МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

Механико–математический факультет

На правах рукописи
УДК 519.21

Ярцева Дарья Андреевна

СТОХАСТИЧЕСКИЕ АКТУАРНЫЕ МОДЕЛИ, УЧИТЫВАЮЩИЕ ПЕРЕСТРАХОВАНИЕ

01.01.05 — теория вероятностей и математическая статистика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико–математических наук

МОСКВА
2011

Работа выполнена на кафедре теории вероятностей механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель доктор физико–математических наук, профессор
Булинская Екатерина Вадимовна

Официальные оппоненты доктор физико–математических наук, профессор
Королев Виктор Юрьевич

кандидат физико–математических наук
Белкина Татьяна Андреевна

Ведущая организация Институт Проблем Информатики РАН

Защита диссертации состоится «29» апреля 2011 года в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.85 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16–24.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан «29» марта 2011 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д 501.001.85 при МГУ,
доктор физико-математических наук,
профессор

В.Н. Сорокин

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы

Страхование является важной частью жизни современного общества. В 20-м веке изучение работы страховой компании дало большой толчок развитию современной теории вероятностей: в диссертации Лундберга[1] впервые был рассмотрен пуассоновский процесс. Крамер был одним из тех ученых, которые стояли у истоков теории случайных процессов.

Основная задача страховой компании — обеспечение выплаты возмещений полисодержателям. Именно поэтому в первых работах по изучению деятельности страховых компаний ставился вопрос, сможет ли компания выплатить все поступившие требования, т.е. какова вероятность неразорения компании. Для вычисления вероятности разорения в модели Крамера-Лундберга применяется формула Поллачека-Хинчина-Беекмана[2]. В дискретном времени для составной биномиальной модели имеются рекурсивные формулы для вычисления вероятности разорения, предложенные Гербером[3]. В дальнейшем предметом изучения стали среднее время до разорения и величина долга компании в момент разорения. Эти величины исследовались как в моделях с непрерывным временем[4], так и в моделях с дискретным временем[5].

Еще одним важным аспектом работы страховой компании является возможность пользоваться услугами перестраховщика[6] или для уменьшения вероятности разорения, или увеличения среднего времени до разорения, или для оптимизации какой-либо еще характеристики работы. Поиск оптимальных в разных смыслах стратегий перестрахования является важным направлением исследований на протяжении нескольких десятилетий и не потерял своей значимости до сих пор, ему посвящено множество работ, в частности, работы Эрроу[7], Хиппа и

[1] F. Lundberg, *Approximations of the Probability Function/Reinsurance of Collective Risks*, doctoral thesis, 1903.

[2] В. Ю. Королев, В. Е. Бенинг, С. Я. Шоргин, *Математические основы теории риска*, М.: Физико-математическая литература, 2007.

[3] H. U. Gerber, *Mathematical fun with compound binomial model*, ASTIN Bulletin, 1988, Vol. 18(2), pp. 161-168.

[4] H. U. Gerber, E. S. W. Shiu, *The joint distribution of the time of ruin, the surplus immediately before ruin, and the deficit at ruin*, Insurance: Mathematics and Economics, 1997, Vol. 21(2), pp. 129-137.

[5] S. Li, J. Garrido, *On the time value of ruin in the discrete time risk model*,Working paper 02–18, Business Economics, University Carlos III of Madrid, 2002, pp. 1–28.

[6] Е. В. Булинская, *Теория риска и перестрахование*, М.: Мейлор, 2009.

[7] K. J. Arrow, *Essays in the Theory of Risk Bearing*, Chicago: Wiley, 1971.

Вогта[8], Белкиной и Матвеевой[9], Голубина[10]. В диссертации исследуется вопрос нахождения стратегий перестрахования, минимизирующих средние издержки.

В 1957 году де Финетти[11] предложил обратить внимание на то, что страховая компания является акционерным обществом и имеет также задачу выплачивать своим акционерам дивиденды. Как следствие, появилось много работ в этом направлении[12,13,14]. А именно, искались стратегии, максимизирующие средние дисконтированные дивиденды, полученные до разорения. В большинстве случаев оптимальными оказываются барьерные стратегии выплаты дивидендов, а модели, учитывающие выплату дивидендов становятся новым объектом исследований. Работа Лина и соавторов[15] посвящена изучению среднего времени до разорения и величины долга компании в момент разорения в классической модели Крамера-Лундберга с барьерной стратегией выплаты дивидендов.

Де Финетти показал, что при использовании барьерной стратегии выплаты дивидендов компания неминуемо разоряется. Поэтому в 2004 году Диксоном и Уотерсом[16] была предложена модификация таких моделей, позволяющая продолжать работу бесконечное время. В ней предполагается, что в момент, когда капитал компании становится отрицательным, акционеры выплачивают долги клиентам и доводят капитал до некоторого положительного уровня. В такой модификации

---

[8]C. Hipp, M. Vogt, *Optimal Dynamical XL Reinsurance*, ASTIN Bulletin, 2003, Vol. 33, pp. 193–207.

[9]Т. А. Белкина, М. В. Матвеева, *Об оптимальных стратегиях перестрахования в моделях с диффузной аппроксимацией процесса риска.* В сб. "Инновационная система государства и перспективы ее развития". Гомель: ЦИИР, 2010. с. 43-54.

[10]А. Ю. Голубин, *Оптимизация дележа риска в статической модели с перестрахованием*, Автоматика и телемеханика, 2009, №8, с. 133-143.

[11]B. de Finetti, *Su un' impostazione alternativa della teoria collettiva del rischio*, 1957, Transactions of the XVth International Congress of Actuaries 2, pp. 433-443.

[12]H. Bühlman, *Mathematical methods in risk theory*, Springer-Verlag. Heidelberg. 1970.

[13] М. Жанблан-Пике, А. Н. Ширяев, *Оптимизация потока дивидендов*, УМН, 1995, 50:2(302), с. 25-46

[14]H. Albrecher, S. Thonhauser, *Optimality results for dividend problems in insurance*, RACSAM Revista de la Real Academia de Ciencias; Serie A, Matematicas, 2009, 103(2), pp. 295-320.

[15]X. S. Lin, G. E. Willmot, S. Drekic. *The Classical Risk Model with a Constant Dividend Barrier: Analysis of the Gerber-Shiu Discounted Penalty Function*, Insurance: Mathematics and Economics, 2003, 33(3), pp. 551–566

[16]D. C. M. Dickson, H. R. Waters, *Some Optimal Dividends Problems*, Astin Bulletin, 2004, Vol. 34(1), pp. 49-74.

новым объектом для исследования становится доход акционеров.

Большинство рассматриваемых моделей относилось к случаю непрерывного времени. Однако на практике расчеты чаще всего производятся методом дискретизации (метод дискретизации классической модели Крамера-Лундберга был предложен Диксоном и Уотерсом[17]). Кроме того, выплата дивидендов и заключение договоров перестрахования производятся обычно в конце финансового года. Именно поэтому проводимое в диссертации исследование моделей работы компании в дискретном времени является актуальным.

Цель работы

Целью работы является исследование математических моделей работы страховой компании с выплатой дивидендов и перестрахованием.

Научная новизна

Основные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем.

1. Получены оценки различных количественных показателей качества работы страховой компании в дискретном времени для случаев дискретного и непрерывного распределения страховых выплат.

2. Для моделей, в которых деятельность компании рассматривается на некотором ограниченном временном промежутке, доказано существование стратегий пропорционального и непропорционального перестрахования, минимизирующих средние издержки.

3. Доказана устойчивость моделей к изменению распределения страховых выплат.

4. В модели, модифицированной по Диксону-Уотерсу, установлены условия существования предельного распределения капитала компании и найден вид этого распределения.

Методы исследования

Методика исследования основана на общих методах теории вероятностей, линейной алгебры, динамического программирования и функционального анализа.

[17] D. C. M. Dickson, H. R. Waters, *Recursive calculation of survival probabilities*, Astin Bulletin, 1991, Vol. 21(2), pp. 199-221.

Теоретическая и практическая ценность

Диссертация носит теоретический характер. Полученные результаты могут представлять интерес для специалистов в области страховой математики как при теоретических исследованиях, так и на практике.

Апробация работы

Результаты диссертации докладывались на Большом семинаре кафедры теории вероятностей механико-математического факультета МГУ (2010г., руководитель семинара и заведующий кафедрой – член-корреспондент РАН А. Н.Ширяев), на спецсеминаре "Проблемы теории запасов и страхования" кафедры теории вероятностей мехмата МГУ (2007-2010гг., руководитель – профессор, д.ф.-м.н. Е.В. Булинская), на спецсеминаре "Теория риска и смежные вопросы" кафедры математической статистики факультета ВМиК МГУ (заведующий кафедрой - академик РАН Ю.В. Прохоров) под руководством д.ф.-м.н. проф. В.Е. Бенинга и д.ф.-м.н. проф. В.Ю. Королева (2010 г.), на семинаре "Вероятностные проблемы управления и стохастические модели в экономике, финансах и страховании" ЦЭМИ РАН под руководством д.ф.-м.н. Э.Л. Пресмана и к.ф.-м.н. В.И. Аркина (2010 г.), на XVII Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов-2010" (МГУ, Москва, 12-15 апреля 2010 г.), на 6-м Международном семинаре по моделированию (Санкт-Петербург, 24 июня - 4 июля 2009 г.), на Международной конференции по методам стохастического моделирования и анализа данных в г. Ханья (Греция, 8-11 июня 2010 г.).

Публикации

По теме диссертации опубликовано 5 работ, из них 2 в журналах перечня ВАК, список работ приведен в конце настоящего автореферата.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из оглавления, введения, трех глав и списка литературы, содержащего 53 наименования. Общий объем диссертации составляет 97 страниц.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

В **главе 1** рассматриваются две модели работы страховой компании в дискретном времени. Предполагается, что компания использует барьерную стратегию выплаты дивидендов, состоящую в том, что при превышении текущим капиталом компании некоторого уровня b, называемого барьером выплаты дивидендов, весь излишек капитала немедленно выплачивается в качестве дивидендов и капитал компании становится равным b.

В первом параграфе рассматривается модель, в которой распределение выплат и капитал компании дискретны. Пусть S_i — капитал компании в момент i, тогда капитал компании в момент $i+1$ есть

$$S_{i+1} = \min(S_i + c - \xi_{i+1}, b),$$

где c — приход премий в единицу времени, $b, c \in \mathbb{N}$, а выплаты ξ_i — неотрицательные независимые одинаково распределенные случайные величины, $p_t = \mathrm{P}(\xi_i = t), t = \overline{0,k}$, и $c < k < b$. Начальный капитал $S_0 = x$. Момент разорения

$$\tau = \min\{i : S_i < 0\}.$$

Дивиденды, полученные в $(i+1)$-й год, задаются равенством

$$d_{i+1} = (S_i + c - \xi_{i+1} - b)^+,$$

где $(f(x))^+ = \max(f(x), 0)$.

Нас интересуют v_x — средние дисконтированные дивиденды, полученные до момента разорения, при условии, что начальный капитал равнялся x, $x = \overline{0,b}$, т.е.

$$v_x = \mathrm{E}_x \sum_{i=1}^{\tau} \alpha^i d_i,$$

где $0 < \alpha < 1$ — коэффициент дисконтирования.

Величины v_x удовлетворяют системе линейных уравнений, имеющей решение при $\alpha < 1$, которое в общем случае можно найти лишь численно, поэтому возникает вопрос поиска оценок v_x как функций от распределения случайных величин ξ_i.

Теорема 1.1 *Среди всех распределений случайных величин* ξ_i', *таких, что* $\sum_{l=0}^{c-1} P(\xi_i' = l) \geq \sum_{l=0}^{c-1} p_l$ *и* $\sum_{l=c+1}^{k} P(\xi_i' = l) \geq \sum_{l=c+1}^{k} p_l$, *максимальное значение дивидендов достигается на распределении случайной величины* ξ_i^{max}, *для которой* $P(\xi_i^{max} = 0) = \sum_{l=0}^{c} p_l$ *и* $P(\xi_i^{max} = c+1) = \sum_{l=c+1}^{k} p_l$. *Минимальное значение дивидендов задается распределением случайной величины* ξ_i^{min}, *для которой* $P(\xi_i^{min} = c-1) = \sum_{l=0}^{c-1} p_l$ *и* $P(\xi_i^{min} = k) = \sum_{l=c}^{k} p_l$.

Для случая двуточечных распределений требований, т.е. при $p_0 = p$ и $p_k = 1-p$, можно рассмотреть средние дисконтированные дивиденды как функции p и построить линейные оценки $v_x(p)$.

Теорема 1.4 *Для всех $0 \le p \le 1$ имеют место неравенства*

$$\max(0, (p-1)D + v_x(1)) \le v_x(p) \le \min(c(1-\alpha)^{-1}p, (p-1)d + v_x(1)),$$

где $D = \max(\kappa_x)_{x=\overline{0,b}}$ и $d = \min(\bar\kappa_x)_{x=\overline{0,b}}$, а $\kappa_x = v_x(1)(1-\alpha)^{-1}$ и $\bar\kappa_x = v_x(1)$ при $0 \le x < k-c$, и $\bar\kappa_x = \kappa_x = (v_x(1) - \alpha v_{x-(k-c)}(1))(1-\alpha)^{-1}$ при $k - c \le x \le b$.

В модификации Диксона-Уотерса предполагается, что в случае разорения компании акционеры покрывают убытки из средств, ранее выплаченных в качестве дивидендов, и возвращают капитал компании на некоторый уровень x_0. Капитал компании в момент $i+1$ при таких условиях есть

$$S_{i+1} = \begin{cases} \min(S_i + c - \xi_{i+1}, b), & \text{если } S_i + c - \xi_{i+1} \ge 0, \\ x_0, & \text{если } S_i + c - \xi_{i+1} < 0. \end{cases} \quad (1)$$

Пусть r_{i+1} — изменение баланса акционеров в $(i+1)$-й год (полученные дивиденды или выплаченные убытки), задающееся следующим образом

$$r_{i+1} = \begin{cases} S_i + c - \xi_{i+1} - b, & \text{если } S_i + c - \xi_{i+1} > b, \\ S_i + c - \xi_{i+1} - x_0, & \text{если } S_i + c - \xi_{i+1} < 0, \\ 0, & \text{если } b \ge S_i + c - \xi_{i+1} \ge 0. \end{cases}$$

Рассмотрим w_x — дисконтированную прибыль акционеров при начальном капитале x, $x = \overline{0,b}$, т.е.

$$w_x = \mathrm{E}_x \sum_{i=1}^{\infty} \alpha^i r_i.$$

Как и в случае средних дисконтированных дивидендов, средняя дисконтированная прибыль удовлетворяет системе линейных уравнений, имеющей решение, которое можно найти лишь численно. Поэтому ищутся оценки средней дисконтированной прибыли, которые можно получить аналитически.

Теорема 1.2 *Для w_x справедливы неравенства*

$$x + \alpha(1-\alpha)^{-1}\mathrm{E}(c - \xi_1) - b \le w_x \le x + \alpha(1-\alpha)^{-1}\mathrm{E}(c - \xi_1).$$

В случае двуточечных распределений выплат справедлива

Теорема 1.6 *Для всех $0 \le p \le 1$*

$$\overline{D}p^2 + (\overline{w}_x - \overline{D})p + w_x(0) \le w_x(p) \le \overline{d}p^2 + (\overline{w}_x - \overline{d})p + w_x(0),$$

где $\overline{D} = \max(\lambda_x)_{x=\overline{0,b}}, \overline{d} = \min(\lambda_x)_{x=\overline{0,b}}$, $\overline{w}_x = w_x(1) - w_x(0)$, *а* λ_x *вычисляются следующим образом:*
$\lambda_x = \alpha(\overline{w}_{x+c} - \overline{w}_{x_0})(1-\alpha)^{-1}$ *при* $0 \leq x < k - c$,
$\lambda_x = \alpha(\overline{w}_{x+c} - \overline{w}_{x-(k-c)})(1-\alpha)^{-1}$ *при* $k - c \leq x \leq b - c$,
$\lambda_x = \alpha(\overline{w}_{b} - \overline{w}_{x-(k-c)})(1-\alpha)^{-1}$ *при* $b - c < x \leq b$.

Во втором параграфе первой главы исследуется модифицированная модель, в которой распределение выплат абсолютно непрерывно и имеет плотность $p_\xi(\cdot)$. Также добавляется возможность перестрахования: страховая компания может отдать долю рисков $t_q(x)$ в перестрахование, $0 \leq t_q(x) \leq 1 - \varepsilon$. Дополнительно предполагается, что обязательства по выплате дополнительных средств перестраховщику характеризуются коэффициентом $\theta \in (-1, 1)$. В этом случае капитал компании при $i \geq 0$ эволюционирует по закону

$$S_{i+1} = \min[S_i + c(1 - t_q(S_i)) - c\theta t_q(S_i) - \xi_{i+1}(1 - t_q(S_i)), b].$$

Определение момента разорения остается прежним. Средние дисконтированные убытки $l(x) = \mathrm{E}(-\alpha^\tau S_\tau | S_0 = x)$. Средние дисконтированные дивиденды, полученные до разорения, при начальном капитале $S_0 = x$ есть

$$v(x) = \mathrm{E}_x \sum_{i=0}^{\tau} \alpha^i (S_i + c(1 - t_q(S_i)) - c\theta t_q(S_i) - \xi_{i+1}(1 - t_q(S_i)) - b)^+.$$

Выведены интегральные уравнения для отыскания средних дисконтированных убытков и средних дисконтированных дивидендов, полученных до разорения, и доказано существование решений этих уравнений. Предложен метод нахождения оценок решений таких уравнений и получены оценки средних дисконтированных дивидендов и средних дисконтированных убытков.

Утверждение 1.5 *Имеет место неравенство*

$$v(x) \geq \alpha \frac{f_v(b)}{1 - \alpha \int_0^{f_1(b)} p_\xi(y)dy} \int_0^{f_1(x)} p_\xi(y)dy + f_v(x),$$

где $f_1(x) = \frac{x + c(1 - t_q(x)) - c\theta t_q(x) - b}{1 - t_q(x)}$.
$f_v(x) = \alpha \int_0^{f_1(x)} (x + c(1 - t_q(x)(1 + \theta)) - y(1 - t_q(x)) - b) p_\xi(y)dy$ *при* $f_1(x) \geq 0$ *и* $f_v(x) = 0$ *при* $f_1(x) < 0$.

Также получены оценки среднего времени до разорения. Если ставить задачу нахождения стратегии перестрахования, максимизирующей среднее время до разорения, то такая стратегия может быть найдена среди стратегий вида $t_q(x) = const$ при ограничениях, указанных в следующем утверждении.

Утверждение 1.7 *Если $p_\xi(y) = \lambda$ на отрезке $[0, \lambda^{-1}]$, причем $\lambda^{-1} > (b+c\varepsilon-c\theta(1-\varepsilon))\varepsilon^{-1}$, а соотношение параметров b, c и θ таково, что $b + c\theta \le 0$, то оптимальная стратегия перестрахования имеет следующий вид: $t_q(x) = 1 - \varepsilon$.*

Более подробно вопрос существования оптимальных стратегий перестрахования исследуется во **второй главе**. Предполагается, однако, что в случае, если капитала компании не хватает для покрытия всех требований, то компания берет банковский кредит под процентную ставку β, и ставится задача минимизации средней платы за пользование кредитом. Рассматривается конечный временной горизонт n лет.

В первом параграфе рассматривается модель с динамикой капитала, задаваемой соотношением

$$S_i(S_{i-1}, t_q^{n-i+1}(S_{i-1})) =$$
$$= \min[S_{i-1} + c - ct_q^{n-i+1}(S_{i-1})(1+\theta) - (1 - t_q^{n-i+i}(S_{i-1}))\xi_i, b],$$

где b, c, θ и ξ_i имеют тот же смысл, что и во втором параграфе первой главы, $S_0 = x$, а доля $t_q^{n-i+1}(\cdot)$, отдаваемая в перестрахование, зависит не только от капитала в конце предыдущего года, но и от оставшегося до момента n числа шагов. Минимальная средняя плата за пользование кредитами в течение n лет есть

$$\varphi_n(x) = \min_{t_q^1(\cdot),\dots,t_q^n(\cdot)} \mathrm{E}_x \sum_{i=1}^{n} \beta(S_i(S_{i-1}, t_q^{n-i+1}(S_{i-1})))^-,$$

где $S^- = -\min(S, 0)$. Издержки за 1 год есть $K(x, t_q) = \beta(S_1(x, t_q))^-$.

Теорема 2.1 *Минимальные средние издержки, возникшие за один год, задаются равенством*

$$\varphi_1(x) = \mathrm{E}K(x, \overline{t}_q(x)),$$

где $\overline{t}_q(x)$ — оптимальная квота, подсчитываемая следующим образом:

если $x \ge c\theta$ или $\mathrm{E}\xi_1 \ge c(1+\theta)$, то $\overline{t}_q(x) = 1 - \varepsilon$,

если $c\theta \ge x \ge c\theta(1-\varepsilon) - \varepsilon c$ и $\mathrm{E}\xi_1 \le c(1+\theta)$, то $\overline{t}_q(x) = \min[\max(t_q^*(x), 0), 1-\varepsilon]$,

если $c\theta(1-\varepsilon)-\varepsilon c \ge x \ge -c$ и $\mathrm{E}\xi_1 \le c(1+\theta)$, то $\overline{t}_q(x) = \max(t_q^*(x), 0)$,

если $x \le -c$ и $\mathrm{E}\xi_1 \le c(1+\theta)$, то $\overline{t}_q(x) = 0$,

где $t_q^*(x)$ — это решение уравнения

$$\int_{y(t_q)}^{+\infty} (z - c(1+\theta))p_\xi(z)dz = 0,$$

и
$$y(t_q)=\frac{x+c-t_q(1+\theta)c}{1-t_q}. \qquad (2)$$

При $n\geq 2$ справедлива следующая теорема.

Теорема 2.2 *Пусть $p_\xi(z)\in C[0,\infty)$, $p_\xi(0)=0$ и $p_\xi(z)>0$ при $z>0$, тогда для любого $n>1$ функция $\varphi_n(x)\in D^2(-\infty,b]$, $\varphi_n'(x)<0$, $\varphi_n''(x)\geq 0$, а оптимальное перестрахование $\overline{t}_q^n(x)$ на первом шаге n-шагового процесса находится следующим образом.*
Если $c(1+\theta)-\mathrm{E}\xi_1\leq 0$, то $\overline{t}_q^n(x)=1-\varepsilon$.
Если $c(1+\theta)-\mathrm{E}\xi_1\geq 0$, то
$\overline{t}_q^n(x)=0$ при $c_1(x)>0$,
$\overline{t}_q^n(x)=1-\varepsilon$ при $c_2(x)<0$,
где
$$c_1(x)=-\beta\int_{x+c}^{\infty}(z-c(1+\theta))p_\xi(z)\,dz+$$
$$+\int_{x+c-b}^{\infty}\varphi_{n-1}'(x+c-z)p_\xi(z)(z-c(1+\theta))\,dz,$$
$$c_2(x)=-\beta\int_{y(1-\varepsilon)}^{\infty}(z-c(1+\theta))p_\xi(z)\,dz+$$
$$+\int_{y(1-\varepsilon)-\frac{b}{\varepsilon}}^{\infty}\varphi_{n-1}'(x+\varepsilon c-(1-\varepsilon)c\theta-\varepsilon z)p_\xi(z)(z-c(1+\theta))\,dz.$$
Для остальных x оптимальная квота $\overline{t}_q^n(x)$ — это единственный корень уравнения $h_n(x,t_q)=0$. Функция $h_n(x,t_q)$ задается следующим образом.
Если $t_q\geq(x+c)(c(1+\theta))^{-1}$, то
$$h_n(x,t_q)=\beta(c(1+\theta)-\mathrm{E}\xi_1)+$$
$$+\int_0^{+\infty}\varphi_{n-1}'((1-t_q)(y(t_q)-z))(z-c(1+\theta))p_\xi(z)dz.$$
Если $(x+c-b)(c(1+\theta))^{-1}\leq t_q\leq(x+c)(c(1+\theta))^{-1}$, то
$$h_n(x,t_q)=-\beta\int_{y(t_q)}^{+\infty}(z-c(1+\theta))p_\xi(z)dz+$$
$$+\int_0^{+\infty}\varphi_{n-1}'((1-t_q)(y(t_q)-z))(z-c(1+\theta))p_\xi(z)dz.$$

Если $t_q \le (x+c-b)(c(1+\theta))^{-1}$, *то*

$$h_n(x,t_q) = -\beta \int_{y(t_q)}^{+\infty} (z - c(1+\theta))p_\xi(z)dz +$$
$$+ \int_{y(t_q)-\frac{b}{1-t_q}}^{+\infty} \varphi'_{n-1}((1-t_q)(y(t_q)-z))(z-c(1+\theta))p_\xi(z)dz.$$

Функция $y(t_q)$*, как и прежде, задается равенством (2).*

Во втором параграфе рассматривается следующая модель, использующая непропорциональное перестрахование. Пусть x — начальный капитал компании, c — премии, полученные за один год, положительное число R — уровень собственного удержания, $\rho - 1$ — страховая нагрузка перестраховщика, $\rho > 1$. Выплаты задаются последовательностью неотрицательных независимых одинаково распределенных случайных величин ξ_i, $i \ge 1$, имеющих плотность $p_\xi(z)$ и $\bar{F}(z) = \int_z^\infty p_\xi(y)dy$, причем $p_\xi(z) > 0$ при $z > 0$.

Предполагается, что компания работает n лет, уровень собственного удержания зависит от капитала в конце предыдущего года и времени до конца работы, а капитал компании эволюционирует по закону

$$S_i(S_{i-1}, R^{n-i+1}(S_{i-1})) = a(S_{i-1}, R^{n-i+1}(S_{i-1})) - \min(\xi_i, R^{n-i+1}(S_{i-1})),$$

где $a(x,R) = x + c - \rho \mathrm{E}(\xi_1 - R)^+$. Минимальная средняя плата за пользование кредитами в течение n лет есть

$$\varphi_n(x) = \inf_{R^1(\cdot),\ldots,R^n(\cdot)} \mathrm{E}_x \sum_{i=1}^n \beta(S_i(S_{i-1}, R^{n-i+1}(S_{i-1})))^-.$$

Теорема 2.3 *Оптимальная стратегия перестрахования* $\hat{R}(x)$ *и минимальная средняя плата банку за 1 год следующие.*
Если $x \ge x^*$, *то* $\hat{R}(x) = R^*$ *и* $\varphi_1(x) = 0$.
Если $x^* > x \ge \hat{x}$, *то* $\hat{R}(x) = R^1(x)$ *и* $\varphi_1(x) = \beta \int_{R^*}^{R^1(x)} \bar{F}(y)dy$.
Если $\hat{x} \ge x \ge -c$, *то* $\hat{R}(x) = \infty$ *и* $\varphi_1(x) = \beta \int_{x+c}^{\infty} \bar{F}(y)dy$.
Если $-c > x$, *то* $\hat{R}(x) = \infty$ *и* $\varphi_1(x) = \beta(\mathrm{E}\xi_1 - x - c)$.
При этом R^* *— это корень уравнения* $1 - \rho\bar{F}(R) = 0$, $\hat{x} = R^* - c$, $x^* = R^* + \rho \int_{R^*}^{\infty} \bar{F}(y)\,dy - c$, *а* $R^1(x)$ *задается соотношением* $a(x, R^1(x)) = R^*$.

При $n \ge 2$ верна следующая теорема.

Теорема 2.4 *При* $x \ge nx^*$ *оптимальная стратегия перестрахования на первом шаге* n*-шагового процесса* $\hat{R}^n(x) = R^*$.

При $n = 2$ *существует и единственное* $x_2 < 2x^*$ *— корень уравне-*

ния

$$\beta(1-\rho\bar F(x_2+c))+\rho\int_{(x_2+c-x^*)^+}^{\infty}\varphi_1'(x_2+c-y)p_\xi(y)\,dy+\beta=0.$$

При $x \le x_2$ оптимальная стратегия перестрахования $\hat R^2(x)=\infty$. При $x_2<x<2x^*$ рассмотрим уравнение

$$\beta(1-\rho\bar F(a(x,R)))I_{\{a(x,R)<R\}}+\rho\int_{(a(x,R)-x^*)^+}^{R}\varphi_1'(a(x,R)-y)p_\xi(y)\,dy+$$
$$+(\rho\bar F(R)-1)\varphi_1'(a(x,R)-R)=0, \qquad (3)$$

Для каждого x возможны 2 случая:

либо уравнение (3), имеет единственный корень $R^2(x)$, который и является оптимальным значением уровня собственного удержания,

либо уравнение (3) не имеет корней, тогда оптимальное значение уровня собственного удержания $\hat R^2(x)$ — это корень уравнения $a(x,\hat R^2(x))=\hat R^2(x)$.

Оптимальные стратегии на первом и втором шаге связаны следующим образом. На отрезке $[x^*,2x^*]$ выполняется соотношение $\hat R^2(x)\ge R^*$, а на отрезке $[\hat x,x^*]$ выполнено $\hat R^2(x)\ge R^1(x)$ при

$$\phi_\infty=\rho\int_{(R^*-x^*)^+}^{\infty}\varphi_1'(R^*-y)p_\xi(y)\,dy+\beta\le 0,$$

а при $\phi_\infty>0$ имеют место неравенства

$$R^1(x)\le\hat R^2(x)\quad \text{при } x\ge x^{int},\qquad R^1(x)\ge\hat R^2(x)\quad \text{при } x\le x^{int},$$

где x^{int} — это корень уравнения $R^1(x^{int})=R^{int}$, а R^{int} — это корень уравнения $\rho\int_0^{R^{int}}\varphi_1'(R^*-y)p_\xi(y)\,dy+(\rho\bar F(R^{int})-1)\varphi_1'(R^*-R^{int})=0$.

В первом параграфе **третьей главы** рассматривается вопрос устойчивости средних дисконтированных убытков и средних дисконтированных дивидендов к изменению распределения величин страховых выплат. Рассматривается модель из второго параграфа первой главы. Показано, что при небольшом изменении распределения величин страховых выплат дивиденды и убытки изменятся мало.

Утверждение 3.1 *Пусть $v_i(x)$ — средние дисконтированные дивиденды, полученные до разорения, при отсутствии перестрахования и при выплатах, имеющих распределение $F_i(\cdot)$ и плотность распределения $p_i(\cdot)$, $i=1,2$. Тогда*

$$|v_1(x)-v_2(x)|\le\frac{\alpha c}{(1-\alpha)^3}\left(c\varepsilon_{p,c}+\frac{\alpha b}{1-\alpha}\varepsilon_{p,b+c}+\frac{\alpha^2}{(1-\alpha)^2}\varepsilon_{F,c}\right),$$

где $\varepsilon_{p,c} = \max_{0\le y\le c}|p_1(y) - p_2(y)|$, $\varepsilon_{F,c} = \max_{0\le y\le c}|F_1(y) - F_2(y)|$.

Во втором параграфе изучается вопрос существования предельных распределений капитала компании в модификации Диксона-Уотерса, т.е. в модели, в которой капитал компании эволюционирует по закону (1) и случайные величины ξ_i имеют плотность $p_\xi(\cdot)$. Верна следующая теорема.

Теорема 3.5 *Последовательность случайных величин* S_n *слабо сходится при* $n\to\infty$, *если*

$$\max_{0\le x\le x_0}\int_0^b |p_\xi(y+c-x) - p_\xi(y+c)|\,dy < 1$$

и

$$\max_{x_0\le x\le b}\int_0^b p_\xi(y+c-x)\,dy < 1.$$

Предельная функция распределения $F(x)$ *имеет вид*

$$F(x) = P^b I(x\ge b) + P^{x_0} I(x\ge x_0) + \tilde F(x),$$

где

$$\tilde F(x) = (1-P^{x_0})(\bar F_\xi(b+c-x) - \bar F_\xi(b+c)) + P^{x_0}\bar F_\xi(x_0+c-x) -$$

$$- P^{x_0}\bar F_\xi(x_0+c) + \int_0^b \tilde F(z)(p_\xi(z+c-x) - p_\xi(z+c))\,dz,$$

$$P^{x_0} = (1-P^{x_0})\bar F_\xi(b+c) + P^{x_0}\bar F_\xi(x_0+c) + \int_0^b \tilde F(y)p_\xi(y+c)\,dy,$$

$$P^b = 1 - P^{x_0} - \tilde F(b).$$

В случае, если компания использует, например, квотное пропорциональное перестрахование с долей t_q, отдаваемой в перестрахование, и премией c^q, получаемой после выплаты премии перестраховщику, и капитал компании эволюционирует по закону

$$S_{n+1}^q = \begin{cases} b, & \text{если } S_n^q + c^q - (1-t_q)\xi_{n+1} \ge b;\\ S_n^q + c^q - (1-t_q)\xi_{n+1}, & \text{если } 0\le S_n^q + c^q - (1-t_q)\xi_{n+1} < b;\\ x_0, & \text{если } S_n + c^q - (1-t_q)\xi_{n+1} < 0,\end{cases}$$

будет верна

Теорема 3.6 *Последовательность случайных величин* S_n^q *слабо* *сходится при $n \to \infty$, если*

$$\max_{0 \le x \le x_0} \int_0^b (1-t_q)^{-1} |p_\xi((y+c^q-x)(1-t_q)^{-1}) - p_\xi((y+c^q)(1-t_q)^{-1})|\, dy < 1$$

и

$$\max_{x_0 \le x \le b} \int_0^b (1-t_q)^{-1} p_\xi((y+c^q-x)(1-t_q)^{-1})\, dy < 1.$$

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю, доктору физико–математических наук, профессору Екатерине Вадимовне Булинской за постановку задач, постоянное внимание и помощь в работе.

Работы автора по теме диссертации

[1] Ярцева Д. А. *Верхние и нижние оценки дивидендов в дискретной модели*, Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика. 2009. № 5, с. 60-62.

[2] Ярцева Д. А. *Предельное распределение капитала компании в модели с выплатой дивидендов*, Обозрение прикладной и промышленной математики. 2010. Том 17, выпуск 6, с. 830-838.

[3] Ярцева Д. А. *Устойчивость некоторых актуарных моделей,* Деп. в ВИНИТИ №668-В2010, 31 стр.

[4] Yartseva D. *Optimal Reinsurance Strategies for Some Discrete Time Models*, Proceedings of 6th St. Petersburg Workshop on Simulation, 2009, p. 73-78.

[5] Bulinskaya E., Yartseva D. *Discrete Time Models with Dividends and Reinsurance*, Book of Abstracts of Stochastic Modeling Techniques and Data Analysis International Conference, Chania, Greece, 8-11 June 2010, p. 21.

Булинской Е.В. принадлежит постановка задачи, остальные результаты принадлежат Ярцевой Д.А.