Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова

Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 517.98

Толстыга Диана Сергеевна

ФОРМУЛЫ ФЕЙНМАНА ДЛЯ ПОЛУГРУПП ШРЕДИНГЕРА, ПОРОЖДАЕМЫХ САМОСОПРЯЖЕННЫМИ РАСШИРЕНИЯМИ ОПЕРАТОРОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва, 2011

Работа выполнена на кафедре теории функций и функционального анализа Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук профессор Смолянов Олег Георгиевич.
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук профессор Сакбаев Всеволод Жанович, доктор физико-математических наук профессор Шавгулидзе Евгений Тенгизович.
Ведущая организация:	Математический институт им. В. А. Стеклова РАН.

Защита диссертации состоится 8 апреля 2011 года в 16 часов 40 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.85 при Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ, механико-математический факультет, ауд. 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 4 марта 2011 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д 501.001.85 при МГУ,
доктор физико-математических наук,
профессор В. Н. Сорокин

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

Диссертация посвящена получению формул Фейнмана для полугрупп Шредингера $e^{t\widehat{H}}$, описывающих одномерную динамику (квази)частиц с эффективной массой, зависящей от положения частицы. При этом рассматривается случай, когда конфигурационное пространство совпадает либо с $\mathbb{R}^1$, либо с $[0, \infty)$; в первом случае предполагается, что зависимость массы от положения описывается кусочно постоянной функцией, а во втором либо непрерывной, либо, опять-таки, кусочно постоянной функцией.

Формулами Фейнмана (лагранжевыми) называются представления полугруппы Шредингера $e^{t\widehat{H}}$ или группы Шредингера $e^{it\widehat{H}}$ с помощью пределов интегралов по декартовым степеням конфигурационного пространства классической гамильтоновой системы, квантованием которой получается оператор Гамильтона. Это означает, что $\widehat{H}$ - самосопряженный псевдодифференциальный оператор, символом которого является функция Гамильтона H классической системы.

Конечнократные интегралы в формулах Фейнмана аппроксимируют интегралы по мерам (или псевдомерам в случае групп Шредингера $e^{it\widehat{H}}$), определенным на множествах функций вещественного аргумента, принимающих значения в конфигурационном пространстве; представления полугруппы с помощью интегралов по пространству таких функций называются формулами Фейнмана - Каца, сами интегралы называются функциональными (или континуальными), а в случае групп Шредингера - интегралами Фейнамана. Таким образом, получение формул Фейнмана является одним из методов получения формул Фейнмана - Каца.

Рассматриваемые в диссертации дифференциальные операторы обладают ненулевыми индексами дефекта. Такие дифференциальные операторы имеют бесконечное множество самосопряженных расширений; при этом для каждого такого самосопряженного расширения найдена соответствующая формула Фейнмана. Этот результат можно считать решением одной из задач, восходящих к Ф. А. Березину.

Отметим, что хотя в настоящее время существует почти необозримое множество работ, посвященных применению функциональных интегралов[1, 2, 3, 4, 5](см. также имеющиеся в работах ссылки) к исследованию полугрупп и групп Шредингера (или, что то же самое, что и к получению представлений решений задачи Коши для эволюционных уравнений), исследование этими методами динамики частицы с массой, зависящей от положения, началось совсем недавно, при этом, до 2010 года существовали лишь две работы [6, 7], в которых рассматривалась разрывная зависимость массы от координаты. В то же время исследования такого рода представляются важными не только с чисто математической точки зрения, но и с точки зрения приложений, так как частицы с эффективной массой, зависящей от положения, возникают в математических моделях, описывающих процессы в полупроводниках и жидких кристаллах, используемых в приборах, применяемых в радиоэлектронике.

Все сказанное и определяет актуальность темы диссертации.

К сказанному стоит добавить несколько слов об истории обсуждавшихся понятий.

Впервые концепция континуального интегрирования появилась в работе Фейнмана 1948 года. В ней содержатся три основных наблюдения:

1) решение эволюционного уравнения представимо в виде предела конечнократных интегралов по декартовым степеням конфигурационного пространства; эта концепция впоследствии привела к появлению лагранжевых формул Фейнмана. В работе 1951 года Фейнман рассматривал интегралы по декартовым степеням фазового пространства, что впоследствии привело к появлению гамильтоновых формул Фейнмана;

2) полученные конечнократные интегралы можно интерпретировать как интегралы по траекториям (соответствующие формулы называются формулами Фейнмана - Каца);

3) подынтегральные функции совпадают с экспонентами от действия в лагранжевой форме (в работе 1951 года Фейнман рассматривал действие в гамильтоновой форме).

---

[1]Гаделья М., Смолянов О.Г. ДАН, Т. 418, № 6, 2008, с. 727 - 730.

[2]Бутко Я.А., Смолянов О.Г., Шиллинг Р.Л., ДАН, 434, № 1, 2010, с. 7-11.

[3]Smolyanov O.G., Tokarev A.G., Truman A., Journal of Mathematical Physics, V.43, №10, 2002, p. 5161-5171.

[4]Будко Я.А., Гротхаус М., Смолянов О.Г., ДАН, Т. 421, №6, 2008, с. 727-732.

[5]Smolyanov O.G., Feynman Type Formulae for Quantum Evolution and Diffusion on manifolds., Quantum Bio-Informatics III, World Scientific Publishing, p. 337-347, 2010.

[6]Сакбаев В.Ж., Смолянов О.Г., ДАН, Т. 433, № 3, с. 314-317, 2010

[7]Вайцзеккер Х. фон, Смолянов О.Г., Формулы Фейнмана, порождаемые самосопряженными расширениями оператора Лапласа.,"Доклады Академии наук", 2009, Том 426, № 2, стр. 162–165.

Конечно, все эти наблюдения были сформулированы Фейнманом на физическом уровне строгости. Теория интеграла Фейнмана является своего рода бесконечномерным аналогом классического гармонического анализа функций, определенных на конечномерном евклидовом пространстве; а такого рода обобщение представляет ряд реальных математических трудностей. Первое доказательство (в математическом смысле слова) первого наблюдения Фейнмана получил Э. Нельсон в 1964 году, сведя доказательство к применению формулы Троттера (- Далецкого), полученную на 4 года раньше.

Для получения формул Фейнмана - Каца, помимо формул Фейнмана, существует несколько подходов, самые известные из них основаны на аналитическом продолжении меры, а также на равенстве Парсеваля (или, что практически то же самое, на преобразовании Фурье). Развитие математической техники, связанной с функциональным интегрированием, показало, однако, что с точки зрения приложений наиболее удобным является подход, основанный на формулах Фейнмана. Однако для получения самих формул Фейнмана не всегда можно использовать формулу Троттера, поскольку она применима лишь к достаточно узкому классу полугрупп. В этом смысле оказывается полезным использовать теорему Чернова "о произведениях",являющуюся существенным обобщением формулы Троттера, что впервые было отмечено О.Г. Смоляновым [3].

Стоит отметить несколько математических монографий, посвященных интегралу Фейнмана[8, 9, 10]. Книга Альбеверио и Хег-Крона (1976) представляет педагогический интерес, однако в ней рассматриваются интегралы Фейнмана от функций, являющихся преобразованием Фурье обычных счетно-аддитивных мер на бесконечномерном пространстве, что значительно сужает область применение формул Фейнмана - Каца. Книга В.П. Маслова, вышедшая одновременно, содержит ряд глубоких идей, однако формул Фейнмана в явном виде нет и в ней. Много полезной информации можно найти в сравнительно недавно вышедших книгах [11, 12]. В то же время книга О.Г. Смолянова и Е.Т. Шавгулидзе (1990) до настоящего време-

[8] О.Г. Смолянов, Е.Т. Шавгулидзе, Континуальные Интегралы, Издательство МГУ, 1990.

[9] В.П. Маслов, Комплексные марковские цепи и континуальный интеграл Фейнмана, 1976.

[10] S.A. Albeverio, R.G. Hoegh-Kron, Mathematical Theory of Feynman Path Integrals, Springer-Verlag, 1976.

[11] P. Cartier, C. Dewitt - Morrete, Functional Integration: Actioin and Symmetries, Cambridge University Press, 2006.

[12] G. W. Johnson, The Feynman Integral and Feynman's Operational Calculus, PressOxford, 2000.

ни остается наиболее полным изложением математической теории интегралов Фейнмана. Авторы получают представления решения уравнений типа Шредингера по траекториям в конфигурационном и фазовом пространствах в достаточно широком классе начальных данных и потенциалов, используя четыре различных определения континуального интеграла. Однако теорема Чернова в книге явно не упоминается.

Цель работы

Основная цель работы – получить формулы Фейнмана для полугрупп Шредингера $e^{t\widehat{H}}$, описывающих одномерную динамику частицы на полупрямой; квазичастицы с эффективной массой, зависящей от положения, на прямой и на полупрямой. При этом предполагается, что зависимость массы квазичастицы от положения описывается кусочно постоянной функцией.

Научная новизна

Все результаты диссертации являются новыми. Основные из них заключаются в следующем:

1) для полугрупп Шредингера, порождаемых гамильтонианом получены аппроксимирующие их формулы Фейнмана для одномерной динамики частицы на полупрямой в потенциальном поле. Решение этой задачи можно интерпретировать как решение одной из возможных формализаций проблемы, поставленной Ф.Б. Березиным более 30 лет назад, то есть результат позволяет для разных самосопряженных расширений гамильтониана получать взаимнооднозначно соответствующие им формулы Фейнмана. А именно, каждая из таких формул параметризуется соответственно некоторым параметром, задающим самосопряженное расширение гамильтониана.

2) получены формулы Фейнмана для полугрупп Шредингера, порождаемых гамильтонианом, описывающим одномерную динамику квазичастицы, со скачкообразно меняющейся (принимающей два значения) массой. В работе подробно рассмотрен случай одного скачка массы, однако в случае, если число скачков, то есть число значений, которые может принимать масса квазичастицы, больше одного, то самосопряженные расширение гамильтониана параметризуются большим числом параметров, однако все рассуждения, приведенные в работе, а, следовательно, и результаты, сохраняются и в этой си-

туации.

3) получены формулы Фейнмана, дающие представление решения задачи Коши в случае эволюции, описываемой гамильтонианом для квазичастицы с переменной массой на полупрямой.

Основные методы исследования

В диссертации используются традиционные методы бесконечномерного анализа, теории операторов и ряд специальных конструкций.

Теоретическая и практическая ценность

Диссертация носит теоретический характер. Ее результаты могут быть использованы в математической физике при изучении представлений решений эволюционных уравнений, описывающих динамику частицы с скачкообразно меняющейся массой и потенциалом, с помощью пределов конечнократных интегралов. Исследования в этой области в последнее время привлекают все больший интерес специалистов, поскольку изучение динамики частицы со скачкообразно меняющейся (эффективной) массой имеет ряд возможных приложений в теории твердого тела, в частности, при компьютерном вычислении решений и моделировании динамики процессов, происходящих в полупроводниках и жидких кристаллах.

Апробация диссертации

Результаты диссертации докладывались на следующих семинарах и конференциях:

- семинаре отдела математической физики МИАН им. В.А.Стеклова РАН под рук. акад. В.С. Владимирова, член-корр. РАН И.В. Воловича в 2011 г.
- научном семинаре "Проблемы необратимости"в МИАН им. В.А. Стеклова РАН под рук. член-корр. РАН Воловича И.В., акад. Козлова В.В., д.ф.м.н. Козырева С.В., проф. Смолянова О.Г. в 2009-2011 гг.
- семинаре "Бесконечномерный анализ"под рук. проф. Смолянова О.Г. и проф. Шавгулидзе Е.Т. в 2010-2011 гг.
- XXXI Конференции Молодых Ученых МГУ им. Ломоносова, Москва 2009 год

- XXXII Конференции Молодых Ученых МГУ им. Ломоносова, Москва, 2010 год

Работа автора поддержана грантами РФФИ 01-00761-а, 10-01-00724-а

Публикации

Основное содержание диссертации опубликовано в 2 работах автора, 2 работы из перечня ВАК. Список работ приведен в конце автореферата [1]-[2].

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы. Объем диссертации – 75 страниц. Библиография включает 68 наименований.

Краткое содержание работы

Во введении (глава 1) проводится обзор работ по теме диссертации, излагается история исследований, относящаяся к формулам Фейнмана и описывается структура диссертации.

В главе 2 доказываются формулы Фейнмана для полугрупп Шредингера, порождаемых самосопряженными операторами, являющимися возмущениями самосопряженных расширений оператора свободного гамильтониана на полупрямой. Доказательство формулы Фейнмана существенно основано на применении теоремы Чернова, поэтому последующие разделы посвящены проверки условий теоремы Чернова. Стоит, однако, отметить, что основная сложность конструкции состоит не только и не столько в проверке условий вышеуказанной теоремы, сколько в получении явного выражения для отображения F^a как композиции трех отображений. Этот результат требует некоторых специальных построений - соответствующих отображений, составляющих композицию исходного. Базовый элемент использованной конструкции $(F_2(t))$ представляет собой решение уравнения с гамильтонианом в правой части, описывающего одномерную эволюцию свободной частицы; следующий элемент композиции $(F_3(t))$ добавляет в решение условие поведения частицы в потенциальном поле, итоговый, и самый главный в данном случае элемент конструкции $(F_1(t))$ позволяет с помощью задания начальных и граничных условий задачи Коши строить взаимно однозначные соответствия между самосопряженными операторами, параметризованными некоторым параметром a, фигурирующем в граничном условии с одной стороны и формулами Фейнмана с другой.

Пусть Ψ, – функция вещественного аргумента, принимающая значения в $L_2(0,\infty)$:

$$\Psi : [0,\infty) \to L_2(0,\infty)$$

Рассматривается следующая задача Коши:

$$\begin{cases} (\Psi'(t))(x) = ((\hat{H}_a + V)(\Psi(t)))(x), t > 0 \\ (\Psi(0))(x) = (\Psi_0)(x) \end{cases} \tag{1}$$

$\hat{H}_a$- самосопряженное расширение оператора $\hat{H}$, областью определения которого является пространство бесконечно дифференцируемых функций с конечным носителем.. Всюду далее для любого оператора A, действующего в X, символом $D(A)$ будем обозначать его область определения. В данном случае символом дифференциального оператора $\hat{H}$ является функция Гамильтона вида: $H(p,q) = -\frac{p^2}{2} + V(q)$.

Если $a \in (-\infty, \infty]$, то соответствующее самосопряженное расширение $\hat{H}_a \in \mathcal{H}$ (где $\mathcal{H}$ - множество таких расширений) $\hat{H}_a : D(H_a) \to L_2(0,\infty)$ определяется следующим образом: ;

$$(\hat{H}_a f)(x) = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}f(x),$$

$D(\hat{H}_a) = \{f \mid f \in L^2(0,\infty), f, f' \in AC(0,\infty), f'' \in L_2(0,\infty), f(0) = af'(0)\}$, если $a \neq \infty$; и $D(\hat{H}_a) = \{f \mid f \in L^2(0,\infty), f, f' \in AC(0,\infty), f'' \in L_2(0,\infty), 0 = f'(0)\}$, если $a = \infty$. Если V - ограниченная измеримая функция на $(0,\infty)$, то оператор (возмущение самосопряженного расширения) $f \mapsto \hat{H}_a f + V(\cdot)f$ с той же областью определения также является самосопряженным; будем обозначать его символом $\hat{H}_a + V$.

Пусть X - банахово пространство, $\mathcal{L}(X)$ - пространство всех ограниченных линейных операторов в X наделенное сильной операторной топологией (обозначим ее символом τ), $\|\cdot\|$ - операторная норма в $\mathcal{L}(X)$, Id - тождественный оператор в X.

Определение Сильной производной функции $F : [0,\infty) \to \mathcal{L}(X)$ в нуле называется (вообще говоря, неограниченный) линейный оператор $F'(0) : D(F'(0)) \to X$, определяемый следующим образом:

$$F'(0)\phi = \lim_{h\to 0, h>0} \frac{F(h)\phi - F(0)\phi}{h},$$

где $D(F'(0))$- пространство всех таких $\phi \in X$, для которых предел существует.

Теорема Чернова. Пусть X банахово пространство, $F : [0,\infty) \to (\mathcal{L}(X), \tau)$ - непрерывное отображение, причем $F(0) = Id$, $\|F(t)\| \leq e^{\alpha t}$для некоторого $\alpha \in \mathbb{R}$ и всех $t > 0$ и сужение $F'(0)$ на D, где D - линейное подпространство пространства $D(F'(0))$, – замыкаемый оператор, замыкание которого обозначим через C. Если C является генератором сильно непрерывной полугруппы e^{tC};

Тогда $[F(\frac{t}{n})]^n$ сходится к e^{tC} при $n \to \infty$ в сильной операторной топологии равномерно по $t \in [0,T]$ для каждого $T > 0$.

Определим отображение $F^a(t) : L_2(0,\infty) \to L_2(0,\infty)$, $a \in (-\infty, \infty]$ используемое в формулировке приводимой ниже теореме:

$$F^a(t) := F_3(t)F_2(t)F_1(t). \tag{2}$$

Для каждого $t>0$ отображения $F_1(t): L_2(0,\infty)\to L_2(-\infty,\infty)$, $F_2(t): L_2(-\infty,\infty)\to L_2(0,\infty)$, $F_3(t): L_2(0,\infty)\to L_2(0,\infty)$ определяются следующим образом:

$$(F_1(t)f)(x)=\frac{\frac{1}{2t}\int_0^{2\sqrt[4]{t}}f(z)dz(1+ax)}{1+a\sqrt[4]{t}}\psi_t(x)+f(x)\varphi_t(x),$$

где $\varphi_t=\eta_t-\psi_t$, $\eta_t:\mathbb{R}^1\to[0,1]$ гладкая функция, такая что $\eta_t(x)=0$ для $x<-3\sqrt[4]{t}$, $\eta_t(x)=1$ для $x>-2\sqrt[4]{t}$, и $\psi_t(x)=\eta_t(x)\eta_t(-x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$ (для $a=\infty$ считаем, что $\frac{1+ax}{1+at}=\frac{x}{t}$);

$$(F_2(t)f)(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x-z)^2}{2t}}f(z)dz,$$

$$(F_3(t)f)(x)=e^{tV(x)}f(x).$$

Основным результатом главы 2 является доказательство следующей теоремы:

Теорема Каковы бы не были $f\in L_2(0,\infty), t>0$ справедливо следующее равенство (формула Фейнмана):

$$e^{t(\hat{H}_a+V)}f=\lim_{n\to\infty}(F^a(\frac{t}{n}))^n f \qquad (3)$$

предел в $L_2(0,\infty)$.

В основе доказательства теоремы лежит проверка условий теоремы Чернова, из которой вытекает справедливость соответствующих формул Фейнмана. Проверка непрерывности отображения $F^a:[0,\infty)\mapsto(\mathcal{L}(X),\tau)$ в сильной топологии основана на классических методах теории операторов в Гильбертовом пространстве. Для доказательства вводится вспомогательная топология Адамара,- топология равномерной сходимости на всех множествах, являющихся множествами элементов сходящихся в X последовательностей. Топология Адамара в общем случае строго сильнее топологии поточечной сходимости. Благодаря этому появляется возможность доказать непрерывность вышеописанного отображения в сильной операторной топологии (то есть, в топологии поточечной сходимости) как композиции трех непрерывных отображений, часть из которых непрерывна в более сильном смысле.

В первой части главы 2 доказывается, что в случае банахова пространства сходимость последовательностей в топологии Адамара и поточечная сходимость совпадают.

Далее в первой части главы 2 доказывается предложение, говорящее о том, что из сходимости одного отображения в сильной операторной топологии, а другого в топологии сходящихся последовательностей следует сходимость в топологии поточечной сходимости их композиции. После чего доказывается непрерывность в топологии Адамара последних двух отображений, составляющих композицию, что автоматически влечет сходимость в топологии поточечной сходимости исходного отображения.

Основным результатом второй части главы 2 является доказательство того, что для некоторого $\alpha \in \mathbb{R}$ и всех $t > 0$ справедливо неравенство $\|F^a(t)\| \leq e^{\alpha t}$, с стандартной операторной нормой. Доказательство сводится к доказательству ограниченности по норме каждого из сомножителей, образующих отображение $F^a(t)$ некоторыми выражениями, которые при взятии их произведения не будут превосходить экспоненты с некоторой степенью.

Основным результатом заключительной третьей части главы 2 является доказательство того, что сужение сильной производной $(F^a)'(0)$ на некоторое векторное подпространство ее области определения является замыкаемым оператором, замыкание которого C является генератором сильно непрерывной полугруппы e^{tC}.

Вначале определяется само векторное подпространство области определения, на которой будет задаваться замыкаемый оператор, порождаемый оператором $(F^a)'(0)$:

$\mathcal{D}((F^a)'(0)) \supset \mathcal{D} := \{f \in L^2(0,\infty), f, f' \in AC(0,\infty), f'' \in L^2(0,\infty),$

$af(0) = f'(0)\ ,\ f''(x) = 0 \forall x \in U_f(0)\}$,(где $U_f(0)$ - окрестность нуля).

Оператор $(F^a)'(0)$ на этой области определяется по формуле Лейбница дифференцирования сложной функции:

$$(F^a)'(0)f = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(F^a(t) - F^a(0))f =$$
$$= F_3'(0)F_2(0)F_1(0)f + F_3(0)[F_2(t)F_1(t)]'|_{t=0}f$$

Затем определяется производная каждого оператора, составляющего композицию. Оказывается, что производная оператора $F^a(t)$ в нуле задается оператором, представляющем возмущение одномерного гамильтониана, заданного на соответствующей области определения.

Для доказательства того, что полученный оператор является замыкаемым, и замыкание является генератором сильнонепрерывной полугруппы используются стандартные методы теории самосопряженных операторов и теории полугрупп, а также теорема Уриновского о замыкаемости оператора (2008).

В Главе 3 доказывается формула Фейнмана для полугрупп Шредингера, порождаемых гамильтонианом, описывающим одномерную динамику квазичастицы со скачкообразно меняющейся массой. Вывод формул Фейнмана, как и в случае, описанном в главе 2, существенно опирается на результат, следующий из теоремы Чернова. То есть получение результатов этой главы сводятся к проверке условий теоремы Чернова. Как и в главе 2 стоит, однако, отметить сложность проводимых рассуждений, предшествующих проверке условий теоремы Чернова. Первая сложность заключается в построении самосопряженного расширения гамильтониана для динамики квазичастицы с эффективной переменно меняющейся массой. Вторая сложность, предшествующая проверке условий теоремы Чернова заключается как и в случае предыдущей главы в построении самого отображения, для которого справедливы условия теоремы Чернова. На этот раз построение усложняется наличием скачка. Искомое отображение представляет собой композицию трех, построение одного из которых базируется на явном виде решения уравнения движения частицы с гамильтонианом в свободном поле, второе учитывает наличие потенциала, а заключительное - принимая во внимание условие сшивки в заданной точке скачка - дает возможность получать взаимоодназначное соответствие между самосопряженными операторами, определяемыми матрицей трансформации T с одной стороны и формулами Фейнмана с другой.

Постановка задачи остается такой же как и в главе 2, меняется только принцип построения возмущенных самосопряженных расширений оператора одномерного гамильтониана $\Delta_{g,0}$ в $L_2(-\infty, \infty)$, который теперь задается следующим образом:

Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$ - некоторое открытое множество , K некоторое его конечное подмножество g -числовая функция на $G\backslash K$, тогда символом $\Delta_{g,K}$ будем обозначать оператор, действующий в $L_2(G)$ такой, что:

(i) $dom(\Delta_{g,K}) = \mathcal{D}(G\backslash K)$ (где $\mathcal{D}(G\backslash K)$ -векторное подпространство бесконечно дифференцируемых комплекснозначных функций на $\overline{G\backslash K}$ с компактным носителем, лежащем в $G\backslash K$);

(ii) если $f \in dom(\Delta_{g,K})$, тогда $\Delta_{g,K} f(x) = trg(x) f''(x)$, где $f''(x)$ производная Гато второго порядка функции f в точке $x \in G$.

В нашем случае $K = \{0\}$, $trg(x) = g(x)$, а $g(x)$ определяется следующим образом:

$g(x) = c_1 > 0$ if $x < 0$, and $g(x) = c_2 > 0$ if $x > 0$, где c_1, c_2 – некоторые константы.

Далее в диссертации проводится описание построения самосопряженных расширений H_T гамильтониана $\frac{1}{2}\Delta_{g,0}$ в пространстве $L_2(-\infty,\infty)$), задаваемых некоторым обратимым оператором $T = (t_{ij})$ в $\mathbb{C}^2$, характеризующемуся своей областью определения $\mathcal{D}_T := \{h|h,h' \in AC(\mathbb{R}\backslash\{0\}), h, h'' \in L_2(-\infty,\infty), h^+ = (h^+(0), h'^+(0)), h^- = (h^-(0), h'^-(0))\}$ ($\in \mathbb{C}^2$; $h^+(0)$, $h'^+(0)$ - пределы в нуле справа функции h и ее производной h' соответственно; h^-, h'^- - пределы в нуле слева тех же функций), тогда $h^+ = Th^-$. Далее, если $f \in dom(\hat{H}_T) = \mathcal{D}_T$, тогда $\hat{H}_T f(x) = \frac{1}{2}g(x)f''(x)$. Если V ограниченная действительно значная измеримая функция на $\mathbb{R}$ тогда оператор $f \mapsto \hat{H}_T f + V(\cdot)f$ (ограниченное возмущение самосопряженого расширения) с той же областью определения также является самосопряженным. Обозначим его $\hat{H}_T + V$.

Задача Коши формулируется аналогично задаче в предыдущей главе.

Теперь зададим отображение, $F^T(t) : X \to X$ (здесь и далее $X = \mathcal{L}^2(-\infty,\infty)$), обеспечивающее применимость теоремы Чернова:

$$F^T(t) = F_6(t)F_5(t)F_4(t). \tag{4}$$

Для любых $t > 0$. Отображения $F_4(t) : X \to X \oplus X$, $F_5(t) : X \oplus X \to X$, $F_6(t) : X \to X$ определяются следующий образом:

$$F_4(t)(f) = (h,k) \in X \oplus X,$$

где

$$h(x) = \begin{cases} (a_+x + z_+)\psi_t(x) + f(x)\varphi_t(x), & \text{if } x > 0; \\ 0, & \text{if } x < 0; \end{cases}$$

$$k(x) = \begin{cases} 0, & \text{if } x > 0; \\ (a_-x + z_-)\psi_t(x) + \varphi_t(-x)f(x), & \text{if } x < 0; \end{cases}$$

$\varphi_t = \eta_t - \psi_t$, $\eta_t : \mathbb{R}^1 \to [0,1]$ бесконечно гладкая функция, такая что $\eta_t(x) = 0$ for $x < -3\sqrt[4]{t}$, $\eta_t(x) = 1$ for $x > -2\sqrt[4]{t}$, and $\psi_t(x) = \eta_t(x)\eta_t(-x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$;

и числа a_+,a_-,z_+,z_- определены из следующей системы уравнений:

$$
\begin{cases}
a_+t + z_+ = \dfrac{1}{2\sqrt[4]{t}} \displaystyle\int_0^{2\sqrt[4]{t}} f(z)dz, \\
-a_-t + z_+ = \dfrac{1}{2\sqrt[4]{t}} \displaystyle\int_{-2\sqrt[4]{t}}^{0} f(z)dz, \\
z_+ = t_{11}z_- + t_{12}a_-, \\
a_+ = t_{21}z_- + t_{22}a_-.
\end{cases}
$$

Далее,

$$
(F_5(t)(h,k))(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi tc_1}} \int_{-\infty}^{\infty} exp(-\frac{(x-z)^2}{2tc_1}) h(z)dz, & \text{if } x > 0; \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi tc_2}} \int_{-\infty}^{\infty} exp(-\frac{(x-z)^2}{2tc_2}) k(z)dz, & \text{if } x < 0; \end{cases}
$$

$(F_3(t)f)(x) = e^{tV(x)f(x)}$, где $V(x)$ - ограниченная измеримая функция на $(-\infty, \infty)$ упоминаемая выше.

Основным результатом главы 3 является следующая теорема:

Теорема Для всех $f \in X$, $t > 0$ справедливо следующее равенство (формула Фейнмана):

$$
e^{t(\widehat{H}_T + V)} f = \lim_{n\to\infty} (F^T(\frac{t}{n}))^n f
$$

где пределы определяются в пространстве X.

Справедливость этого результата аналогично доказывается на основе проверки условий теоремы Чернова.

В первой части главы 3 проверяется непрерывность соответствующего отображения $F^T(t)$, доказательство базируется на результатах, полученных в предыдущей главе. Этот случай усложняется относительно предыдущего наличием скачкообразной массы. В связи с этим доказательство результатов разбивается на два отдельных случая $x > 0$ и $x < 0$, где 0 - точка, в которой происходит скачок массы. В роли подпространства образа функции $F^1(t)$ возникает прямая сумма двух экземпляров пространства X: $X \oplus X$. Элемент этого пространства задается парой (h, k) (фактически прямая сумма в этом случае равносильна декартовому произведению), каждый элемент пары является элементом пространства X. Сходимость в этом пространстве определяется совокупной сходимостью $(h, k)_n$ к некоторому элементу (h, k) этого пространства. При рассмотрении одностороннего интервала, ограниченного точкой, в которой происходит скачок, один из элементов пары вырождается в ноль, что позволяет применить методологию, описанную в предыдущей главе, путем разбиения аналогичных проводимым рассуждений на несколько подслучаев.

Вторая часть главы 3 посвящена доказательству утверждения, что $\|F^T(t)\| \leq e^{\alpha t}$ для некоторых $\alpha \in \mathbb{R}$ и всех $t > 0$ (норма определена в смысле сильной операторной топологии). Здесь нужно учесть что норма в $X \oplus X$ определяется следующим образом: $\|F^1(t)(f)\|_{X\oplus X} = \|(h,k)\|_{X\oplus X} = \max\{\|h\|_X, \|k\|_X\}$.

Поэтому из доказательства ограниченности по соответствующей нормы каждого из элементов пространства $X \oplus X$, будет следовать ограниченность в исходном пространстве. Показав ограниченность по норме каждого из сомножителей, определяющих исходное отображение $F^T(t)$, некоторой функцией переменной t, рост которой не превосходит экпоненциального с некоторым параметром - получим требуемый результат.

Третья часть главы 3 посвящена доказательству того, что ограничение сильной производной $F^{T\prime}(0)$ на некоторое векторное подпространство области определения этой производной является замыкаемым оператором, замыкание которого C является генератором сильно непрерывной полугруппы e^{tC}. Для этого изначально строится область, на которой по правилу Лейбница задается производная $F^{T\prime}(0)$:

$$(F^T)'(0)f = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(F^T(t) - F^T(0))f =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}F_3(t)F_2(t)F_1(t) - F_3(0)F_2(0)F_1(0)f =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{(F_3(t) - F_3(0))[F_2(t)F_1(t)]}{t}f + \lim_{t\to 0}\frac{F_3(0)[F_2(t)F_1(t) - F_2(0)F_1(0)]}{t}f =$$

$$= F_3'(0)F_2(0)F_1(0)f + F_3(0)[F_2(t)F_1(t)]'|_{t=0}f$$

Оказывается, получив по определению значение производной в сильном смысле каждого из операторов мы получим, что $F^{T\prime}(0)f = (\hat{H}^T + V)f$, то есть производная оператора $F^T(0)$ есть возмущение гамильтониана, заданного на соответствующей области определения. Для обоснования того факта, что данный оператор, заданный на соответствующей области определения, является замыкаемым оператором, замыкание которого является генератором сильно непрерывной полугруппы используются методы, аналогичные методам в предыдущей главе.

В главе 4 выводятся формулы Фейнмана для диффузии квазичастицы на полупрямой с переменной массой. Результат в основе своей опирается на результаты двух предыдущих глав и является своего рода смесью результатов в том смысле, что функция, фигурирующая в доказательстве теоремы Чернова представляет собой композицию функций, часть из которых определялась в главе 2, а другая часть в главе 3.

Автор выражает глубокую признательность и благодарность своему научному руководителю – доктору физико - математических наук, профессору Олегу Георгиевичу Смолянову за постановку задачи, постоянную поддержку и внимание к работе.

Список публикаций по теме диссертации

[1] D.S. Tolstyga, "Feynman Formulas Generated by Self-Adjoint Extensions of the Laplace Operator", Russian Journal of Mathematical Physics, 17:3, 2010, p. 251-261.

[2] D.S. Tolstyga, "Feynman Formulas for the Diffusion of Particles with Position-Dependent mass.", Russian Journal of Mathematical Physics, 18:1, 2011, p.71-80.