Z}_2)$;
(A2) $Q_1, \dots, Q_n$ попарно коммутируют;
(A3) $P_i Q_j = Q_j P_i$ при $i \neq j$.

Если рассматривать такие наборы с точностью до сопряжения в группе $\mathrm{GA}(n, \mathbb{Z}_2)$ и перенумерации базисных элементов, то указанное соответствие является взаимно-однозначным. Это позволяет переформулировать теорему классификации для особенностей сложности 1 в алгебраических терминах и упростить алгоритм их перечисления.

Приведем еще одно утверждение, доказанное в разделе 2.7, косвенно показывающее, что если говорить лишь о количестве седловых особенностей (для данных n и k), то вряд ли можно надеяться на получение некоторой "формулы".

Предложение. 1) *Для интегрируемых гамильтоновых систем с* n *степенями свободы количество седловых особенностей сложности* 1, *для которых сомножителями минимальной модели являются лишь атомы* B *и* C_2, *равно количеству всех ориентированных графов с* n *вершинами без петель и кратных ребер.*

2) *Для интегрируемых гамильтоновых систем с* n *степенями свободы количество седловых особенностей сложности* 1, *для которых сомножителями минимальной модели являются один атом* B *и* $n-1$ *атомов* P_4, *равно количеству всех неориентированных графов без петель и крат-*

ных ребер, число вершин которых равно $n-1$, причем ни одна из вершин не является изолированной.

Еще один вопрос, исследуемый в главе 2 (раздел 2.6), связан с описанием сомножителей минимальной модели. Обозначим через $\mathcal{A}_{k,n}$ множество атомов, которые могут быть сомножителями минимальной модели для седловой особенности сложности k интегрируемой гамильтоновой системы с n степенями свободы (в частности, $\mathcal{A}_{k,1}$ — это просто множество всех атомов сложности k). Введем также следующие обозначения: $|V|$ — сложность атома V, а sV — несвязное объединение s экземпляров атома V.

Теорема 4. *Если $V \in \mathcal{A}_{k,n}$, то*
1) $|V| \leq k2^{2k}$,
2) *$|V|$ является делителем числа $k2^{n-1}$,*
3) *существует свободное действие $\mathbb{Z}_2^{n-1}$ на sV, где $s \cdot |V| = k2^{n-1}$.*

Как было замечено В. В. Калашниковым[7], множества $\mathcal{A}_{1,n}$ одинаковы при всех $n \geq 3$ (они состоят из четырех атомов B, D_1, C_2, P_4), т. е. для особенностей сложности 1 все возможные сомножители их минимальных моделей "появляются" при перечислении особенностей с числом степеней свободы $n = 3$. Следующее утверждение показывает, что тот же эффект имеет место для любой сложности: все атомы, являющиеся сомножителями минимальных моделей для особенностей сложности k, возникают при классификации особенностей с числом степеней свободы $n = 2k+1$ (в том числе, возможно, меньшей сложности).

Теорема 5. *Если $n \geq 2k+1$, то $\mathcal{A}_{k,n} \subset \bigcup_{l=1}^{k} \mathcal{A}_{l,2k+1}$.*

Наконец, в разделе 2.8 приводится пример седловой особенности, не являющейся почти прямым произведением. Это невырожденная особенность сложности 6 (две степени свободы). Доказательство того, что она не представима в виде почти прямого произведения, основано на том, что ее особый слой устроен иначе, чем особые слои особенностей типа почти прямого произведения (двумерные клетки имеют вид треугольников и 6-угольников, а не квадратов).

В **главе 3** решается задача классификации потоков Морса–Смейла на замкнутых двумерных многообразиях с точностью до *траекторной топологической эквивалентности* (т. е. с точностью до гомеоморфизма, переводящего траектории в траектории с сохранением ориентации.

В разделе 3.1 строится инвариант для потоков Морса (*трехцветный граф*), представляющий из себя граф, все вершины которого имеют степень 3, а ребра раскрашены в три цвета таким образом, что в каждой вершине сходятся ребра трех разных цветов. Два трехцветных графа считаются *изоморфными*, если они изоморфны как графы с сохранением раскраски. Цвета обозначаются буквами s, t, u, а циклы, на которые распадается трехцветный граф после выбрасывания всех ребер одного цвета, называются *tu-циклами*, *su-циклами* и *st-циклами*.

Далее в разделе 3.1 описывается процедура сопоставления каждому потоку Морса (отличному от *простейшего*, т. е. не имеющего седел) некоторого трехцветного графа. Сепаратрисы потока разрезают поверхность на "четырехугольники", каждый из которых затем разрезается еще одной траекторией, идущей из источника в сток, на два треугольника. Стороны каждого из полученных треугольников имеют тип s (траектория из источника в седло), u (траектория из седла в сток) и t (траектория из источника в сток). Трехцветный граф, сопоставляемый потоку, можно рассматривать как граф, двойственный этому разбиению на треугольники, с естественной раскраской.

В следующем утверждении собраны вместе результаты раздела 3.1.

Теорема 6. 1) *Два потока Морса на двумерных поверхностях* (*отличные от простейшего*) *топологически траекторно эквивалентны тогда и только тогда, когда соответствующие им трехцветные графы изоморфны.*

2) *Трехцветный граф соответствует некоторому потоку Морса на двумерной поверхности тогда и только тогда, когда все его su-циклы имеют длину* 4.

3) *Пусть $T(v)$ — инвариант потока Морса v, заданного на поверхности M. Тогда*

a) *эйлерова характеристика поверхности M равна*

$$\chi(M) = m_0(T(v)) - m_1(T(v)) + m_2(T(v)),$$

где $m_0(T)$, $m_1(T)$ и $m_2(T)$ соответственно количество st-циклов, su-циклов и tu-циклов;

b) *поверхность M ориентируема тогда и только тогда, когда граф $T(v)$* (*без учета раскраски*) *не имеет циклов нечетной длины.*

В разделе 3.2 дано описание других траекторных топологических инвариантов для потоков Морса и, в частности, их выражение через трехцветный граф. Кроме того здесь описана связь между классификацией потоков Морса и классификацией функций Морса на двумерных поверхностях.

В разделе 3.3 приведен пример, показывающий, что различающий граф Пейксото не является полным топологическим инвариантом для потоков Морса–Смейла. Далее в разделе 3.3 строится инвариант (v-молекула), классифицирующий потоки Морса–Смейла с точностью до траекторной топологической эквивалентности. А именно, доказываются три утверждения, аналогичные трем пунктам приведенной выше теоремы для случая потоков Морса (теорема классификации, теорема реализации и теорема, описывающая топологию поверхности через характеристики соответствующей v-молекулы).

В разделе 3.4 описан один из возможных способов составления списка для построенных в данной работе инвариантов. Для этого описывается представление трехцветных графов и v-молекул в виде простого кода (строчки символов некоторого алфавита) и алгоритм перечисления этих кодов. В качестве примера реализации этого алгоритма в разделе 3.4 приведен полный список этих кодов для потоков Морса с не более чем двумя седловыми точками (15 потоков) и для потоков Морса–Смейла с не более чем тремя критическими элементами (36 потоков).

В **главе 4** рассматриваются некоторые глобальные топологические инварианты интегрируемых гамильтоновых систем.

Сначала в разделе 4.1 описывается классическая конструкция, связанная с геометрической интерпретацией классов Чженя комплексного векторного расслоения. Пусть M — компактное ориентированное многообразие, $E \to M$ — комплексное векторное расслоение ранга k, а $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_k)$ — набор глобальных гладких сечений расслоения E. *Множество вырождения* $D_j(\mathbf{s})$ определяется как множество точек $x \in M$, в которых $s_1, \ldots, s_j$ линейно зависимы. Если набор сечений удовлетворяет некоторым естественным условиям "общего положения", то на подмножествах D_j можно ввести ориентацию и рассмотреть соответствующие циклы в гомологиях, которые называются *циклами вырождения* сечений $\mathbf{s}$. В этом случае верно следующее утверждение (которое иногда называют формулой Гаусса–Бонне): *Для общего набора сечений* $\mathbf{s}$ *класс Чженя* $c_r(E)$ *двойствен по Пуанкаре циклу вырождения* D_{k-r+1} *сечений* $\mathbf{s}$.

Далее в разделе 4.1 показано, что набор коммутирующих векторных полей на симплектическом многообразии можно рассматривать как набор сечений комплексного векторного расслоения. Корректность такой процедуры вытекает из следующих двух простых утверждений.

Утверждение 1. *Для любого симплектического многообразия существует почти комплексная структура, согласованная с симплектической структурой, причем множество таких почти комплексных структур стягиваемо.*

Утверждение 2. *Пусть* (V, ω) *— вещественное линейное симплек-*

тическое пространство, а J — *(постоянная) комплексная структура на* V*, согласованная с формой* ω*. Рассмотрим набор векторов* $U = \{u_1, \ldots, u_l\}$ *в пространстве* V*. Обозначим через* $\operatorname{rk}_{\mathbb{R}} U$ *ранг системы векторов* $u_1, \ldots, u_l$*, а через* $\operatorname{rk}_{\mathbb{C}} U$ — *ранг этой системы векторов в пространстве* V*, рассматриваемом как комплексное пространство (относительно* J*). Тогда если линейная оболочка* L *системы векторов* $u_1, \ldots, u_l$ *является изотропным подпространством в* V *(т. е.* $\omega|_L \equiv 0$*), то* $\operatorname{rk}_{\mathbb{R}} U = \operatorname{rk}_{\mathbb{C}} U$.

Отметим, что даже для систем с невырожденными особенностями набор сечений $\operatorname{sgrad} F_1, \ldots, \operatorname{sgrad} F_n$ может не быть общим. Более того, легко привести примеры интегрируемых гамильтоновых систем, для которых этот набор нельзя сделать общим, выбирая другие интегралы, задающие то же самое слоение Лиувилля. В нашей ситуации роль цикла вырождения будет играть множество $\overline{K}_r$, являющееся замыканием множества особых точек ранга r.

Далее в разделе 4.1 рассматривается случай двух степеней свободы и множество $\overline{K}_1$, являющееся замыканием множества особых точек ранга 1 для интегрируемой гамильтоновой системы (M^4, ω, F_1, F_2). Если M^4 компактно, а все особые точки невырождены, то из теоремы Элиассона следует, что $\overline{K}_1$ является объединением замкнутых двумерных подмногообразий, погруженных в фазовое пространство M^4. При этом каждое из этих (погруженных) подмногообразий заполнено либо эллиптическими, либо гиперболическими одномерными орбитами соответствующего Пуассонова действия. Ориентируя "эллиптические" подмногообразия формой ω, а "гиперболические" формой $(-\omega)$, мы получаем некоторый класс гомологий $[\overline{K}_1]$ в $H_2(M^4, \mathbb{Z})$.

Теорема 7. *Пусть* (M^4, ω, F_1, F_2) — *интегрируемая гамильтонова система с невырожденными особенностями на компактном многообразии. Класс* $[\overline{K}_1] \in H_2(M^4, \mathbb{Z})$ *двойствен по Пуанкаре первому классу Чженя* $c_1(M^4) \in H^2(M^4)$*.*

В разделе 4.2 исследуются некоторые другие свойства комплекса K, образованного особыми точками интегрируемой гамильтоновой системы с двумя степенями свободы. Приведем следующий результат.

Теорема 8. *Пусть все особые точки интегрируемой гамильтоновой системы* (M^4, ω, F_1, F_2) *невырождены. Тогда любое двумерное подмногообразие, входящее в состав комплекса особенностей* K *и заполненное гиперболическими особыми точками, имеет тривиальное нормальное расслоение в* M^4*.*

В качестве примера использования полученных ограничений на классы гомологий двумерных подмногообразий, заполненных особыми точками, далее в разделе 4.2 дано описание всех систем с невырожденными особенностями на комплексной проективной плоскости.

В работе N. C. Leung и M. Symington[28] исследовались слоения Лиувилля интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы без гиперболических особенностей (такие слоения называются почти торическими слоениями). В этих работах описаны все возможные тотальные пространства таких слоений (почти торические четырехмерные многообразия) и базы соответствующих им почти торических слоений. В частности, было показано, что для $\mathbb{C}P^2$ имеется всего четыре возможности: базой почти торического слоения является двумерный диск, граница которого имеет k "углов" ($k = 0, 1, 2, 3$) и внутри которого имеется $3-k$ "узлов", соответствующих фокусным особенностям. Обозначим такую базу через D^2_k.

Теорема 9. *Существует ровно четыре типа интегрируемых гамильтоновых систем с невырожденными особенностями на симплектическом многообразии* $(\mathbb{C}P^2, \omega_0)$. *Соответствующие им слоения Лиувилля являются почти торическими слоениями с базой* D^2_k, *где* $k = 0, 1, 2, 3$.

В **главе 5** рассматриваются несколько конкретных примеров интегрируемых гамильтоновых систем. На этих примерах демонстрируется применение различных методов топологического анализа интегрируемых систем и вычисления их топологических инвариантов.

Первая система, для которой проводится топологический анализ (раздел 5.1) — это так называемый случай Соколова.

В работе В. В. Соколова[29] были описаны новые интегрируемые случаи уравнений Эйлера на шестимерных алгебрах Ли so(4), so(3, 1), e(3). Гамильтонианы всех этих случаев — квадратичные функции на алгебре Ли, а интегралы — полиномы степени 4. Алгебраические свойства этих интегрируемых случаев пока не очень понятны, хотя похоже, что имеются качественные отличия от известных ранее случаев интегрируемости (например, от случая Ковалевской, где дополнительный интеграл также имеет степень 4). Поэтому представляет интерес исследование этих интегрируемых случаев с топологической точки зрения. Основной результат, полученный для данной системы — вычисление инвариантов Фоменко.

Второй пример, рассмотренный в диссертации (раздел 5.2) — задача двух центров на сфере.

Отметим, что данная система (как и другие подобные системы, описы-

[28] N. C. Leung, M. Symington, *"Almost toric symplectic four-manifolds"*, arXiv:math/0312165, (2003).

[29] В. В. Соколов, *"Об одном классе квадратичных гамильтонианов на* so(4)*"*, Докл. РАН, **394**, № 5, (2004), 1–4.

вающие движение точки в ньютоновском потенциале) имеет особенности, связанные с неполнотой гамильтонова поля (“падение” на центр). Поэтому, формально говоря, к этой системе нельзя напрямую применить методы теории топологической классификации. Однако после проведения подходящей регуляризации это оказывается возможным. В результате для этой (регуляризованной) системы вычислены все инварианты Фоменко–Цишанга, т.е. полностью описана топология лиувиллевых слоений на изоэнергетических поверхностях.

Наконец, в разделе 5.3 рассматривается еще один пример интегрируемой системы — многомерно твердое тело.

Эту систему можно рассматривать как гамильтонову систему на алгебре Ли $\mathrm{so}(n)$. Кроме того она обладает бигамильтоновой структурой, т. е. является гамильтоновой относительно целого пучка скобок Пуассона. Поэтому сначала в разделе 5.3 описаны некоторые новые общие методы исследования особенностей бигамильтоновых систем. В результате применения этих методов к рассматриваемой системе получено описание (в алгебраических терминах) множества особых точек системы, множества ее положений равновесия, а также условий их невырожденности.

БЛАГОДАРНОСТИ

Автор выражает глубокую благодарность своему научному консультанту академику РАН Анатолию Тимофеевичу Фоменко за постоянное внимание к работе и поддержку. Автор благодарен всем сотрудникам кафедры дифференциальной геометии и приложений механико-математического факультета МГУ за исключительно теплую и дружескую атмосферу, способствующую успешной работе, а также лично Алексею Викторовичу Болсинову за многочисленные полезные обсуждения вопросов, затронутых в диссертации.

СПИСОК РАБОТ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ
(работы 1–11 входят в официальный Перечень ВАК)

[1] А. А. Ошемков, *“Функции Морса на двумерных поверхностях. Кодирование особенностей”*, Труды Математического института РАН, **205**, 131–140 (1994).

[2] А. А. Ошемков, В. В. Шарко, *“О классификации потоков Морса–Смейла на двумерных многообразиях”*, Матем. Сборник, **189**, № 8, 93-140 (1998). [Диссертанту принадлежат разделы 1.2–1.4, 2.4, 3.1, 3.3, 3.4, 4.1, 4.2.]

[3] В. С. Матвеев, А. А. Ошемков, *“Алгоритмическая классификация инвариантных окрестностей точек типа седло-седло”*, Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., Мех., № 2, 62-65 (1999). [Диссертанту принадлежит идея алгоритма, а также Лемма и Утверждение 2 Теоремы.]

[4] Т. Г. Возмищева, А. А. Ошемков, *“Топологический анализ задачи двух центров на двумерной сфере”*, Матем. Сборник, **193**, № 8, 3-38 (2002). [Диссертанту принадлежат разделы 1.1, 1.3, 2.2, 2.4.]

[5] Г. Хагигатдуст, А. А. Ошемков, *“Топология слоения Лиувилля для интегрируемого случая Соколова на алгебре Ли* $\mathrm{so}(4)$*”*, Матем. Сборник, **200**, № 6, 119–142 (2009). [Диссертанту принадлежит §3.]

[6] A. V. Bolsinov, A. A. Oshemkov, *“Bi-Hamiltonian structures and singularities of integrable systems”*, Regular and Chaotic dynamics, **14**, № 4–5, 325–348 (2009). [Диссертанту принадлежат §§ 2, 3, 6–8.]

[7] А. А. Ошемков, *“Сомножители минимальных моделей для седловых особенностей интегрируемых гамильтоновых систем”*, ДАН, **433**, № 2, 173–177 (2010).

[8] А. А. Ошемков, *“Топология множества особенностей интегрируемой гамильтоновой системы”*, ДАН, **434**, № 5, 587–590 (2010).

[9] А. А. Ошемков, *“Классификация гиперболических особенностей ранга* 0 *интегрируемых гамильтоновых систем”*, Матем. Сборник, **201**, № 8, 63–102 (2010).

[10] А. А. Ошемков, *“Классификация интегрируемых гамильтоновых систем с невырожденными особенностями на* $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$*”*, ДАН, **437**, № 4, 462–464 (2011).

[11] А. А. Ошемков, *“Седловые особенности сложности 1 интегрируемых гамильтоновых систем”*, Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., Мех., № 2, 3–12 (2011).

[12] A. A. Oshemkov, *“Computer examinatoin of integrable Hamiltonian systems”*, Int. Journ. of Shape Modeling, **1**, № 1 61–75 (1995).

[13] A. V. Bolsinov, A. A. Oshemkov, V. V. Sharko, *On classification of flows on manifolds. I*, Methods of Functional Analysis and Topology, **2**, № 2, 190–204 (1996). [Диссертанту принадлежит §3.]

[14] А. А. Ошемков, *“О топологической структуре множества особенностей интегрируемой гамильтоновой системы”*, В кн.: “Топологические методы в теории гамильтоновых систем” (под ред. А. В. Болсинова, А. Т. Фоменко, А. И. Шафаревича) — Москва, Факториал, 272–287 (1998).

[15] A. A. Oshemkov, *“The topology of the set of singular points for integrable Hamiltonian systems with two degrees of freedom”*, In book: “Proc. of the 3rd Seminar on Geometry & Topology (July 15-17, 2004, Tabriz, Iran)” — Azarbaidjan Univ. of Tarbiat Moallem, 185–204 (2004).

[16] A. V. Bolsinov, A. A. Oshemkov, *“Singularities of integrable Hamiltonian systems”*, In book: “Topological methods in the theory of integrable systems” (Edited by A. V. Bolsinov, A. T. Fomenko, A. A. Oshemkov) — Cambridge Sci. Publ., 1–67 (2006). [Это обзорная статья, результаты диссертанта содержатся в разделах 5.3 и 7.8.]