Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова

Механико-математический факультет

На правах рукописи

УДК 519.21

Шкляев Александр Викторович

Большие уклонения и предельные теоремы для некоторых функционалов от случайного блуждания

01.01.05 - теория вероятностей и математическая статистика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2011

Работа выполнена на кафедре математической статистики и случайных процессов механико–математического факультета Московского Государственного Университета имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель: кандидат физико-математических наук,
доцент
Козлов Михаил Васильевич

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
ведущий научный сотрудник
Ватутин Владимир Алексеевич
кандидат физико-математических наук
Козлов Андрей Михайлович

Ведущая организация: Институт проблем передачи информации
им. А.А. Харкевича.

Защита диссертации состоится «29» апреля 2011 года в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.85 при МГУ имени М.В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские Горы, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан «29» марта 2011 года.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д 501.001.85 при МГУ,
доктор физико-математических наук,
профессор В.Н. Сорокин

Актуальность темы

Теория больших уклонений для сумм независимых случайных величин является классической областью теории вероятностей, активно развивающейся и в настоящее время. Одним из наиболее хорошо исследованных направлений теории больших уклонений являются большие уклонения функционалов от случайных блужданий, являющиеся базовыми для исследования вероятностей больших уклонений целого ряда процессов: ветвящихся процессов Гальтона-Ватсона в случайной среде[1,2], асимптотически однородных марковских цепей[3,4], процессов восстановления[5]. Результаты теории больших уклонений для случайных блужданий применяются в финансовой математике[6], статистической физике[7].

Фундаментальными работами в этой области стали труды Бахадура, Ранга Рао[8], Петрова[9], в которых была исследована асимптотика вероятности $P(S_n \geq \theta n)$ для случайного блуждания с шагами, чье распределение имеет экспоненциально малые хвосты. Полученные результаты стали основой для получения предельных теорем и асимптотик вероятностей больших уклонений ряда важных статистик, связанных с траекторией блуждания. Продолжением результатов для случайного блуждания стали работы Эрдеша-Реньи[10], Шеппа[11], открывшие проблематику больших уклонений статистик "типа скользящего среднего". Связанные с этой проблематикой задачи возникают в биологии при исследовании цепочек ДНК[12,13,14], в финансовой

[1] М. В. Козлов. О больших уклонениях строго докритических ветвящихся процессов в случайной среде с геометрическим распределением числа потомков. Теория вероятностей и ее применения, 2009 54, 3, 439–465

[2] Boinghoff C., Kersting G. Upper large deviations of branching processes in a random environment—Offspring distributions with geometrically bounded tails. Stochastic Processes and their Applications, 2010, 120, 10, 206-207

[3] Боровков А.А., Могульский А.А. Большие уклонения для цепей Маркова в положительном квадранте. Успехи математических наук, 2001, 56, 5, 3–116

[4] Д. А. Коршунов. Одномерные асимптотически однородные цепи Маркова: преобразование Крамера и вероятности больших уклонений. Матем. тр., 2003, 6, 2, 102-143

[5] А. А. Боровков, К. А. Боровков. Вероятности больших уклонений для обобщенных процессов восстановления с правильно меняющимися распределениями скачков. Матем. тр., 2005, 8, 2 , 69-136

[6] Kluppelberg C. and Mikosch T. Large Deviations of Heavy-Tailed Random Sums with Applications in Insurance and Finance. Journal of Applied Probability, 1997, 34, 2, 293-308

[7] Ellis S. The theory of large deviations: from Boltzmann's 1877 calculation to equilibrium macrostates in 2D turbulence. Physica D: Nonlinear Phenomena, 1999.

[8] Bahadur R.R., Rango Rao R. On deviations of the sample mean. Ann. Math. Statist., 1960, 31, 4, 1015-1027.

[9] Петров В.В. О вероятностях больших уклонений сумм независимых случайных величин. Теория вероятностей и ее применения, 1965 т. 10, 310-322.

[10] Erdos P., Renyi A. On a new law of large numbers. Anal. Math., 1970, 23, 103-111.

[11] Shepp L.A. A limit law concerning moving averages. Ann. Math. Statist., 1964, 35, 424-428.

[12] Arratia R., Gordon L., Waterman M. The Erdos-Renyi Law in Distribution, for Coin Tossing and Sequence Matching. The Ann. of Stat, 1990, 18, 2, 539-570

[13] Arratia R., Waterman M. An Erdos-Renyi law with shifts. Adv. in Math., 1985, 55, 1, 13-23

[14] Arratia R., Gordon L. Tutorial in Large Deviations for the Binomial Distribution. Bulletin of Mathematical Biology,

математике[15], в географии[16].

Теория, связанная со статистиками типа статистик Шеппа и Эрдеша-Реньи, развивалась в ряде направлений: получении законов больших чисел и законов повторного логарифма[17,18,19,20], изучении траекторий блуждания, подчиненного условию уклонения[21], нахождении точной асимптотики вероятностей больших уклонений. Последнему вопросу посвящены работа Комлоша и Тушнеди[22], работы Новака[23], А.М. Козлова и В.И. Питербарга[24,25,26], М.В. Козлова[27]. В русле этой тематики лежит и настоящая диссертация. В рамках диссертации рассматривается задача о больших уклонениях максимума случайного блуждания, решается вопрос исследования асимптотики большого уклонения максимума блуждания с нулевым сносом, что перекликается с результатами работ Боровкова[28,29], исследуется условное функциональное поведение уклоняющейся траектории, распределения ряда функционалов от такой траектории. Эти результаты дополняют вышеупомянутые работы Боровкова и являются продолжением работы Петрова. Предложенное решение задачи о больших уклонениях максимума позволяет исследовать вероятности больших уклонений других функционалов и дает ключ к решению задачи о большом уклонении статистики Шеппа, упомянутой выше.

1989, Vol 51, 1, 125-131

[15] Binswanger K., Embrechts P. Longest Run in Coin Tossing. Insurance: Math. Econom., 1994, 15, 139-149.

[16] Bonin O. Large deviation theorems for weighted sums applied to a geographical problem. J. Appl. Probab.,2002, 39, 2, 251-260.

[17] Deheuvels P. On the Erdosh-Renyi theorem for random fields and sequences and its relationships with the theory of runs and spacings. Probability theory and related fields, 1985, 70, 1, 90-115.

[18] Deheuvels P., Devroye L. Limit laws related to the Erdos-Renyi theorem. Tech. Report 83-6, L.S.T.A., Universite Paris VI, 1983.

[19] Csorgo M., Steinbach J. Improved Erdos-Renyi and strong approximation laws for increments of partial sum. Ann. Probab., 1981, 988-996.

[20] Frolov A. Erdos-Renyi-Shepp type laws in the non-I.I.D. case. Studia Scientiarum Math. Hungarica, 1997, 33, 127-151

[21] Боровков А.А. О преобразовании Крамера, больших уклонениях в граничных задачах и условном принципе инвариантности. Сибирский математический журнал, 2000, т. 36, 3, 453-468.

[22] Komlos J., Tusnady G. On sequence of "pure heads". Ann. Probab., 1975, 3, 4, 608-617.

[23] Новак С.Ю. О распределении максимума частичных сумм Эрдеша-Реньи. Теор. вероятностей и ее приложения, 1997, 42, 274-293.

[24] Козлов А.М. О больших уклонениях статистики Шеппа для гауссовского блуждания. Вестник Московского Университета. Математика. Механика, 2004, 3, 48-52.

[25] Козлов А.М. О вероятностях больших уклонений статистики Шеппа. Дискретная математика, 2004, Т.16, 1, 140-145.

[26] Козлов А.М., Питербарг В.И. О больших скачках случайного блуждания. Теория вероятностей и ее применения, 2002, 47, 4, 803-814.

[27] Козлов М.В. О частичных суммах Эрдеша-Реньи: большие уклонения, условное поведение. Теория вероятностей и ее применения, 2001, т. 46, 4, 678-696.

[28] Боровков А.А., Коршунов Д.А. Вероятности больших уклонений одномерных цепей Маркова. Часть 1. Стационарные распределения. Теория вероятностей и ее применения,1996, т. 41, 1, 3-30.

[29] Боровков А.А., Коршунов Д.А. Вероятности больших уклонений одномерных цепей Маркова. Часть 2. Достационарные распределения в экспоненциальном случае. Теория вероятностей и ее применения, 2000, т. 45, 3, 437-468.

В частности, в диссертации удается в явном виде получить константу, фигурирующую в асимптотике, до этого выведенную А.М. Козловым неявно. Стоит отметить, что константы в асимптотике больших уклонений (так называемые константы Пикандса) играют значимую роль в исследовании гауссовских случайных процессов и переходе от процессов с дискретным временем к процессам с непрерывным временем[30]. Для максимума и статистики Шеппа в работе получены условные функциональные предельные теоремы, позволяющие получить достаточно общие результаты, связанные со сходимостью непрерывных функционалов, определенных на рассматриваемом блуждании, что дополняет работы А.М. Козлова, М.В. Козлова, Комлоша, Тушнеди, Шеппа, А.А. Боровкова.

Цель работы

Цель настоящей диссертации состоит в решении следующих задач:

1. Расширить спектр функционалов для которых исследуется асимптотика вероятностей больших уклонений случайного блуждания крамеровского типа.

2. Получить для стационарного и движущегося окон вероятностное описание траекторий, на которых достигаются большие уклонения этих функционалов.

3. Получить функциональное описание траекторий блужданий, подчиненных условию большого уклонения рассматриваемых функционалов.

Научная новизна

Основные результаты диссертации являются новыми. Перечислим наиболее значимые из них:

1. Нахождение асимптотики вероятностей больших уклонений максимума, взлета, падения и размаха крамеровского случайного блуждания, получение при условии большого уклонения максимума условных предельных теорем для ряда функционалов, условных функциональных предельных теорем для всей траектории.

2. Получение константы, фигурирующей в асимптотике вероятностей больших уклонений статистики Шеппа в явном виде.

3. Получение условных функциональных предельных теорем для участков блуждания, связанных с моментом первого уклонения статистики Шеппа.

[30] Питербарг В.И. Асимптотические методы в теории гауссовских случайных процессов и полей. Издательство Московского Университета, 1988.

Методы исследования

Базовую часть работы составляют прямые вероятностные рассуждения, использующие классические теоремы Петрова и Бахадура, связанные с большими уклонениями и метод Крамера преобразования мер. При функциональном анализе случайных процессов, соответствующих блужданию, используется подход Прохорова, связанный исследованием плотности семейства вероятностных мер. Существенную часть работы составляет прямой вероятностный анализ траекторий, демонстрирующий вероятностное содержание полученных результатов.

Теоретическая и практическая ценность

Диссертация носит теоретический характер. Результаты могут быть использованы в теории вероятностей, теории случайных процессов, математической статистике, могут иметь приложения в биологических задачах.

Апробация результатов работы

Результаты работы докладывались на Большом семинаре кафедры теории вероятностей механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова (руководитель член-корреспондент РАН А.Н. Ширяев, 2010 г.), на семинаре по теории кодирования Института проблем передачи информации им. А.А. Харкевича (руководитель д.ф.-м.н. Л.А. Бассалыго, 2010 г.), на семинаре отдела дискретной математики математического института им. В.А. Стеклова Российской академии наук (руководители член-корреспондент РАН Б.А. Севастьянов, д.ф.-м.н. А.М. Зубков, д.ф.-м.н. В.А. Ватутин, д.ф.-м.н. В.П. Чистяков, 2010 г.), на кафедральном семинаре кафедры математической статистики и случайных процессов механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова (руководитель д.ф.-м.н. А.М. Зубков, 2009, 2010 г.), на семинаре по случайным процессам механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова (руководители д.ф.-м.н. В.И. Оселедец, д.ф.-м.н. Б.М. Гуревич, д.ф.-м.н. С.А. Пирогов, 2010 г.), на семинаре „Вероятность и процессы“ механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова (руководитель к.ф.-м.н. М.В. Козлов, 2009 г.).

Публикации

Результаты диссертации опубликованы в 3 работах автора (все 3 в журналах из перечня ВАК), список которых приведен в конце автореферата. Работ в соавторстве нет.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, трёх глав и списка литературы, насчитывающего 26 наименований. Общий объем диссертации составляет 101 страницу.

Содержание диссертации

Общая структура диссертации. Диссертация разбита на главы, разбитые на параграфы, которые делятся на подпараграфы. Нумерация теорем двойная — первая цифра указывает номер главы, вторая — номер теоремы внутри главы. Нумерация формул аналогична. Нумерация вспомогательных утверждений (лемм) едина для всей работы.

Введение.

Во введении рассказывается о развитии тематики больших уклонений, описывается структура имеющихся по тематике диссертации результатов и место, которое в них займёт данная работа, приводится общая характеристика результатов диссертации, а также вводятся основные обозначения.

Глава 1. Большие уклонения максимума.

Будем рассматривать случайное блуждание

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

где X_i - невырожденные независимые одинаково распределенные (н.о.р) случайные величины (сл.в.) с функцией распределения $F(x)$, удовлетворяющие свойствам:

$$EX = 0, R(h) = Ee^{hX} < \infty, 0 < h < h^+,$$

где X здесь и далее - общее обозначение для величины с распределением $F(x)$. Эти условия будут считаться выполненными везде далее, за исключением тех случаев, когда это специально будет оговорено. Все приведенные результаты переносятся на случай $EX > 0$, случай $EX < 0$ принципиально отличается и достаточно полно рассмотрен в работе Д.А. Коршунова[31]. Изложение в диссертации ведется для нерешетчатых величин для упрощения рассуждений.

Введем ряд параметров, используемых в теории больших уклонений:

$$m(h) = d(\ln R(h))/dh,$$

$$m^+ = \lim_{h \to h^+ - 0} m(h),$$

$$\sigma^2(h) = dm(h)/dh.$$

Единственное решение уравнения $m(h) = \theta$ при $\theta \in (0, m^+)$ будем обозначать h_θ. Положим

$$\Lambda(\theta) = \theta h_\theta - \ln R(h_\theta).$$

Для любого $\theta \in (0, m^+)$ введем сопряженную к $F(x) = P(X \le x)$ функцию распределения (ф.р.)

$$F^\theta(x) = R(h_\theta)^{-1} \int_{-\infty}^{x} e^{h_\theta y} dF(y).$$

Обозначим через X^θ случайную величину с ф.р. F^θ, $X_1^\theta, X_2^\theta, \dots$ - последовательность н.о.р. сл. в. с ф.р. F^θ, $S_n^\theta = \sum_{i=1}^{n} X_i^\theta$. Для величин, связанных с блужданием S_n^θ, будут использоваться такие же обозначения, что и для блуждания S_n, с добавлением верхнего индекса θ.

Асимптотика $P(S_n \ge \theta n + u)$, $0 < \theta < m^+$, $u = O(\sqrt{n})$ при $n \to \infty$ была изучена в работе Петрова[9]. В первой главе работы рассматриваются задачи, связанные с асимптотикой вероятностей $P(M_n \ge \theta n + u)$, где $M_n = max_{i \le n} S_i$. Теорема 1.2 является продолжением теоремы Петрова на случай $M_n \ge \theta n$:

Теорема 1.2. При $n \to \infty$ соотношение

$$P(M_n \ge \theta n + C\sqrt{n} + u) = (1 + o(1)) e^{-C^2/(2\sigma^2(\theta))} D(\theta) C(\theta) e^{-\Lambda(\theta) n - C\sqrt{n} - h_\theta u} n^{-1/2},$$

выполнено равномерно по $C \in [C_1, C_2] \subset (-\infty, \infty)$, $|u_n| \le \gamma_n = o(\sqrt{n})$, $\theta \in [\theta_1, \theta_2] \in (0, m^+)$, где $C(\theta) = \frac{1}{\sigma(h_\theta) h_\theta}$, $D(\theta) = P(S_i^\theta > 0, i > 0) \sum_{i=1}^{\infty} P(S_j \le 0, 0 < j \le i) R(h_\theta)^{-i}$.

[31] Korshunov D.A. One-dimensional asymptotically homogeneous Markov chains: Cramer transform and large deviations probabilities. Siberian Advances in Mathematics, 2004, v. 14, № 4, 30-70.

Стоит заметить, что теорема 1.2 схожа с теоремой, доказанной в работе А.А. Боровкова[28], и, вероятно, может быть получена с помощью рассуждений, схожих с рассуждениями Боровкова, но доказательства теоремы 1.2 и вспомогательной для нее теоремы 1.1 являются фундаментальными для построения последующей теории.

Идея доказательства теоремы 1.2 состоит в преобразовании траекторий случайного блуждания, совершающего большое уклонение, к форме, позволяющей использовать классическую теорему Петрова о больших уклонениях. В доказательстве используются прямые вероятностные рассуждения, связанные с явным выделением множества траекторий случайного блуждания, имеющих основную вероятностную массу для рассматриваемой вероятности, упомянутая выше теорема Петрова и тождества Спарре-Андерсона[32,33]. Особенность используемых методов — явная интерпретация аналитических действий на уровне траекторий, что позволяет понять происхождение константы $D(\theta)$ и общую структуру блуждания, чей максимум совершает большое уклонение. В связи с этим удается получить ряд предельных теорем 1.3-1.8 для величин, связанных с блужданием, чей максимум совершает большое уклонение.

Теорема 1.3 описывает поведение величин, принадлежащих "левому краю" блуждания, чей максимум совершает большое уклонение:
Теорема 1.3. Для любых $\Delta_i : P(X \in \partial\Delta_i) = 0 \ \forall i$, следующее соотношение

$$P(X_1 \in \Delta_1, ..., X_k \in \Delta_k | M_n \geq \theta n) = (1 + o(1)) \prod_{i=1}^{n} P(X^\theta \in \Delta_i)$$

выполнено равномерно по $\theta \in [\theta_1, \theta_2] \subset (0, m^+)$.
Таким образом, величины "на левом краю" при условии большого уклонения максимума асимптотически распределены также как величины сопряженного блуждания. Теорема 1.5 указывает на аналогичное поведение величин "из центра" блуждания. Та же картина наблюдается в классическом случае $S_n \geq \theta n$. Разница между случаями $S_n \geq \theta n$, $M_n \geq \theta n$ видна в распределении величин из "правого края". В случае больших уклонений максимума предельное распределение величин X_{n-i}, $i \leq k$ существенно отличается от предыдущих:

[32] Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Том 1. 1964.
[33] Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Том 2. 1964.

Теорема 1.4. Для любых $\Delta_i : P(X \in \partial\Delta_i) = 0, \forall i$ следующее соотношение

$$P(X_n \in \Delta_1, ..., X_{n-k+1} \in \Delta_k | M_n \geq \theta n) = (1 + o(1))Q(\Delta_1, ..., \Delta_k),$$

выполнено равномерно по $\theta \in [\theta_1, \theta_2] \subset (0, m^+)$, где $Q(\Delta_1, ..., \Delta_k)$ - мера, для которой в работе дано явное, пускай и несколько громоздкое выражение.
Теоремы 1.3-1.5 служат аналогами теоремы Бахадура[22], однако, как мы видим, распределение величин "правого края" оказывается значительно более сложным, чем в случае, изучаемом Бахадуром.

Естественным образом возникает задача о распределении $M_n - S_n$ при условии $M_n \geq \theta n$, связывающая большие уклонения максимума с классическими большими уклонениями $S_n \geq \theta n$. Ответ на этот вопрос дает теорема 1.6:
Теорема 1.6. Для любого интервала U с концами, не являющимися атомами распределения G при $n \to \infty$ соотношение

$$P(M_n - S_n \in U | M_n \geq \theta n) = (1 + o(1))G(U),$$

выполнено равномерно по $\theta \in [\theta_1, \theta_2] \in (0, m^+)$,
где $G(U) = \sum\limits_{l=0}^{\infty} P(S_i \leq 0, i \leq l, S_l \in -U)R(h_\theta)^{-l} / \sum\limits_{l=0}^{\infty} P(S_i \leq 0, i \leq l)R(h_\theta)^{-l}$.

Следующие теоремы 1.7 и 1.8 подводят черту под теоремами 1.3-1.6, получая совместное предельное распределение всех рассмотренных ранее величин при условиях $M_n \geq \theta n$, $M_n \geq \theta n + u$, $u = O(\sqrt{n})$. Полные формулировки теорем можно найти в диссертации.

Теоремы 1.3-1.8 не только естественно возникают при рассмотрении задачи о большом уклонении максимума, но и являются важными пунктами доказательств теорем в главах 2 и 3.

В заключении главы 1 доказываются условные функциональные предельные теоремы для блуждания, чей максимум совершает большое уклонение.
Обозначим через τ_n момент первого достижения блужданием уровня M_n на отрезке $[0, n]$, положим

$$X^{(n)}(t) = \frac{S_{[nt]} + (nt - [nt])X_{[nt]+1} - \theta nt}{\sigma(h_\theta)\sqrt{n}},$$

$$Y^{(n)}(t) = X^{(n)}(\frac{t\tau_n}{n}).$$

Эти процессы, рассматриваемые при $0 < t < 1$, являются аналогами случайного процесса с п.н. непрерывными траекториями, конструируемого из случайного блуждания в классическом принципе инвариантности Донскера-Прохорова[34]. Однако, в силу того, что в нашем случае блуждание рассматривается при условии большого уклонения максимума, в определении $X^{(n)}(t)$ возникает сдвиг θnt и параметр масштаба $\sigma(h_\theta)\sqrt{n}$. Процесс $Y^{(n)}(t)$ представляет себе аналог $X^{(n)}(t)$, построенный только по участку $(0, \tau_n)$ блуждания.
Обозначим через $Q^{(n)}$, $\hat{Q}^{(n)}$ распределения вероятностей случайных элементов $Y^{(n)}(t)$, $X^{(n)}(t)$ в пространстве $C[0,1]$ непрерывных на отрезке [0,1] функций при условии большого уклонения $M_n \geq \theta n - u$, где $u = o(\sqrt{n})$, а через Q_{W^0} - распределение вероятностей броуновского моста.
Теорема 1.9. $Q^{(n)} \Rightarrow Q_{W^0}$, $n \to \infty$.
Теорема 1.10. $\hat{Q}^{(n)} \Rightarrow Q_{W^0}$, $n \to \infty$.
Теоремы 1.9 и 1.10 родственны теоремам работ А.А. Боровкова[21], О.М.Полещук[35] для классического большого уклонения. Методы доказательства теорем 1.9 и 1.10 базируются на теореме Ю.В. Прохорова, устанавливающей связь между слабой относительной компактностью и плотностью семейства мер, и используют упомянутые результаты.

Условные функциональные теоремы дают широкие возможности для получения предельных распределений функционалов с множеством точек разрыва, имеющим винеровскую меру 0, определенных на множестве траекторий S_n, при условии того, что максимум этих траекторий совершил большое уклонение. Теоремы 1.9, 1.10 позволяют свести задачу исследования предельных распределений таких функционалов к задаче о распределении функционалов от броуновского моста, хорошо изученной в ряде работ[36,37].

Особенностью первой главы является прозрачность получаемых результатов и удобство используемых методов для получения новых результатов. В частности, за счет результатов первой главы значительно упрощается получение аналогичных результатов для вероятностей больших уклонений статистик "взлета" и "размаха", рассматриваемых в третьей главе.

---

[34] Billingsley P., Convergence of probabilty measures. John Wiley, New York - London, 1968.

[35] Полещук О.М. Условная предельная теорема для случайного блуждания. Сборник Теория вероятностей, теория случайных процессов и функциональный анализ. Издательство МГУ, 1985, 53-55

[36] Клячко А.А., Ю.В. Солодянников. Вычисление характеристических функций некоторых функционалов от винеровского процесса и броуновского моста. Теория вероятностей и её применения, 1986, 31, 3, 569-573.

[37] Berzin-Joseph C., Leon J., Ortega J. Non-linear functionals of the Brownian Bridge and some applications. Stochastic Processes and their Applications, 2001, 92, 1, 11-30.

Глава 2. Большие уклонения статистики Шеппа

Для рассматриваемого в главе 1 случайного блуждания введем статистику Шеппа

$$\rho_{n,m} := \max_{k \le m} M_{n,k},$$

где $M_{n,k} = \max_{l \le n} S_{l,k}$ ($S_{l,k} = S_{l+k} - S_k$, $M_{n,k} \stackrel{d}{=} M_n$), и величину $\tau_n(\theta) := \min\{m : M_{n,m} \ge \theta n\}$. Иначе говоря, статистика Шеппа представляет собой максимальное приращение внутри "окна" ширины n, движущегося внутри интервала $(0, m+n)$. Задача о больших уклонениях статистики $\rho_{n,m}$ в различных вариантах рассматривалась рядом математиков, однако, по-видимому, точную вероятность большого уклонения удалось вычислить лишь в 2002 году в работе А.М. Козлова[25]. Специфика использованного им подхода не позволяла получить константу, фигурирующую в вероятности больших уклонений, в явном виде, а также, по-видимому, не давала возможности получения условных функциональных предельных теорем для блуждания, чья статистика Шеппа совершает большое уклонение. Во второй главе настоящей диссертации эти пробелы в исследовании статистики Шеппа заполняются. В духе первой главы подход к рассматриваемым задачам базируется на прямых вероятностных рассуждениях.

Следующая теорема связывает вероятность большого уклонения статистики Шеппа с вероятностью большого уклонения максимума:

Теорема 2.2. При $m, n \to \infty$, $m = o(e^{\Lambda(\theta)n}\sqrt{n})$ равномерно по $\theta \in [\theta_1, \theta_2] \subset (0, m^+)$, $|u| \le \gamma_n = o(\sqrt{n})$ выполняется соотношение:

$$P(\rho_{n,m} \ge \theta n - u) = m\tilde{D}(\theta)e^{h_\theta u}e^{-\Lambda(\theta)n}n^{-1/2}(1 + o(1)), \ \tilde{D}(\theta) := p(\theta)D(\theta)C(\theta),$$

где $p(\theta)$ - явно посчитанная в диссертации вероятность. Несмотря на несколько громоздкий вид, эта величина может быть посчитана численно с нужной степенью приближения, что весьма важно для практических приложений.

Теорема 2.2 является аналогом теоремы, полученной в работе Комлоша и Тушнеди[22], а также родственна теоремам, полученным М.В. Козловым[27] и А.М. Козловым[25]. Используемый метод работы с большими уклонениями статистики Шеппа родственен подходу работ Комлоша, Тушнеди и М.В. Козлова: задача о максимальном приращении внутри окна (статистика Шеппа) сводится к задаче о большом уклонении M_n. Однако, вследствие более сложного поведения правого участка блуждания, чей максимум совершает уклонения (теорема 1.4), теорема 2.2 доказывается значительно сложнее и вычисление константы $p(\theta)$ в явном виде требует дополнительной работы.

Теорема 2.2 описывает асимптотическое поведение вероятности $P(\rho_{m,n} \geq \theta n)$ в зоне $m = o(\sqrt{n}e^{\Lambda(\theta)n})$. Следующий результат расширяет рассматриваемую область до $m = O(\sqrt{n}e^{\Lambda(\theta)n})$:

Теорема 2.6. При любом $x \in R$ равномерно по $\theta \in [\theta_1, \theta_2] \subset (0, m^+)$ выполнено следующее соотношение:

$$P(\rho_{n,m} - \theta n < x) \to exp(e^{-A\tilde{D}(\theta)h_\theta x}),$$

где $me^{-\Lambda(\theta)n}n^{-1/2}$ равномерно по $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ сходится к A.

Для случайного момента $\tau_n(\theta)$ справедлива следующая предельная теорема:

Теорема 2.5. При $x \geq 0$, $n \to \infty$ равномерно по $\theta \in [\theta_1, \theta_2] \subset (0, m^+)$ выполнено следующее соотношение:

$$P(\tilde{C}(\theta)\tau_n(\theta)e^{-\Lambda(\theta)n}n^{-1/2} > x) \to e^{-x}.$$

Теорема 2.5 описывает распределение времени ожидания до первого уклонения статистики Шеппа. Как и в случае статистики Эрдаша-Реньи, оно имеет экспоненциальный порядок по n и после нормировки сходится к экспоненциальному распределению. Теорема 2.6 описывает соотношения на n, m, необходимые для того, чтобы уклонение статистики Шеппа на величину θn перестало быть событием малой вероятности. Величина $\rho_{n,m} - \theta n$ при этом имеет двойное экспоненциальное распределение, что аналогично имеющемуся в работе Комлоша и Тушнеди[22] результату для статистики Эрдаша-Реньи.

Завершают главу 2 условные предельные функциональные теоремы. Рассмотрим

$$X_m^{(n)}(t) = \frac{S_{[nt],m} + (nt - [nt])X_{[nt]+1+m} - \theta nt}{\sigma(h_\theta)\sqrt{n}},$$

$$\tilde{X}_m(t) = \frac{S_{[mt]} + (mt - [mt])X_{[mt]+1}}{\sigma\sqrt{m}}, \text{ при условии } \sigma^2 := EX^2 < \infty,$$

представляющие собой случайные процессы, соответствующие блужданию на отрезке [m,m+n] и [0,m], соответственно. Заметим, что процессы нормируются неодинаково. Это связано с тем, что дальнейшие рассуждения будут вестись относительно условных мер при условии $m = \tau_n(\theta)$, следовательно, процессы

$X_m^{(n)}(t)$ и $\tilde{X}_m(t)$ описывают участки в момент уклонения и до уклонения. Соответственно, для первого из них предельным процессом будет служить, как и в теореме 1.10 броуновский мост, а для второго, как и в принципе инвариантности Донскера-Прохорова, броуновское движение. Более точно, введем условные распределения вероятностей $Q_m^{(n)}$ и $\tilde{Q}_m^{(n)}$ случайных элементов $X_m^{(n)}(t)$ и $\tilde{X}_m(t)$ в пространстве $C[0,1]$ непрерывных функций с sup-нормой при условии $\tau_n(\theta) = m$. Обозначим через Q_W распределение вероятностей броуновского движения. Тогда справедливы следующие утверждения:
Теорема 2.7. $Q_m^{(n)} \Rightarrow Q_{W^0}$, $m, n \to \infty$.
Теорема 2.8. При $\sigma^2 < \infty$ $\tilde{Q}_m^{(n)} \Rightarrow Q_W$, $m, n \to \infty$, $m < n$.

Теоремы 2.7 и 2.8 являются аналогами условных функциональных предельных теорем работы М.В. Козлова[27]. Метод их доказательства близок к методам, использованным при доказательстве теоремы 2.2 — задача о движущемся окне сводится к задаче о неподвижном, решенной в прошлой главе.

Как и условные функциональные предельные теоремы главы 1, условные функциональные предельные теоремы 2.7 и 2.8 позволяют получить широкий спектр предельных соотношений на поведение функционалов, чьи точки разрыва имеют винеровскую меру 0, примененнных к соответствующим теоремам 2.7, 2.8 участкам блуждания

Методы главы 2, как и методы главы 1, вероятностно прозрачны, и доказательства каждого из результатов 2.1-2.8 позволяют увидеть специфику рассматриваемой задачи.

Глава 3. Статистика размаха и многомерная статистика Шеппа. Рассмотрим для случайного блуждания из глав 1,2 статистику "взлета" $R_n = max_{i \le n} S_i - min_{i \le \tau_n} S_i$. Зададимся вопросом об её больших уклонениях. Оказывается, что вероятность большого уклонения для неё тесно связана с вероятностью большого уклонения максимума:
Теорема 3.1. При $n \to \infty$ соотношение

$$P(R_n \ge \theta n + C\sqrt{n} + u) = (1+o(1))e^{-C^2/(2\sigma^2(\theta))} D^2(\theta) C(\theta) e^{-\Lambda(\theta)n - C\sqrt{n} - h_\theta u} n^{-1/2},$$

выполнено равномерно по $C \in [C_1, C_2] \subset (-\infty, \infty)$, $|u| \le \gamma_n = o(\sqrt{n})$, $\theta \in [\theta_1, \theta_2] \in (0, m^+)$, где $D(\theta)$ — величина, описанная в теореме 1.2

Таким образом, множитель в асимптотике вероятности $P(R_n \ge \theta n + C\sqrt{n} + u)$, аналогичный $D(\theta)$ для $P(M_n \ge \theta n + C\sqrt{n} + u)$, является квадратом $D(\theta)$.

Логичным продолжением изучения задачи о статистике взлета являются теоремы 3.2 и 3.3, аналогичные теоремам 1.8, 1.10. Теорема 3.2 получается достаточно общей и потому громоздкой, поэтому ее формулировка в автореферате будет опущена.

Положим, как и прежде $X^{(n)}(t) = \frac{S_{[nt]} + (nt-[nt])X_{[nt]+1} - \theta nt}{\sigma(\theta)\sqrt{n}}$, $\theta \in (0, m^+)$, $t \in [0,1]$, $\tilde{Y}^{(n)}(t) = X^{(n)}(\frac{\tau_n^{min} + t(\tau_n - \tau_n^{min})}{n})$, $t \in [0,1]$, где τ_n^{min} — момент первого минимума перед первым максимумом.

Обозначим через $Q^{(n)}$, $\hat{Q}^{(n)}$ распределения вероятностей случайных элементов $\tilde{Y}^{(n)}(t)$, $X^{(n)}(t)$ в пространстве $C[0,1]$ при условии большого уклонения $R_n \ge \theta n - u$. Как и прежде будем считать, что $u = o(\sqrt{n})$.

Теорема 3.3. 1) $Q^{(n)} \Rightarrow Q_{W^0}$, $n \to \infty$.

2) $\hat{Q}^{(n)} \Rightarrow Q_{W^0}$, $n \to \infty$.

Если потребовать от блуждания выполнения левостороннего условий Крамера $Ee^{hX} < \infty$, $h^- < h < 0$, отсюда получаются аналогичные 3.1, 3.2, 3.3 утверждения, связанные со статистикой падения $D_n = max_{i \le \tau_n^M} S_i - min_{i \le n} S_i$, где τ_n^M — момент первого максимума случайного блуждания перед первым минимумом на отрезке $[0, n]$.

Удается сформулировать теорему об асимптотике вероятностей больших уклонений и для статистики размаха $T_n = max_{i \le n} S_i - min_{i \le n} S_i$:

Теорема 3.4. Пусть X удовлетворяет левостороннему и правостороннему условиям Крамера. Тогда соотношение

$$P(T_n \ge \theta n + u) = (P(D_n \ge \theta n + u) + P(R_n \ge \theta n + u))(1 + o(1))$$

выполнено равномерно по $|u| \le \gamma_n = o(\sqrt{n})$, $\theta \in [\theta_1, \theta_2] \in (0, min(m^-, m^+))$.

Доказательства теорем 3.1-3.4 значительно упрощаются за счет полученных в первой главе оценок и по трудоемкости значительно уступают теоремам первой главы.

Вторая часть третьей главы посвящена многомерной задаче о статистике Шеппа, аналогичной рассматриваемой, например, Девельсом[18].

Рассмотрим $X_{i_1,\ldots,i_k}$ — н.о.р. сл.в., удовлетворяющие условиям (A), (B). Тогда положим

$$M^d_{n,k_1,\dots,k_d} = \max_{i_1\le n, i_2\le n,\dots,i_n\le n} \big(\textstyle\sum_{k_1\le j_1\le k_1+n,\dots,k_{d-1}\le j_{d-1}\le k_{d-1}+n, k_d\le j_d\le k_d+i_d-1} +$$
$$+\textstyle\sum_{k_1\le j_1\le k_1+n,\dots,k_{d-2}\le j_{d-2}\le k_{d-2}+n, k_{d-1}\le j_{d-1}\le k_{d-1}+i_{d-1}-1, j_d=k_d} +$$
$$+\dots+\textstyle\sum_{k_1\le j_1\le k_1+i_1, j_2=k_2,\dots,j_d=k_d}\big) X_{j_1,\dots,j_d}.$$
$$W^d_{n,m_1,\dots,m_d} := \max_{k_1\le m_1,\dots,k_d\le m_d} M^d_{n,k_1,\dots,k_d}$$

Величина $W^d_{n,m_1,\dots,m_d}$ является d-мерным аналогом статистики Шеппа. Для нее удается найти асимптотику вероятности большого уклонения $W^d_{m_1,\dots,m_d,n} \ge \theta n^d$:
Теорема 3.5. При $n \to \infty,\ m_i \to \infty,\ i \le k:\ \ m_1\dots m_k = o(e^{\Lambda(\theta)n^d} n^{d/2})$, соотношение

$$P(W^d_{m_1,\dots,m_d,n} \ge \theta n^d) = (1+o(1))C(\theta)e^{-\Lambda(\theta)n^d} m_1 m_2 \dots m_k n^{-d/2},$$

выполнено равномерно по $C \in [C_1, C_2] \subset (-\infty,\infty)$, $\theta \in [\theta_1,\theta_2] \in (0, m^+))$.

Эта теорема является аналогом теорем, полученных Девельсом[18]. Однако, следует заметить, что при рассмотрении многомерной задачи теряется специфика движущегося окна, присутствовавшая в одномерной. Фактически, в многомерной задаче отсутствует сцепление окон — вероятность большого уклонения на одном из окон асимптотически равна сумме вероятностей уклонения на каждом. За счет этого зависимость между уклонениями на разных окнах мала и фактически задача сводится к $m_1\dots m_k$ независимым испытаниям Бернулли. Таким образом, многомерная постановка задачи оказывается менее сложной и гораздо менее содержательной, нежели одномерный случай.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю Михаилу Васильевичу Козлову за постановку задач, обсуждения результатов и ценные замечания.

Работы автора по теме диссертации

1. Шкляев А.В. Предельные теоремы для случайного блуждания при условии большого уклонения максимума. Теория вероятностей и ее применения, 2010, 55, 3, 590-598.

2. Шкляев А.В. Большие уклонения статистики Шеппа. Теория вероятностей и ее применения. Теория вероятностей и ее применения, 2010, 55, 4, 796-803.

3. Шкляев А.В. Большие уклонения статистик взлета, падения и размаха. Обозрение прикладной и промышленной математики, 2010, 18, 1, 594-596.