Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова

Механико-математический факультет

На правах рукописи

УДК 517

Белошапка Ольга Валериевна

# ФОРМУЛЫ ФЕЙНМАНА ДЛЯ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ НАД ПОЛЕМ $p$-АДИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

Москва, 2011

Работа выполнена на кафедре теории функций и функционального анализа Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

| | |
|---|---|
| **Научный руководитель:** | доктор физико-математических наук профессор Смолянов Олег Георгиевич. |
| **Официальные оппоненты:** | доктор физико-математических наук профессор Козырев Сергей Владимирович, кандидат физико-математических наук Шамаров Николай Николаевич. |
| **Ведущая организация:** | Московский физико-технический институт. |

Защита диссертации состоится 8 апреля 2011 года в 16 часов 40 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.85 при Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ, механико-математический факультет, ауд. 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 4 марта 2011 года.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д 501.001.85 при МГУ,
доктор физико-математических наук,
профессор В. Н. Сорокин

## Общая характеристика работы

**Актуальность темы.**

Диссертация посвящена представлению решений некоторых эволюционнных уравнений над полем $p$-адических чисел с помощью формул Фейнмана и Фейнмана-Каца.

Формулой Фейнмана называется представление решения задачи Коши для эволюционного дифференциального или псевдодифференциального уравнения в виде предела интегралов по декартовым произведениям некоторого пространства при стремлении числа сомножителей к бесконечности.

Формулой Фейнмана-Каца называется представление решения той же задачи с помощью интеграла по траекториям в том же пространстве. При этом кратные интегралы в формуле Фейнмана совпадают с интегралами, являющимися конечнократными аппроксимациями интегралов по траекториям.

Связь между эволюционными уравнениями и интегрированием по пространству траекторий впервые явно была описана Р. Фейнманом. В его статье, опубликованой в 1948 году решение уравнения Шредингера представлено в виде функционального интеграла, определяемого как предел последовательности эффективно вычисляемых интегралов по конечному произведению конфигурационных пространств. Несмотря на то, что рассуждения Фейнмана носили эвристический характер, оказалось, что им можно придать точный математический смысл. Э. Нельсон заметил, что доказательство формулы Фейнмана для представления решения уравнения Шредингера с потенциалом можно провести путем применения теоремы Троттера (доказанной независимо Ю.Л. Далецким). Таким образом было положено начало эффективному методу получения представления решений эволюционных уравнений функциональными интегралами. В работах О.Г. Смолянова, Х. ф. Вайцзеккера и их соавторов было предложено вместо теоремы Троттера использовать значительно ее обобщающую теорему Чернова, что позволило существенно расширить область применения предложенного подхода. Другие методы получения представлений решений уравнений типа Шредингера функциональными интегралами обсуждались в работах С.Альбеверио, Ф.А.Березина, Ю.Л.Далецкого, В.П.Маслова, Э.Нельсона, О.Г.Смолянова, А.Трумена, Е.Т.Шавгулидзе и другими.

Оказалось, что формулы Фейнмана и Фейнмана-Каца позволяют получить представления решений широкого класса эволюционных уравнений, с псевдодифференциальным оператором в правой части. В частности, представления решений могут быть получены для эволюционных уравнений относительно функций действительного аргумента, принимающих значения в пространстве комплексных функций $p$-адического аргумента.

Важность исследования последнего случая связана в первую очередь с тем, что в последнее десятилетие найдены существенные применения $p$-адического анализа в области биохимии и теории сплошных сред. С помощью $p$-адического анализа построена модель так называемой спектральной диффузии в пространстве состояний макромолекул белка, а также явления абсорбции угарного газа миоглобином. При этом $p$-адическая модель процессов с белковыми молекулами включает в себя уравнение, аналогичное уравнению теплопроводности, понимаемое в данном контексте как кинетическое. Кроме того, $p$-адический анализ нашел применение при описании процессов в так называемых спиновых стеклах.

Отметим, что впервые возможность применения $p$-адического анализа в математической физике была отмечена в работах В.С. Владимирова и И.В. Воловича. В этих работах речь шла о его применении для описания физических процессов на масштабах планковской длины.

Исследованиям дифференциальных и псевдодифференциальных операторов относительно функций $p$-адических аргументов, и, в частности, представлениям решений уравнений с этими операторами в виде интегралов по путям в пространствах $p$-адических чисел, посвящен ряд работ О.Г.Смолянова и Н.Н.Шамарова. Результаты первых двух глав диссертации распространяют полученные О.Г. Смоляновым и Н.Н.Шамаровым на $n$-мерный случай.

Эти результаты имеют также ряд точек соприкосновения с задачами, исследованными Р.С.Исмагиловым и В.С. Варадаражаном, использовавшими, однако, другие методы.

Всем сказанным и определяется актуальность темы диссертации.

**Цель работы**

Исследование применимости техники функционального интегрирования для представления решений некоторых эволюционных уравнений относительно функций, определенных над $p$-адическими пространствами.

**Научная новизна**

Все результаты диссертации являются новыми. Основные из них заключаются в следующем:

1. Получены представления решений уравнений типа теплопроводности относительно функций, определенных на произведении вещественной прямой и пространства ${\mathbb{Q}_\mathfrak{p}}^n$ интегралами Фейнмана.

2. Получена формула Фейнмана-Каца для уравнений типа теплопроводности относительно функций, определенных на произведении вещественной прямой и пространства ${\mathbb{Q}_\mathfrak{p}}^n$.

3. Доказаны представления решений уравнений типа теплопроводности относительно функций, определенных на пространстве последовательностей над $\mathbb{Q}_\mathfrak{p}$ с помощью формул Фейнмана.

**Методы исследования**

В диссертации используются методы бесконечномерного анализа и ряд специальных конструкций.

**Теоретическая и практическая ценность**

Диссертация носит теоретический характер. Полученные в ней результаты могут представлять интерес для специалистов, занимающихся математической физикой и $p$-адическим анализом.

**Апробация диссертации**

Результаты, изложенные в диссертации, прошли апробацию на следующих конференциях:

1. Семинар механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова "Бесконечномерный анализ и математическая физика"под руководством д.ф.-м.н., проф. О.Г. Смолянова, д.ф.-м.н., доц. Е.Т. Шавгулидзе (неоднократно, 2008-2010гг.).
2. Семинар отделения математической физики МИАН института им. В.А. Стеклова под руководством д.ф.-м.н., проф. В.С. Владимирова и д.ф.-м.н., проф. И.В. Воловича (2010г.).
3. XVI Международная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов», Москва, 2009.
4. XVII Международная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов», Москва, 2010.
5. CR-геометрия и уравнения в частных производных - IV, Левико Терме, Италия, 2010.

**Публикации**

Результаты диссертации опубликованы в двух работах автора. [1]-[2].

**Структура и объем диссертации**

Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы. Объем диссертации составляет 64 страницы, библиография включает 32 наименования.

## Краткое содержание работы

В первой главе получены формулы Фейнмана для уравнений типа теплопроводности, в которых роль оператора Лапласа играет оператор Владимирова. При этом предполагается, что неизвестные функции определены на произведении вещественной прямой и пространства ${\mathbb{Q}_\mathfrak{p}}^n$ — $n$-мерного пространства над полем $p$-адических чисел. Полученный результат обобщает случай, рассмотренный в работе [1] для неизвестных функций, определенных на произведении одномерного пространства над полем $p$-адических чисел и вещественной прямой.

Сформулируем задачу Коши для рассматриваемого случая.

Пусть $\alpha$-вещественное положительное число. Определим неположительную функцию $g^\alpha : {\mathbb{Q}_\mathfrak{p}}^n \to [0; +\infty)$ формулой $g^\alpha(x) = -(|x|_p)^\alpha$. Обозначим через $(g^\alpha \cdot)$ самосопряженный неограниченный в $L_2({\mathbb{Q}_\mathfrak{p}}^n)$ оператор поточеченого умножения на функцию $g^\alpha$, с областью определения

$\{D_{(g^\alpha \cdot)} = f : f \in L_2, g^\alpha \cdot f \in L_2\}$.

Далее, определим аналог оператора Лапласа $D^\alpha$ (оператор Владимирова) с помощью преобразования Фурье: $D^\alpha = \mathcal{F}_{L_2} \circ (g^\alpha \cdot) \circ \mathcal{F}_{L_2}^{-1}$. Его область определения $D_\alpha = \{f \in L_2 : g^\alpha \cdot \widetilde{f} \in L_2\}$.

Пусть $v : {\mathbb{Q}_\mathfrak{p}}^n \to C$ - ограниченная непрерывная функция, а $(v \cdot)$ - ограниченный, определенный всюду в $L_2({\mathbb{Q}_\mathfrak{p}}^n)$ оператор поточечного умножения на $v$.

Под задачей Коши для уравнения теплопроводности с оператором Владимирова далее будем понимать задачу отыскания функции $\Psi : \mathbb{R}^+ \to L_2({\mathbb{Q}_\mathfrak{p}}^n)$, дифференцируемой на $(0, +\infty)$, непрерывной на

[1] Смолянов О.Г., Шамаров Н.Н. *Формулы Фейнмана и Фейнмана-Каца для эволюционных уравнений с оператором Владимирова*, ДАН, 2008, том 420, №1, с.1-4

$[0, +\infty)$ и удовлетворяющей следующим условиям:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\Psi(t) & = & (D^\alpha + V)\Psi(t) \\ \Psi(0) & = & \Psi_0, \end{cases} \tag{1}$$

где для любого $t > 0$ $\frac{d}{dt}\Psi(t) := \lim_{\tau\to 0}[\tau \mapsto \frac{\Psi(t+\tau)-\Psi(t)}{\tau}]$ (предел в $L_2$-норме).

Однозначная разрешимость задачи Коши устанавливается с помощью теории аналитических полугрупп, а именно следует из свойства оператора $(D^\alpha + V)$ из правой части задачи (1) быть генератором аналитической полугруппы:

**Определение 1** *Однопараметрическая полугруппа $G$ называется аналитической, если существует такое вещественное число (“угол раствора сектора аналитичности”) $\varphi \in (0; \frac{\pi}{2}]$ , что сужение функции $G$ на открытый луч $(0\,; +\infty)$ продолжается до аналитической функции $G_\varphi$ в открытом секторе $\Sigma_\varphi$ , и если при этом замыкание сужения функции $G_\varphi$ на всякий меньший сектор $\Sigma_\theta$ , $0 < \theta < \varphi$ , может быть непрерыно продолжено на $\Sigma_\theta \cup \{0\}$.*

**Предложение 1** *Оператор $D^\alpha$ является генератором ограниченной аналитической полугруппы в пространстве $L_2(\mathbb{Q}_\mathfrak{p}{}^n)$ с углом раствора аналитичности $\frac{\pi}{2}$. Для каждого вещественного неотрицательного $t$ справедливо равенство*

$$e^{t\cdot(D^\alpha)} = \mathcal{F}_{L_2} \circ e^{t\cdot g^\alpha} \circ \mathcal{F}_{L_2}^{-1}$$

Сформулируем следствие из теоремы Чернова, называемое формулой Троттера, которое будет использоваться для получения формул Фейнмана.

**Теорема 1 (формула Троттера)** *Пусть $A$ — генератор ОПП в вещественном или комплексном банаховом пространстве $V$ с областью определения $D_A$ , причем существует вещественное число*

*$\varepsilon > 0$ такое, что $\|e^{t\cdot A}\| \leqslant e^{t/\varepsilon}$ при $0 < t < \varepsilon$ и пусть $B$ — ограниченный оператор в пространстве $V$, всюду в этом пространстве определенный. Тогда оператор $A + B$, определенный на области $D_A$ формулой $(A + B)x = Ax + Bx$, тоже является генератором полугруппы, и для каждого положительного вещественного числа $t > 0$ и каждого вектора $x \in V$ справедливы называемые формулами Троттера равенства*

$$e^{t\cdot(A+B)}x = \lim_{n\to+\infty}(e^{\frac{t}{n}\cdot A}e^{\frac{t}{n}\cdot B})^n x \ , \quad e^{t\cdot(A+B)}x = \lim_{n\to+\infty}(e^{\frac{t}{n}\cdot B}e^{\frac{t}{n}\cdot A})^n x \ , \quad (2)$$

*в которых пределы берутся снова по норме пространства $V$.*

Далее, для применения формулы Троттера и получения искомых формул Фейнмана, находим явный вид полугруппы, порождаемой оператором Владимирова.

Пусть $\widehat{S}_t = e^{tD^\alpha}, t \geq 0$.

**Лемма 1** *Пусть $f \in L_2(\mathbb{Q}_\mathfrak{p}{}^n)$. Тогда $\widehat{S}_t = \mathcal{F}^{-1}_{L_2} S_t \mathcal{F}_{L_2}$ почти для всех $x$, где $(S_t f)(x) = e^{tg^\alpha(x)}f(x)$.*

*При $t > 0$ и $f \in L_2$ элемент $\widehat{S}(f)$ представляется непрерывной функцией $F_{t,\alpha} * f$, где $F_{t,\alpha}$ - функция из $L_2 \cap L_1$, непрерывная на $\mathbb{Q}_\mathfrak{p}{}^n$,*

$$F_{t,\alpha}(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}}(e^{-tp^{k\alpha}} - e^{-tp^{(k+1)\alpha}})p^{kn}\Omega(p^{-k}\|x\|^n_\mathfrak{p}),$$

*где ряд сходится равномерно.*

**Замечание 1** *Здесь $\Omega(t)$ - индикаторная функция на вещественной прямой.*

И, наконец, сформулируем главную теорему главы 1 об искомой формуле Фейнмана.

**Теорема 2** *Для всех $\Psi_0 \in L_2(\mathbb{Q}_\mathfrak{p}{}^n)$ и для некоторой возрастающей последовательности натуральных чисел $(n_k)$ решение $\Psi(t)$ задачи*

*1 для почти всех $x_0 \in \mathbb{Q}_\mathfrak{p}{}^n$ имеет вид*

$$\Psi(t)x_0 = \lim_{k\to\infty} \int_{x_1\in\mathbb{Q}_p^n} m(\frac{t}{n_k}, x_0, dx_1)e^{\frac{t}{n_k}v(x_1)} \cdot \int_{x_2\in\mathbb{Q}_p^n} m(\frac{t}{n_k}, x_1, dx_2)e^{\frac{t}{n_k}v(x_2)} \dots$$

$$\dots \int_{x_{n_k}\in\mathbb{Q}_p^n} m(\frac{t}{n_k}, x_{n_k-1}, dx_{n_k})e^{\frac{t}{n_k}v(x_{n_k})}\Psi_0(x_{n_k}), \qquad (3)$$

*где каждый допредельный интеграл существует при каждом значении его параметра, в частности, для каждого $x_0$.*

**Замечание 2** *Мера $m(s,x,A)$ вводится следующим образом. Пусть для каждого $s > 0$, $m_{s,\alpha}$ - мера с плотностью $F_{s,\alpha}$, относительно меры Хаара $d^n x$. Пусть $m_0 = \delta$, где $\delta$ - мера Дирака, то есть $\delta(A) = 1$ при $0 \ni A$ и $\delta(A) = 0$ иначе. Определим сдвиг меры:*

$$m_{s,\alpha,x}(A) = m(s,\alpha,x,A) = m_{s,\alpha}(A-x) =: m(s,x,A),$$

*для каждого $x \in \mathbb{Q}_\mathfrak{p}{}^n$ и каждого борелевского $A \subset \mathbb{Q}_\mathfrak{p}{}^n$.*

Как упоминалось выше, формулой Фейнмана называется представление решения задачи Коши для эволюционного дифференциального или псевдодифференциального уравнений с помощью предела интегралов по декартовым степеням некоторого пространства, в нашем случае - $\mathbb{Q}_\mathfrak{p}{}^n$. Формулой Фейнмана-Каца называется представление решения той же задачи с помощью интеграла по траекториям в том же пространстве. При этом кратные интегралы в формуле Фейнмана совпадают с интегралами, являющимися конечнократными аппроксимациями интегралов по траекториям. Формуле Фейнмана-Каца для задачи Коши (1) посвящена вторая глава диссертации.

Чтобы из полученных уже формул Фейнмана вывести формулы Фейнмана-Каца, необходимо, во-первых, построить аналог меры Винера на пространстве $(\mathbb{Q}_\mathfrak{p}{}^n)^{[0,t]}$. Будем искать такую меру $M^t$, что ее конечномерные проекции совпадают с мерой, задаваемой формулой

$$m_{t,\alpha}^{\otimes n\cdot m}(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_m) =$$

$$= \int_{y_1 \in A_1} m(\frac{t}{n}, 0, dy_1) \int_{y_2 \in A_2} m(\frac{t}{n}, y_1, dy_2) ... \int_{y_m \in A_m} m(\frac{t}{m}, y_{m-1}, dy_m), A_i \in {\mathbb{Q}_\mathfrak{p}}^n.$$

Оказывается, такая мера существует и единственна, что доказывается с помощью теоремы Колмогорова.

В пространстве $({\mathbb{Q}_\mathfrak{p}}^n)^{[0,t]}$ для каждого $s \in [0, t]$ определим линейный функционал $\pi_s$ формулой:

$$\pi_s : ({\mathbb{Q}_\mathfrak{p}}^n)^{[0,t]} \to {\mathbb{Q}_\mathfrak{p}}^n, \pi_s(\omega) = \omega(s).$$

Определим сигма-алгебру $\sigma_{C_I}$ на пространстве $({\mathbb{Q}_\mathfrak{p}}^n)^{[0,t]}$ как минимальную, содержащую множества, являющиеся прообразами при всевозможных конечномерных проекциях $({\mathbb{Q}_\mathfrak{p}}^n)^{[0,t]} \to ({\mathbb{Q}_\mathfrak{p}}^n)^m$ измеримых множеств $B \in ({\mathbb{Q}_\mathfrak{p}}^n)^m$.

**Определение 2** *Случайный процесс $\xi$ на вероятностном пространстве $(({\mathbb{Q}_\mathfrak{p}}^n)^{[0,t]}, \sigma_{C_I}, M^t)$ со значениями в пространстве ${\mathbb{Q}_\mathfrak{p}}^n$ определим формулой:*

$$\xi : [0, t] \times ({\mathbb{Q}_\mathfrak{p}}^n)^{[0,t]} \ni (s, \omega) \to \pi_s(\omega) = \omega(s). \tag{4}$$

Напомним определение стохастической непрерывности случайного процесса.

**Определение 3** *Случайный процесс $r : T \times \Omega \to X$ над некоторым вероятностным пространством $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, являющийся случайной функцией параметра, пробегающего метрическое пространство $T$, и принимающий значения в метрическом пространстве $X$, называется стохастически непрерывным, если сходящейся последовательности элементов $t_n \to t_0 \in T$ отвечает сходящаяся по вероятности к $r(t_0, \cdot)$ последовательность $r(t_n, \cdot)$ случайных величин.*

Блаодаря стохастической неперывности процесса $\xi$ со значениями в полном метрическом сепарабельном пространстве ${\mathbb{Q}_\mathfrak{p}}^n$, существует счетно-аддитивная мера $M^t_c$ на сигма-алгебре $\sigma'_{C_I}$, являющейся "следом"сигма-алгебры $\sigma_{C_I}$ на множестве всех отображений $\phi$ :

$[0,t] \to \mathbb{Q}_{\mathfrak{p}}{}^n$ без разрывов второго рода, такая, что для каждой конечномерной проекции $(\mathbb{Q}_{\mathfrak{p}}{}^n)^{[0;t]} \to (\mathbb{Q}_{\mathfrak{p}}{}^n)^{k+1}$ образ меры $M_c^t$ совпадает с $m_t^{k+1}$.

Получаем формулы Фейнмана-Каца:

**Теорема 3** *Задача Коши 1 с начальным условием $\psi_0$ имеет единственное решение, при каждом $t > 0$ определяемое равенством*

$$\psi(t)(q) = \int_{\gamma \in C([0,t])} e^{\int_0^t v(q+\gamma(t))dt} \psi_0(q+\gamma(0)) M_c^t(d\gamma) \qquad (5)$$

В третьей главе диссертации получены формулы Фейнмана для уравнений типа теплопроводности относительно функций, определенных на пространстве последовательностей над полем $\mathbb{Q}_{\mathfrak{p}}$. Н.Н. Шамаров получил аналогичный результат, в котором в качестве конфигурационного пространства было рассмотрено пространство функций на отрезке.

Сформулируем задачу Коши для рассматриваемого случая.

Пусть $Q, P$ - векторные пространства над $\mathbb{Q}_{\mathfrak{p}}$ и пусть $b_{Q,P}(\cdot,\cdot)$- билинейная форма над $\mathbb{Q}_{\mathfrak{p}}$, задающая двойственность между $Q$ и $P$, а $\sigma_{b,Q}$ — минимальная $\sigma$-алебра на $Q$, порожденная линейными функционалами вида $b(\cdot, y)$. Пусть $\mu$— $\sigma$-аддитивная относительно $\sigma_{b,Q}$ мера. Определим свертку двух мер $\mu, \nu \in M_P$ следующей формулой:

$$(\mu * \nu)(A) := (\mu \otimes \nu) \circ +^{-1}(A),$$

где прямое произведение мер $\mu \times \nu$ задается на полуалгебре $\alpha(P,F) \Box \alpha(P,F)$:

$$\mu \times \nu : A_1 \times A_2 \mapsto \mu(A_1)\nu(A_2),$$

а оператор $\oplus : P \times P \to P$ задается формулой $\oplus(u,v) = u + v$.

Пусть $\mu$— $\sigma$-аддитивная относительно $\sigma_{b,Q}$ мера. Определим $b$-преобразование Фурье меры $\mu$:

$$P \ni y \mapsto \widetilde{\mu}^b(y) = \int_Q \chi_{\mathfrak{p}}(b_{Q,P}(x,y))\mu(dx).$$

Аналогично, если $\nu$—$\sigma$-аддитивная относительно $\sigma_{b,P}$ мера, то ее $b$-преобразование Фурье определим формулой

$$P \ni x \mapsto \widetilde{\nu}^b(x) = \int_P \chi_{\mathfrak{p}}(b_{Q,P}(x,y))\nu(dy).$$

Возьмем в качестве $Q$ пространство всех последовательностей над $\mathbb{Q}_{\mathfrak{p}}$ ($\mathbb{Q}_{\mathfrak{p}}{}^{\mathbb{N}}$), и возьмем в качестве $P$ пространство всех финитных последовательностей над $\mathbb{Q}_{\mathfrak{p}}$. Билинейное относительно поля $\mathbb{Q}_{\mathfrak{p}}$ отображение

$$b_{Q,P}(x,y) : Q \times P \to \mathbb{Q}_{\mathfrak{p}}, b_{Q,P}(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot y_i,$$

$$(x_1, x_2, ...) = x \in Q, (y_1, y_2, ...) = y \in P,$$

задает двойственность между $Q$ и $P$ (далее переменная $x$ будет обозначать элементы пространства $Q$, переменная $y$- элементы пространства $P$). На пространстве $P$ естественным образом введем норму $\|y\| := \max_i |y_i|_p$.

Рассмотрим на $P$ пространство комплекснозначных счетно-аддитивных на $\sigma_{b,P}$ мер с ограниченной вариацией $M_P$, и рассмотрим на $Q$ пространство $F_Q$ преобразований Фурье мер из $M_P$.

Каждая мера $\mu \in M_P$ обладает конечной полной вариацией

$$\|\mu\|_{var} = \sup\{\sum_{k=1}^{n} |\mu(A_k)| : n \in \{1, 2, ...\},$$

$$A_j \in \sigma_{b,P}, A_j \cap A_k = \varnothing; k, j = 1, 2, ..., n; j \neq k\}.$$

Тогда существует счетно-аддитивная мера $var_\mu : \sigma_{P,Q} \to [0, \|\mu\|]$, такая, что

$$var_\mu(A) = \sup\{\sum_{k=1}^{n} |\mu(A_k)| : n \in \{1, 2, ...\}, A_j \subset A \in \sigma_{b,P},$$

$$A_j \cap A_k = \varnothing; k, j = 1, 2, ..., n; j \neq k\}$$

Фискируем вещественное число $a > 0$. Функция $f_a(y) = -\|y\|^a$-неположительная вещественнозначная, $f_a : P \to (-\infty; 0]$. Будем обозначать символом $(-\|y\|^a\cdot)$ или $(f_a\cdot)$ неограниченный оператор умножения на функцию $f_a(y) = -\|y\|^a$ в пространстве $M_P$, заданный на области определения $D_{(f\cdot)} := \{\mu \in M_P : ((-\|y\|^a)\cdot\mu) \in M_P\}$ формулой $D_{(f\cdot)} \ni \mu \to ((-\|y\|^a)\cdot\mu) \in M_P$

Определим аналог оператора Лапласа

$$D^a(\widetilde{\mu}) := (\mathcal{F}_P \circ ((-\|y\|^a)\cdot) \circ \mathcal{F}_Q^-)(\widetilde{\mu})$$

на области определения $D_a = \{\widetilde{\mu} \in F_Q : \|y\|^a \cdot \mu \in M_P\} = \{\widetilde{\mu} : \mu \in D_{(f\cdot)}\}$.

Определим свертку двух мер $\mu, \nu \in M_P$ следующей формулой:

$$(\mu * \nu)(A) := \int_P \mu(A-y)\nu(dy),$$

где для каждого $y \in P$ и каждого борелевского $A \in \sigma_{b,P}$ $\mu_y = \mu(A-y)$ —сдвиг меры $\mu$ нв вектор $y$.

Пусть $\nu \in M_P, v = \widetilde{\nu}$ и пусть $V$ — оператор умножения на ограниченную непрерывную функцию $v \in F_Q$.

Под задачей Коши для уравнения теплопроводности с определенным выше аналогом оператора Лапласа далее будем понимать задачу отыскания непрерывной функции $\Psi$ аргумента $t$, определенной на неотрицательной вещественной полуоси, принимающей значения в нормированном подпространстве $D_a \subset F_Q$ и удовлетворяющей условиям:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\Psi(t) &= (D_a + V)\Psi(t) \\ \Psi(0) &= \Psi_0, \end{cases} \tag{6}$$

где для любого $t > 0$ $\frac{d}{dt}\Psi(t) := \lim_{\tau\to 0}[\tau \mapsto \frac{\Psi(t+\tau)-\Psi(t)}{\tau}]$ (предел в пространстве $F_Q$).

Однозначная разрешимость задачи 6 следует из теории однопараметрических полугрупп. А именно, оказывается, что в пространстве $M_P$ оператор умножения на функцию $(-\|y\|^a\cdot)$ является генератором аналитической полугруппы $\{e^{-t\|y\|^a}, t \geq 0\}$ в $D_{(f_a\cdot)} \subset M_P$. Это позволяет показать, что семейство операторов $\{e^{tD^a}, t \geq 0\}$ образует аналитическую сверточную полугруппу $\{(w_{t,a}*) : t \geq 0\}$ в $F_Q$, где

$w_{t,a}$ - счетно-аддитивная мера $w_{t,a}$ на $\sigma_{b,Q}$, обладающая преобразованием Фурье вида $\widetilde{w_{t,a}}(y) = e^{-t\cdot\|y\|^a}$, существование и единственность которой доказываются с помощью теоремы Колмогорова.

И, наконец, получаем, что оператор $(D^a + V)$ является генератором аналитической полугруппы в пространстве $F_Q$, из чего непосредственно вытекает

**Теорема 4** *Задача (6) при любом начальном условии $\Psi_0 \in D_a$ имеет единственное решение $\Psi$, при $t > 0$ определяемое формулой:*

$$\Psi(t) = e^{t(D^a+V)}\Psi_0$$

Заметим, что экспонента $e^{sV}$ от ограниченного оператора $sV$ может быть представлена рядом Тейлора $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} s^n V^n$, сходящимся в операторной норме, и совпадает с оператором умножения на ограниченную функицю $e^{s\cdot v}$.

Определим сдвиг меры $w_{t,a}$ для любого $A \in \sigma_{b,Q}$ на вектор $x \in Q$:

$$w_{t,a,x}(A) = w_{t,a}(A - x) = w(t, x, A). \tag{7}$$

Тогда

$$(f * w_{t,a})(x_0) = \int_Q f(x) w_{t,a}(dx - x_0) = \int_Q f(x) w_{t,a,x_0}(dx). \tag{8}$$

Итак, используя найденные явные виды полугрупп $e^{sV}, e^{sD^a}$, предыдущую теорему и формулу Троттера, получаем искомые формулы Фейнмана:

**Теорема 5** *При любом начальном условии $\psi_0 \in F_Q$ решение задачи Коши (6) в точке $x_0 \in Q$ может быть представлено в виде Формулы Фейнмана:*

$$\Psi(t)x_0 = \lim_{n\to\infty} \int_{y_1 \in Q} w(\frac{t}{n}, 0, dy_1) e^{\frac{t}{n} v(x_0+y_1)} \cdot \int_{y_2 \in Q} w(\frac{t}{n}, y_1, dy_2) e^{\frac{t}{n} v(x_0+y_2)} \ldots$$

$$\ldots \int_{y_n \in Q} w(\frac{t}{n}, y_{n-1}, dy_n) e^{\frac{t}{n} v(x_0+y_n)} \Psi_0(y_n),$$

*причем предел сходится равномерно.*

Пользуясь случаем, хочу выразить глубокую благодарность своему научному руководителю, доктору физико-математических наук, Олегу Георгиевичу Смолянову за постановку задачи, постоянное внимание к работе и всестороннюю поддержку.

**Список публикаций по теме диссертации**

[1] O.V.Beloshapka, *Feynman Formulas for the Schrödinger Equations with the Vladimirov Operator*, Russ. J. Math. Phys. 17 (3), 267—271 (2010).

[2] O.V.Beloshapka, *Feynman Formulas for an infinite dimensional p-adic heat type equation*, Infinite Dimensional Analisys, Quantum Probability and Related topics, Vol. 14, No. 1, 1—12 (2011).