**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ**
**УНИВЕРСИТЕТ имени М. В. ЛОМОНОСОВА**

Механико-математический факультет

На правах рукописи

УДК 519.217

**ГОРИН Вадим Евгеньевич**

# СЛУЧАЙНЫЕ ЗАМОЩЕНИЯ И СТОХАСТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА НА ГРАФЕ ГЕЛЬФАНДА–ЦЕТЛИНА

Специальность 01.01.05 – теория вероятностей
и математическая статистика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

**Москва 2011**

Работа выполнена на кафедре математической статистики и случайных процессов механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова

| | |
|---|---|
| Научные руководители: | доктор физико-математических наук<br>профессор Гуревич Борис Маркович |
| | доктор физико-математических наук<br>Ольшанский Григорий Иосифович |
| Официальные оппоненты: | доктор физико-математических наук<br>Оселедец Валерий Иустинович |
| | доктор физико-математических наук<br>Хорошкин Сергей Михайлович |
| Ведущая организация: | Санкт–Петербургское отделение<br>Математического института имени<br>В.А. Стеклова РАН |

Защита диссертации состоится 20 мая 2011 г. в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета Д.501.001.85 при Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, МГУ имени М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 19 апреля 2011 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д.501.001.85 при МГУ,
доктор физико-математических наук,
профессор

В. Н. Сорокин

# Общая характеристика работы

**Актуальность темы.** Диссертация посвящена исследованию стохастических моделей, связанных со случайными замощениями и простейшими случайными поверхностями — с одной стороны, и с теорией представлений бесконечномерной унитарной группы — с другой. Вероятностные модели, родственные рассматриваемым в диссертации, изучались начиная с 70-х годов XX века. В 1977 году А.М. Вершик, С.В. Керов[1] и, независимо, Б. Логан, Л. Шепп[2] доказали закон больших чисел для случайных диаграмм Юнга, распределенных по мере Планшереля, иными словами, для случайных ломаных на двумерной решетке.

Переход от двумерных моделей к трехмерным, то есть к случайным поверхностям, произошел лишь через 20 лет. В 1997 году А.М. Вершик анонсировал справедливость закона больших чисел для трехмерных диаграмм Юнга (которые находятся в биекции со ступенчатыми поверхностями в $\mathbb{R}^3$), распределенных по мере $q^{vol}$, где $vol$ — объем трехмерной диаграммы. Позже Р. Серф и Р. Кенион[3] привели полное доказательство сходимости и описали возникающую предельную поверхность. А в 1998 году Г. Кон, М. Ларсен и Д. Пропп[4] доказали аналогичный закон больших чисел для равномерной меры на трехмерных диаграммах Юнга, заключенных в коробку размера $a \times b \times c$, и дали описание предельной поверхности в этом случае. Именно изучению последней модели и посвящена бо́льшая часть диссертации. Отметим, что известные комбинаторные биекции отождествляют трехмерные диаграммы Юнга в коробке со ступенчатыми поверхностями, с замощениями шестиугольника, нарисованного на правильной треугольной решетке, ромбами трех типов, а также с некоторыми семействами непересекающихся ломаных на плоскости.

[1] А.М. Вершик, С.В. Керов, Асимптотика меры Плашереля симметрической группы и предельная форма таблиц Юнга. ДАН СССР, 233:6 (1977), 1024–1027

[2] B.F. Logan, L.A. Shepp, A variational problem for random Young tableaux, Advances in Math. 26 (1977), no. 2, 206–222

[3] R. Cerf and R. Kenyon, The low temperature expansion of the Wulff crystal in the 3D Ising model, Comm. Math. Phys. 222:1 (2001), 147–179.

[4] H. Cohn, M. Larsen, J. Propp, The shape of a typical boxed plane partition, New York Journal of Mathematics 4 (1998), 137-165.

В дальнейшем существование предельных поверхностей («закон больших чисел») было доказано Г. Коном, Р. Кенионом и Д. Проппом[5] (см. также работу Дестенвиля[6]) для случайных ступенчатых поверхностей с произвольными кусочно–гладких граничных условий. А в работах Р. Кениона, А.Ю. Окунькова и С. Шеффилда[7,8] было получено описание возникающих предельных поверхностей, а также была обнаружена интересная связь последних с алгебраическими кривыми.

Наряду с глобальными, оказываются интересными и локальные асимптотические свойства случайных поверхностей, иными словами, локальная геометрия поверхности вблизи данной точки пространства. Подобные локальные свойства для (двумерных) диаграмм Юнга, распределенных по мере Планшереля, были исследованы А.М. Бородиным, А.Ю. Окуньковым и Г.И. Ольшанским[9]. Результаты для трехмерных диаграмм Юнга, распределенных по мере $q^{vol}$, были получены А.Ю. Окуньковым и Н.Ю. Решетихиным[10]. В той же работе, а также в статьях Р. Кениона была высказана гипотеза об универсальности локальной структуры случайных ступенчатых поверхностей для всех родственных моделей; в некоторых частных случаях она была доказана[11]. В диссертации исследован вопрос о справедливости гипотезы универсальности для трехмерных диаграммах Юнга, заключенных в коробку.

Модели случайных ступенчатых поверхностей оказываются тесно связанными с вероятностными распределениями из теории случайных матриц. Эта связь была продемонстрирована, в частности, в работах

---

[5] H. Cohn, R. Kenyon, J. Propp, A variational principle for domino tilings. J. Amer. Math. Soc. 14 (2001), no. 2 297–346.

[6] N. Destainville, Entropy and boundary conditions in random rhombus tilings, J. Phys. A: Math. Gen. 31 (1998), 6123–6139.

[7] R. Kenyon, A. Okounkov, Limit shapes and the complex Burgers equation. Acta Math. 199 (2007), no. 2, 263–302.

[8] R. Kenyon, A. Okounkov, S. Sheffield, Dimers and Amoebae. Ann. Math. 163 (2006), no. 3, 1019-1056.

[9] A. Borodin, A. Okounkov, G. Olshanski, Asymptotics of Plancherel measure for symmetric groups. J. Amer. Math. Soc. 13 (2000), no. 3, 481-515.

[10] A. Okounkov, N.Reshetikhin, Correlation functions of Schur process with application to local geometry of a random 3-dimensional Young diagram. J. Amer. Math. Soc. 16 (2003), 581-603.

[11] R. Kenyon, Height fluctuations in the honeycomb dimer model. Comm. Math. Phys. 281 (2008), 675–709.

А.Ю. Окунькова, Н.Ю. Решетихина[12] и К. Йоханссона, Э. Норденштама[13]. Результаты последней основаны на биекции ступенчатых поверхностей с наборами непересекающихся путей на плоскости, которая использована и в диссертации.

Многочисленные связи случайных диаграмм Юнга с теорией представлений были известны, начиная с ранних работ в этой области. Так, хотя для меры Планшереля и существует чисто комбинаторное определение, наиболее естественно ее определять через размерности неприводимых представлений симметрической группы. А теория представлений бесконечномерной унитарной группы $U(\infty)$ оказывается связанной как с моделями случайных диаграмм (см. работу А.М. Бородина и Г.И. Ольшанского[14] и приведенные там ссылками) так и со случайными ступенчатыми поверхностями (см. работу А.М. Бородина и Д. Куана[15]).

**Цель работы.** Цель диссертации — исследование случайных ступенчатых поверхностей, заключенных в коробку размера $a \times b \times c$, в том числе, их предельного поведения при $a, b, c, \to \infty$, построение марковских цепей на ступенчатых поверхностях и изучение родственных вероятностных моделей, связанных с теорией представлений группы $U(\infty)$.

**Научная новизна.** Результаты диссертации являются новыми.

В диссертации получены следующие основные результаты:

1. Построены марковские цепи на ступенчатых поверхностях в трехмерном пространстве, заключенных в конечную коробку. Один шаг цепи меняет размер коробки с $a \times b \times c$ на $a \times (b+1) \times (c-1)$. Доказано, что построенные цепи сохраняют равномерную меру на поверхностях, с их помощью сконструирован вычислительно-эффективный алгоритм случайной выборки ступенчатой поверхности в коробке.

2. Найдены формулы для корреляционных функций, описывающих локальную геометрию случайных ступенчатых поверхностей в

[12] A. Yu. Okounkov, N. Yu. Reshetikhin, The birth of a random matrix, Mosc. Math. J., 6:3 (2006), 553–566

[13] K. Johansson, E. Nordenstam, Eigenvalues of GUE Minors. Electronic Journal of Probability 11 (2006), paper 50, 1342-1371.

[14] A. Borodin, G. Olshanski, Harmonic analysis on the infinite-dimensional unitary group and determinantal point processes, Ann. of Math. 161 (2005), no. 3, 1319–1422.

[15] A. Borodin, J. Kuan, Asymptotics of Plancherel measures for the infinite-dimensional unitary group, Adv. in Math., 219:3 (2008), 894-931

коробке размера $a \times b \times c$. Доказано, что корреляционные функции задаются минорами некоторой матрицы — корреляционного ядра. Доказана теорема о сходимости корреляционных функций в балк-режиме («bulk limit regime»). Предельные функции трансляционно инвариантны, для них найдены простые интегральные представления.

3. Исследовано асимптотическое поведение марковских случайных процессов на графе Гельфанда–Цетлина, связанных с теорией представлений бесконечномерной унитарной группы. Для стационарных распределений и переходных вероятностей предельных процессов получены явные выражения в терминах ортогональных многочленов Якоби.

**Методы исследования.** В работе используются различные методы теория вероятностей и функционального анализа. Важную роль в построении марковских цепей на ступенчатых поверхностях играет алгебраический формализм, связанный с коммутирующими марковскими операторами, который был предложен А.М. Бородиным и П. Феррари[16] Изучение предельного поведения корреляционных функций случайных поверхностей и конечномерных распределений случайных процессов на графе Гельфанда–Цетлина основано на асимптотическом анализе ортогональных полиномов Хана, через которые удается выразить интересующие нас вероятностные характеристики. Асимптотические теоремы для многочленов Хана в разных предельных режимах доказываются как с помощью классических результатов о поведении ортогональных полиномов, так и с помощью спектрального анализа операторов, связанных с этими полиномами. Схожий метод был впервые применен А.М. Бородиным и Г.И. Ольшанским[17].

**Теоретическая и практическая ценность.** Диссертация носит теоретический характер. Ее результаты и методы могут найти применение в теории случайных процессов, статистической механике и теории представлений.

---

[16] A. Borodin, P. Ferrari, Anisotropic growth of random surfaces in 2 + 1 dimensions. arXiv:0804.3035.

[17] A. Borodin, G. Olshanski, Asymptotics of Plancherel-type random partitions. Journal of Algebra, 313, (2007), no. 1, 40–60.

**Апробация диссертации.** Результаты диссертации докладывались:

• Неоднократно (2007-2010 гг.) на семинаре «Теория вероятностей и эргодическая теория» механико–математического факультета МГУ; руководители — д.ф.-м.н., проф. Б.М. Гуревич, д.ф.-м.н., проф. В.И. Оселедец, д.ф.-м.н., доц. С.А. Пирогов;

• На международной конференции «Гармонический анализ и квантование», ТГУ, Тамбов, в 2007 г.;

• На международной конференции «Random Tilings, Random Partitions and Stochastic Growth Processes», CRM, Монреаль, в 2008 г.;

• На научно-исследовательском семинаре кафедры математической статистики и случайных процессов механико–математического факультета МГУ, руководитель — д.ф.-м.н., проф. А.М. Зубков, в 2008 г.;

• На петербургском семинаре по теории представлений и динамическим системам в ПОМИ РАН, руководитель — д.ф.-м.н., проф. А.М. Вершик, в 2009 г.;

• На русско-японской школе молодых математиков, Университет Киото, в 2009 г.;

• На школе «5th Cornell Probability Summer School», Корнельский университет, в 2009 г.;

• На семинаре Добрушинской математической лаборатории ИППИ РАН, руководитель — д.ф.-м.н., проф. Р.А. Минлос, в 2009 г.;

• На большом семинаре кафедры теории вероятностей механико–математического факультета МГУ, руководитель — член-корр. РАН, д.ф.-м.н., проф. А.Н. Ширяев, в 2010 г.;

• На научно-исследовательском семинаре кафедры анализа данных факультета инноваций и высоких технологий МФТИ, руководитель — д.ф.-м.н., проф. А.М. Райгородский, в 2010 г.

**Публикации.** Результаты диссертации опубликованы в трех статьях в научных журналах, входящих в перечень ВАК. Список работ приведен в конце автореферата [1–3].

**Структура диссертации.** Диссертация состоит из введения и четырех глав. Текст дисертации изложен на 111 страницах. Список литературы содержит 69 наименований.

# Содержание работы

Во введении описана история рассматриваемой проблемы, изложено содержание диссертационной работы, кратко описаны основные результаты и методы их получения.

В главе 1 вводится изучаемая вероятностная модель случайных ступенчатых поверхностей в коробке и строятся марковские цепи, сохраняющие равномерную меру на поверхностях. В параграфе 1.1 приводятся разные комбинаторные интерпретации исследуемой модели, показывается, что ступенчатые поверхности в коробке находятся в биекции с трехмерными диаграммами Юнга, с замощениями шестиугольника, нарисованного на правильной треугольной решетке, ромбами трех типов и с наборами непересекающихся ломаных на решетке $\mathbb{Z}^2$. Опишем более подробно последнюю интерпретацию.

Рассмотрим целочисленную решетку $\mathbb{Z}^2$ на плоскости $(t,x)$ и два набора точек на ней: $X_i = (0, i-1)$ и $Y_i = (T, S+i-1)$, где индекс $i$ меняется от 1 до некоторого фиксированного $N$, а $T$ и $S$ — некоторые фиксированные параметры ($T \geq S$). Мы будем изучать наборы из $N$ непересекающихся путей, проходящих по узлам решетки, при этом $i$-й путь соединяет $X_i$ и $Y_i$. Путями служат ломаные, у которых каждое звено есть отрезок с левым концом $(t,x) \in \mathbb{Z}^2$ и правым концом $(t+1,x)$ или $(t+1,x+1)$. Обозначим через $\Omega(N,T,S)$ множество всех таких наборов из $N$ непересекающихся путей, элемент множества $\Omega(5,9,4)$ показан на рисунке 1. Обозначим через $\mu(N,T,S)$ равномерную меру на $\Omega(N,T,S)$. Можно показать, что вертикальные сечения набора путей, распределенного по мере $\mu(N,T,S)$, образуют марковский процесс с временем $t$. В параграфе 1.2 вычисляются одномерные распределения в фиксированный момент времени и переходные вероятности этого процесса.

В параграфе 1.3 определяются 4 семейства матриц, связанных с мерой $\mu(N,T,S)$, проверяется, что эти матрицы являются стохастическими, и доказывается, что некоторые из матриц коммутируют друг с другом. В параграфе 1.4 строятся новые матрицы

$$P^S_{S\mapsto S+1}(X,Y), \quad X \in \Omega(N,T,S), \quad Y \in \Omega(N,T,S+1)$$

и

$$P^S_{S\mapsto S-1}(X,Y), \quad X \in \Omega(N,T,S), \quad Y \in \Omega(N,T,S-1).$$

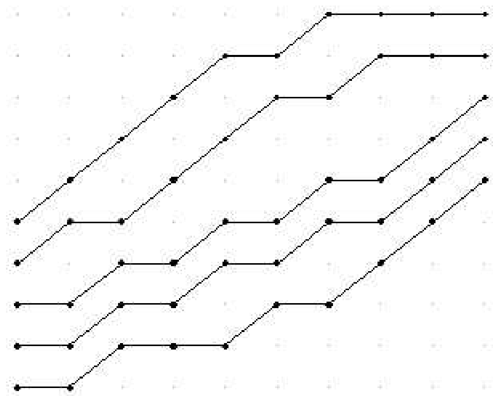

Рис. 1: Непересекающиеся пути на решетке $\mathbb{Z}^2$.

Конструкция основана на применении коммутирующих марковских операторов и следует идее П. Диакониса и Д. Фила[18]. Эта же идея была применена в недавней работе А.М. Бородина и П. Феррари. Основным результатом первой главы является теорема 1.8

**Теорема.** *Матрица* $P^S_{S\mapsto S+1}$ *является стохастической матрицей размера* $|\Omega(N,T,S)| \times |\Omega(N,T,S+1)|$ *и переводит равномерную меру на* $\Omega(N,T,S)$ *в равномерную меру на* $\Omega(N,T,S+1)$*:*

$$\mu(N,T,S+1)(Y) = \sum_{X\in\Omega(N,T,S)} P^S_{S\mapsto S+1}(X,Y)\mu(N,T,S)(X).$$

Аналогичное утверждение для матриц $P^S_{S\mapsto S-1}(X,Y)$ приведено в теореме 1.9.

В параграфе 1.5 структура матриц $P^S_{S\mapsto S+1}(X,Y)$ и $P^S_{S\mapsto S-1}(X,Y)$ обсуждается более подробно. Показывается, что эти матрицы, в некотором смысле, распадаются в произведение одномерных переходных вероятностей, это позволяет нам в параграфе 1.6 построить вычислительно-эффективный алгоритм для выбора случайного элемента из $\Omega(N,T,S)$, распределенного по мере $\mu(N,T,S)$. В параграфе 1.6 также приведены результаты компьютерных симуляций для марковских

[18] P. Diaconis, J. A. Fill, Strong Stationary Times Via a New Form of Duality. Annals of Probability 18 (1990), no. 4, 1483-1522.

цепей, построенных на основе переходных вероятностей $P^S_{S\mapsto S+1}(X,Y)$ и $P^S_{S\mapsto S-1}(X,Y)$.

Вторая глава диссертации посвящена вычислению корреляционных функций равномерной меры $\mu(N,T,S)$. Это вычисление позволяет нам изучить в главе 3 асимптотическое поведение случайных поверхностей, распределенных по мере $\mu(N,T,S)$.

Если отождествить элемент множества $\Omega(N,T,S)$ с набором точек на решетке $\mathbb{Z}^2$, через которые проходят пути, то $n$–ая корреляционная функция — это функция $R^2_n(t_1,x_1;\dots;t_n,x_n)$, равная вероятности того, что все точки $(t_1,x_1),\dots,(t_n,x_n)$ лежат в случайной точечной конфигурации. Оказывается, что в нашем случае корреляционные функции можно представить как миноры некоторой матрицы — корреляционного ядра, которая выражается через полиномы Хана[19]. Пусть $\Psi^{S,t}_i(x)$ — это нормированный полином Хана, умноженный на корень из соответствующей весовой функции. Чтобы не усложнять изложение, опустим зависимость параметров полиномов Хана от $N,T,S,t$, она приводится в параграфе 2.1 диссертации. Основным результатом второй главы является теорема 2.3, доказываемая в параграфе 2.2:

**Теорема.** *Пусть $\mathbb{M}_2$ — случайная точечная конфигурация, отвечающая случайному элементу множества $\Omega(N,T,S)$, распределенному по равномерной мере $\mu(N,T,S)$, тогда для корреляционных функций $R^2_k$, отвечающих $\mathbb{M}_2$, справедлива формула*

$$R^2_k(t_1,x_1,\dots,t_k,x_k) = \det[K(t_i,x_i;t_j,x_j]_{i,j=1,\dots,k},$$

*где*

$$K(t,x;t',x') = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{c_i^{t,t'}} \Psi^{S,t}_i(x)\Psi^{S,t'}_i(x'), \ \text{если } t \le t';$$

$$K(t,x;t',x') = -\sum_{i\ge N} c_i^{t',t} \Psi^{S,t}_i(x)\Psi^{S,t'}_i(x'), \ \text{если } t > t';$$

$$c_i^{t,t} = 1, \quad c_i^{t',t} = \prod_{\tau=t'+1}^{t} c^{S,\tau}_{t+}(i),$$

$$c^{S,\tau}_{t+}(i) = \sqrt{\left(1-\frac{i}{\tau+N}\right)\left(1-\frac{i}{T+N-\tau-1}\right)}.$$

[19] R. Koekoek and R. F. Swarttouw, The Askey-scheme of hypergeometric orthogonal polynomials and its q-analogue. Delft University of Technology, Faculty of Information Technology and Systems, Department of Technical Mathematics and Informatics, Report no. 98-17, 1998.

Доказательство теоремы 2.3 основано на теореме Эйнара-Меты[20,21,22].

В параграфе 2.3 утверждение теоремы 2.3 обобщается на распределения марковских цепей, получающихся с помощью матриц $P^S_{S\mapsto S+1}(X,Y)$ и $P^S_{S\mapsto S-1}(X,Y)$. Если одному набору непересекающихся путей мы сопоставляли точечную конфигурацию на двумерной решетке, то последовательности таких наборов (траектории марковской цепи) мы сопоставляем точечную конфигурацию уже на трехмерной решетке. Корреляционные функции для этой случайной точечной конфигурации вычисляются в теореме 2.8. К сожалению, корреляционные функции удается вычислить не для всех значений переменных, от которых они зависят, а только для ограничений этих функций на специальные двумерные сечения трехмерного пространства.

Глава 3 посвящена изучению асимптотики корреляционных функций в балк-режиме («bulk limit regime»). Эта асимптотика отвечает предельному поведению локальной геометрии случайной ступенчатой поверхности вблизи данной точки при стремлении размеров $a, b, c$ коробки (соответственно, параметров $N, T, S$ в интерпретации через наборы непересекающихся ломаных) к бесконечности с сохранением их отношений.

В параграфе 3.1 формулируется основной результат главы — теорема 3.1. Зафиксируем положительные числа $\tilde{S}$, $\tilde{T}$, $\tilde{N}$, $\tilde{t}$, $\tilde{x}$ и введем малый параметр $\varepsilon \ll 1$. Положим

$$S = \tilde{S}\varepsilon^{-1} + o(\varepsilon^{-1}), \quad T = \tilde{T}\varepsilon^{-1} + o(\varepsilon^{-1}), \quad N = \tilde{N}\varepsilon^{-1} + o(\varepsilon^{-1}).$$

Рассмотрим также целозначные функции $t_i = t_i(\varepsilon)$ и $x_i = x_i(\varepsilon)$, $i = 1, \ldots, n$, такие что

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon t_i(\varepsilon) = \tilde{t}, \quad \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon x_i(\varepsilon) = \tilde{x}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

а попарные разности $t_i - t_j$ и $x_i - x_j$ не зависят от $\varepsilon$.

Тогда корреляционные функции $R^2_n$ случайной точечной конфигурации, отвечающей случайному элементу $\Omega(N,T,S)$, распределенному по мере $\mu(N,T,S)$, стремятся при $\varepsilon \to 0$ к пределу $\hat{R}^2_n$, который зависит от параметров предельного режима $\tilde{S}$, $\tilde{T}$, $\tilde{N}$, $\tilde{t}$, $\tilde{x}$.

---

[20] B. Eynard and M. L. Mehta, Matrices coupled in a chain. I. Eigenvalue correlations. J. Phys. A: Math. Gen. 31(1998), 4449–4456

[21] A. Borodin, E. M. Rains, Eynard–Mehta Theorem, Schur Process, and their Pfaffian Analogs, Journal of Statistical Physics, 121, no. 3-4, 291–317.

[22] A. Borodin, G. Olshanski, Markov processes on partitions. Probab. Theory and Related Fields 135 (2006), no. 1, 84–152.

Наибольший интерес представляет область значений параметров, в которой корреляционные функции нетривиальны (т.е. не становятся в пределе тождественно равными нулю или единице). Такая область в литературе часто называется «bulk». Она характеризуется тем фактом, что выражение

$$\frac{-\tilde{N}(\tilde{N}+\tilde{T})+(-\tilde{x}+\tilde{S}+\tilde{N})(\tilde{t}+\tilde{N}-\tilde{x})+\tilde{x}(\tilde{T}+\tilde{x}-\tilde{S}-\tilde{t})}{2\sqrt{\tilde{x}(-\tilde{x}+\tilde{S}+\tilde{N})(\tilde{t}+\tilde{N}-\tilde{x})(\tilde{x}+\tilde{T}-\tilde{S}-\tilde{t})}} \tag{1}$$

заключено (строго) между $-1$ и 1. Обозначим через $\phi = \phi(\tilde{S},\tilde{T},\tilde{N},\tilde{t},\tilde{x})$ арккосинус этого выражения. Если выражение (1) больше 1, то мы полагаем $\phi = 0$, а если меньше $-1$, то $\phi = \pi$.

**Теорема.** *Пусть все параметры зависят от $\varepsilon$ так, как описано выше, тогда для корреляционных функций случайной точечной конфигурации, отвечающей случайному элементу $\Omega(N,T,S)$, распределенному по мере $\mu(N,T,S)$, справедлива следующая предельная теорема:*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} R_n^2(t_1(\varepsilon),x_1(\varepsilon),\ldots,t_n(\varepsilon),x_n(\varepsilon)) = \det[K_{ij}^{\mathrm{bulk}_2}]_{i,j=1,\ldots,n},$$

*где для такой $(i,j)$, что $t_i > t_j$,*

$$K_{ij}^{\mathrm{bulk}_2} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_-}(1+c_1 z)^{t_i-t_j}\cdot\frac{dz}{z^{x_i-x_j+1}},$$

*а для такой $(i,j)$, что $t_i \le t_j$,*

$$K_{ij}^{\mathrm{bulk}_2} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_+}(1+c_1 z)^{t_i-t_j}\,\frac{dz}{z^{x_i-x_j+1}},$$

$$c_1 = \sqrt{\frac{\tilde{x}(\tilde{S}+\tilde{N}-\tilde{x})}{(\tilde{T}-\tilde{t}-\tilde{S}+\tilde{x})(\tilde{t}+\tilde{N}-\tilde{x})}},$$

*где $\gamma_\pm$ — контуры в $\mathbb{C}$, соединяющие точки $e^{-i\phi(\tilde{S},\tilde{T},\tilde{N},\tilde{t},\tilde{x})}$ и $e^{i\phi(\tilde{S},\tilde{T},\tilde{N},\tilde{t},\tilde{x})}$, $\gamma_+$ является правой дугой единичной окружности, а $\gamma_-$ — левой.*

**Замечание.** Несложно показать, что предельные корреляционные функции

$$\hat{R}_n^2(Q_1,\ldots,Q_n) = \det[K_{ij}^{\mathrm{bulk}_2}]_{i,j=1,\ldots,n}$$

задают некоторый предельный случайный точечный процесс.

В том же параграфе 3.1, в теореме 3.2 сформулировано обобщение теоремы на корреляционные функции марковских цепей, получающихся с помощью матриц $P^S_{S\mapsto S+1}(X,Y)$ и $P^S_{S\mapsto S-1}(X,Y)$ и вычисленных в теореме 2.8.

Параграфы 3.2 и 3.3 посвящены доказательству теорем 3.1 и 3.2. Так как в соответствии с результатами второй главы корреляционные функции выражаются через корреляционное ядро $K(t,x;t',x')$, то именно его асимптотика и исследуется. Сначала рассматривается «статический случай», т.е. изучается предельное поведение корреляционного ядра при условии $t = t'$. Доказательство основано на следующей идее: если зафиксировать $t$ и рассматривать $K(t,x;t,x')$ как матрицу некоторого оператора в $\ell_2(\mathbb{Z})$ (по переменным $x,x'$), то полученный оператор можно представить как спектральный проектор некоторого трехдиагонального самосопряженного оператора; затем можно переходить к пределу отдельно в самосопряженном операторе и в спектральном интервале, отвечающем проектору. Схожая идея использовалась в работе А.М. Бородина и Г.И. Ольшанского и была более подробно описана в недавней статье Г.И. Ольшанского[23].

В параграфе 3.3 мы переходим к доказательству предельных теорем для общих значений параметров корреляционного ядра. Основное новое соображение здесь состоит в разложении матрицы, задающей корреляционное ядро, в произведение матрицы, предел которой был подсчитан в «статическом случае» и нескольких двухдиагональных матриц, предел которых несложно вычисляется.

В параграфе 3.4 объясняется связь теорем, доказанных в третьей главе, с результатами, имеющимися в литературе. В частности, показывается, что из теоремы 3.1 следует справедливость гипотезы об асимптотической локальной геометрии случайных ступенчатых поверхностей (с произвольными граничными условиями) для случая равномерной меры на поверхностях, заключенных в коробку размера $a \times b \times c$.

В главе 4 изучаются марковские цепи на графе Гельфанда–Цетлина, возникающие из теории представлений бесконечномерной унитарной группы $U(\infty)$.

[23]Г.И. Ольшанский, Разностные операторы и детерминантные точечные процессы. Функц. анализ и его прил., 42:4 (2008), 83–97

Следующие определения приведены в параграфе 4.1. Граф Гельфанда–Цетлина $\mathbb{GT}$ — это градуированный граф, вершинами которого являются так называемые *сигнатуры*. $N$-й этаж графа, обозначаемый $\mathbb{GT}_N$, состоит из наборов $N$ целых чисел $\lambda = (\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_N)$. Мы соединяем две сигнатуры $\lambda \in \mathbb{GT}_N$ и $\mu \in \mathbb{GT}_{N+1}$ ребром и пишем $\lambda \prec \mu$, если

$$\mu_1 \geq \lambda_1 \geq \mu_2 \geq \cdots \geq \lambda_N \geq \mu_{N+1}.$$

Условимся считать, что $\mathbb{GT}_0$ состоит из единственного элемента — пустой сигнатуры $\varnothing$. Эта пустая сигнатура соединена ребром с каждой сигнатурой из $\mathbb{GT}_1$.

Путем в графе Гельфанда–Цетлина называется последовательность вершин

$$\lambda(n) \prec \lambda(n+1) \prec \cdots \prec \lambda(m), \quad \lambda(i) \in \mathbb{GT}_i.$$

Обозначим через $\mathrm{Dim}(\lambda)$ количество путей, соединяющих $\varnothing$ и $\lambda \in \mathbb{GT}_N$.

Для сигнатур $\mu \in \mathbb{GT}_{N+1}$ и $\lambda \in \mathbb{GT}_N$ положим

$$p^{\downarrow}(\lambda \mid \mu) = \begin{cases} \mathrm{Dim}(\lambda)/\mathrm{Dim}(\mu), & \text{если } \lambda \prec \mu \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Числа $p^{\downarrow}(\lambda \mid \mu)$ определяют марковскую переходную матрицу, переводящую меры на $\mathbb{GT}_{N+1}$ в меры на $\mathbb{GT}_N$, которую мы называем переходной матрицей «вниз». Последовательность мер $M = \{M_N\}_{N=0,1,\ldots}$, в которой $M_N$ — вероятностная мера на $\mathbb{GT}_N$, называется *когерентной системой распределений* в том случае, если для любого $N \geq 0$ меры $M_{N+1}$ и $M_N$ согласованы с переходной матрицей «вниз», иными словами, если

$$\sum_{\mu \in \mathbb{GT}_{N+1}} p^{\downarrow}(\lambda \mid \mu) M_{N+1}(\mu) = M_N(\lambda) \quad \text{для любой } \lambda \in \mathbb{GT}_N.$$

Определим *носитель* когерентной системы $M$ как множество

$$supp(M) = \{\lambda \in \mathbb{GT} : M(\lambda) \neq 0\} \subset \mathbb{GT},$$

где $M(\lambda)$ — мера $M_N(\lambda)$ одноэлементного множества $\{\lambda\} \subset \mathbb{GT}_N$.

Если задана некоторая когерентная система распределений, то мы можем говорить и о матрице переходных вероятностей «вверх». Переходные вероятности $p^{\uparrow}(\mu \mid \lambda)$ определены для всех $\lambda \in supp(M)$ по формуле

$$p^{\uparrow}(\mu \mid \lambda) = \frac{M_{N+1}(\mu)}{M_N(\lambda)} \cdot p^{\downarrow}(\lambda \mid \mu), \quad \lambda \in \mathbb{GT}_N, \mu \in \mathbb{GT}_{N+1}, M_N(\lambda) \neq 0.$$

Любая когерентная система распределений $\{M_N\}$ определяет марковскую цепь $H(t), t = 0, 1, \dots$ на пространстве состояний $supp(M)$. $H(t)$ принимает значения в множестве $L_t = \mathbb{GT}_t \bigcap supp(M)$, её одномерные распределения задаются мерами $M_t$. Переходные вероятности цепи $H(t)$ — это числа $p^{\uparrow}(\mu \mid \lambda)$:

$$\mathrm{Prob}\{H(t+1) = \mu \mid H(t) = \lambda\} = p^{\uparrow}(\mu \mid \lambda).$$

Будем называть $H(t)$ идущей вверх цепью, отвечающей $\{M_N\}$.

Определим также семейство стационарных марковских цепей $T_N(t)$, $N = 0, 1, \dots$. Пространством состояний $T_N(t)$ является $L_N = \mathbb{GT}_N \bigcap supp(M)$. Одномерное распределение $T_N(t)$ задаётся мерой $M_N$, а матрица переходных вероятностей определяется как произведение переходных матриц «вверх» и «вниз»: сначала из $L_N$ в $L_{N+1}$, а затем обратно в $L_N$.

Будем называть $T_N(t)$ цепью вверх–вниз на $N$–ом этаже, отвечающей $\{M_N\}$.

В параграфе 4.2 определяется четырехпараметрическое семейство $\{M_N^{z,w,z',w'}\}$ когерентных систем и объясняется их связь с теорией представлений $U(\infty)$. В дальнейшем изучаются когерентные системы $\{M_N^{p,0,z',w'}\}$, где $p$ — неотрицательное целое число, $z' > p-1$ и $w' > -1$. Оказывается, что для таких значений параметров носитель меры $M_N^{p,0,z',w'}$ можно отождествить с $p$–точечными конфигурациями на конечной решетке $\{0, 1, \dots, N+p-1\}$. Обозначим образы марковских цепей $H(t)$ и $T_N(t)$, отвечающих когерентной системе $M_N^{p,0,z',w'}$ при таком соответствии, через $X_{p,z',w'}(t)$ и $U_N^{p,z',w'}(t)$, соответственно.

Основной целью главы 4 является определение асимптотических свойств случайного процесса $U_N^{p,z',w'}(t)$ при $N \to \infty$. Обратим внимание на то, что траектории процессов $X_{p,z',w'}(t)$ и $U_N^{p,z',w'}(t)$ являются наборами из $p$ непересекающихся ломаных на решетке $\mathbb{Z}^2$. Отсюда видна связь этих случайных процессов со ступенчатыми поверхностями, изучающимися в предыдущих главах, которые тоже могут быть проинтерпретированы как наборы непересекающихся ломаных на решетке.

Обозначим через $\mathcal{X}$ гиперкуб $[0,1]^p$, а через $\pi_N$ — отображение множества $p$-точечных конфигураций на решетке в $\mathcal{X}$:

$$\pi_N : (x_1 > \dots > x_p) \mapsto \left( \frac{x_1}{N+p-1}, \dots, \frac{x_p}{N+p-1} \right).$$

Положим
$$J_N^{p,z',w'}(t) = \pi_N\left(U_N^{p,z',w'}\left(\lfloor t\cdot N^2\rfloor\right)\right).$$

В параграфе 4.2 формулируется теорема 4.2, в соответствии с которой процессы $J_N^{p,z',w'}(t)$ сходятся (в смысле сходимости конечномерных распределений) к предельному стационарному марковскому процессу $J^{p,z',w'}(t)$.

Параграфы 4.3 и 4.4 посвящены доказательству этой теоремы, в последнем также приводится ее уточненная формулировка — теорема 4.13, которая и является основным результатом главы 4. Чтобы сформулировать эту теорему, нам нужно ввести дополнительные обозначения. Пусть $w_{p,z',w'}(x)$ — плотность $B$–распределения:

$$w_{p,z',w'}(x) = x^{w'}(1-x)^{z'-p}, \quad 0 < x < 1.$$

Обозначим через $Jac^k_{z'-p,w'}(x)$ ортогональный полином Якоби степени $k$. Эти полиномы определены для $x \in (0,1)$ и ортогональны относительно весовой функции $w_{p,z',w'}$. Обозначим через $j^k_{p,z',w'}(x)$ нормированный полином Якоби $Jac^k_{z'-p,w'}(x)$, умноженный на корень из весовой функции $w_{p,z',w'}$. Наконец, положим

$$K_{p,z',w'}(i) = i(i + w' + z' + 1 - p).$$

**Теорема.** *Конечномерные распределения $J_N^{p,z',w'}(t)$ слабо сходятся при $N\to\infty$ к соответствующим конечномерным распределениям предельного процесса $J^{p,z',w'}(t)$. $J^{p,z',w'}(t)$ является стационарным марковским процессом. Его начальное распределение задается плотностью*

$$\rho_{p,z',w'}(X) = B_{p,z',w'}\prod_{i<j}(x_i-x_j)^2\prod_{i=1}^{p} w_{p,z',w'}(x_i).$$

*Плотность переходных вероятностей предельного процесса имеет вид*

$$\mathcal{P}^t_{p,z',w'}(Y \mid X) = \frac{\sqrt{\rho_{p,z',w'}(Y)}}{\sqrt{\rho_{p,z',w'}(X)}}\cdot e^{tK_{p,z',w'}}\cdot \det[\mathcal{J}^t_{p,z',w'}(x_i,y_j)]_{i,j=1,2,\ldots,p},$$

*где*

$$\mathcal{J}^t_{p,z',w'}(x,y) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{-tK_{p,z',w'}(i)} j^i_{p,z',w'}(x) j^i_{p,z',w'}(y)$$

*и*

$$K_{p,z',w'} = \sum_{i=0}^{p-1} K_{p,z',w'}(i).$$

Удивительным образом, конечномерные распределения и переходные вероятности случайного процесса $J_N^{p,z',w'}(t)$ удается выразить через ортогональные полиномы Хана, которые уже возникали в предыдущих главах диссертации в связи со случайными ступенчатыми поверхностями. Доказательство теоремы 4.13, по существу, основано на асимптотическом анализе полиномов Хана и на известных теоремах о сходимости последних к полиномам Якоби.

Параграфы 4.6 и 4.7 посвящены изучению предельного процесса $J^{p,z',w'}(t)$. Исследуется отвечающая ему марковская полугруппа операторов, находятся ее собственные значения и собственные функции, вычисляется инфинитезимальный генератор этой полугруппы. Объясняется, что процесс $J^{p,z',w'}(t)$ можно интерпретировать как результат применения $h$–преобразование Дуба к $p$ независимым диффузиям на отрезке $[0,1]$.

Автор выражает огромную благодарность своим научным руководителям — доктору физико-математических наук Григорию Иосифовичу Ольшанскому за постановку задач, постоянную поддержку и многочисленные обсуждения и доктору физико-математических наук, профессору Борису Марковичу Гуревичу за продуктивные обсуждения и внимание на всех этапах подготовки диссертации. Хотелось бы также выразить благодарность доктору физико-математических наук Алексею Михайловичу Бородину за его ценные советы, во многом определившие направление развития этой работы.

# Работы автора по теме диссертации

[1] В.Е. Горин, Непересекающиеся пути и ансамбль ортогональных многочленов Хана. Функциональный анализ и его приложения, 42:3 (2008), 23–44.

[2] В.Е. Горин, Несталкивающиеся диффузии Якоби как предел марковских цепей на графе Гельфанда–Цетлина. Записки научных семинаров ПОМИ им. В.А.Стеклова РАН, 360 (2008) , 1342-1371.

[3] A. Borodin, V. Gorin, Shuffling algorithm for boxed plane partitions. Advances in Mathematics, 220:6 (2009), 1739–1770.

В работе [3] А.М. Бородину принадлежит идея применить к равномерной мере на ступенчатых поверхностях в коробке алгебраический формализм его совместной работы с П. Феррари. Проверка применимости, реализация, которая оказалось нетривиальной, и вычисления принадлежат диссертанту. Текст статьи был написан совместно.