

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. Ломоносова
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи
УДК 517.982.254

Пухов Станислав Сергеевич

**БАЗИСЫ ИЗ ЭКСПОНЕНТ
В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ
НА КОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ**

01.01.01. — вещественный, комплексный
и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва, 2011

Работа выполнена на кафедре математического анализа механико-математического факультета Московского Государственного Университета имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель: доктор физико–математических наук,
профессор
Седлецкий Анатолий Мечиславович.

Официальные оппоненты: доктор физико–математических наук,
профессор
Гольдман Михаил Львович;
кандидат физико–математических наук,
доцент
Садовничая Инна Викторовна.

Ведущая организация: Московский Энергетический Институт
(Технический Университет).

Защита диссертации состоится 20 мая 2011 г. в 16 час. 40 мин. на заседании диссертационного совета Д 501.001.85 при Московском Государственном Университете имени М. В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, д.1, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 20 апреля 2011 г.

Учёный секретарь диссертационного
совета Д 501.001.85 при МГУ,
доктор физико–математических наук,
профессор

В. Н. Сорокин

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы

Исследования отличных от тригонометрического базисов из экспонент

$$(e^{i\lambda_n t})_{n=0}^{\infty}, \quad \lambda_n \in \mathbb{C}, \quad |\lambda_{n+1}| \geq |\lambda_n|,$$

в функциональных пространствах на конечном интервале берут своё начало в 1930-х гг. в работе Р.Пэли и Н.Винера¹, где данная система рассматривалась как базис Рисса в $L^2(-\pi, \pi)$. В дальнейшем такие базисы, а также более общие

$$e(\Lambda) = (e^{i\lambda_n t}, t e^{i\lambda_n t}, \dots, t^{m_n-1} e^{i\lambda_n t})_{n=0}^{\infty}, \quad \Lambda = (\lambda_n, m_n)_{n=0}^{\infty}, \quad (1)$$
$$m_n \in \mathbb{N}, \quad \lambda_n \in \mathbb{C}, \quad |\lambda_{n+1}| \geq |\lambda_n|,$$

рассматривались различными исследователями в пространствах $L^p(-a, a)$ при произвольном $p \in (1, +\infty)$, в соболевских пространствах, в лебеговых пространствах, снабжённых весом, и т.п. Вопрос базисности систем экспонент тесно связан с другими вопросами теории аппроксимации — проблемами полноты, минимальности, наличия базиса суммирования и т.д., и в целом эта посвящённая системам экспонент теория была названа негармоническим анализом (в отличие от анализа гармонического, изучающего исключительно свойства тригонометрической системы $(e^{int}), n \in \mathbb{Z}$). Существенный вклад в её развитие внесли Н. Левинсон, Л. Шварц, Ж.-П. Кахан, А. Бьёрлинг и П. Мальявен, П. Кусис, Б. Я. Левин, А. Ф. Леонтьев, Р. Редхёффер, Р. Янг, Б. С. Павлов, А. М. Седлецкий, Н. К. Никольский, С. В. Хрущёв, А. М. Минкин, В. А. Ильин, Е. И. Моисеев и многие другие математики.

Пэли и Винер рассматривали базисы Рисса в $L^2(-\pi, \pi)$ вида

$$(e^{i\lambda_n t}), \quad \lambda_n \in \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (2)$$

как возмущение тригонометрической системы, т. е. при определённой близости точек λ_n к целым n , а именно, при условии $\sup |\lambda_n - n| < 1/\pi^2$, $\lambda_n \in \mathbb{R}$. В этом направлении окончательный результат получил М. И. Кадец²: если

$$\sup |\lambda_n - n| < \frac{1}{4}, \quad \lambda_n \in \mathbb{R},$$

то система (2) образует базис Рисса в $L^2(-\pi, \pi)$, причём постоянная $1/4$ точная.

¹Paley R., Wiener N. Fourier transforms in the complex domain. — New York: Publ. Amer. Math. Soc., 1934.

²Кадец М. И. Точное значение постоянной Палея–Винера // Докл. АН СССР. — 1964. — Т. 155. — С. 1253–1254.

Вопрос о критерии базиса Рисса вида (2) в $L^2(-\pi, \pi)$ требовал достаточно общего подхода к изучению систем экспонент. Важной вехой здесь явились работы Б. Я. Левина³, предложившего задавать условия на последовательность (λ_n) в терминах т. н. порождающей функции. Приведём определение этого понятия сразу для системы (1).

Целая функция экспоненциального типа называется порождающей функцией системы (1) на интервале $(-a, a)$, если

- 1) множество её нулей совпадает с $\{\lambda_n\}$,
- 2) каждый нуль λ_n имеет кратность m_n и
- 3) индикатор функции равен $a|\sin \theta|$.

Напомним, что по определению целая функция $L(z)$ имеет экспоненциальный тип, если

$$\exists M > 0 : |L(z)| \leq \exp(M|z|), \quad |z| > \text{const},$$

а индикатором такой функции называется величина

$$h_L(\theta) = \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln |L(re^{i\theta})|}{r^\rho},$$

где ρ — порядок функции $L(z)$.

В работах Левина и В. Д. Головина⁴ в качестве порождающей выступала функция, получившая название функции типа синуса. Это целая функция, удовлетворяющая условию

$$C_1 e^{a|\operatorname{Im} z|} \leq |L(z)| \leq C_2 e^{a|\operatorname{Im} z|}, \quad C_1, C_2 > 0, \quad |\operatorname{Im} z| \geq \text{const}.$$

Последовательность Λ называется отделимой, если

$$\inf_{n \neq m} |\lambda_n - \lambda_m| > 0.$$

Левиним доказано, что если порождающая функция системы $e(\Lambda)$ является функцией типа синуса и последовательность Λ отделима, то система образует базис $L^2(-a, a)$. Головин же дополнил этот результат, доказав наличие базиса Рисса в этом случае.

Стоит отметить⁵, что отделимость последовательности Λ , а также (для последовательности, лежащей в горизонтальной полосе $|\operatorname{Im} z| \leq h$) условие $\sup m_n < +\infty$ необходимы для базиса системы $e(\Lambda)$.

³Левин Б. Я. О базисах показательных функций в L^2 // Записки матем. отд. физ.-мат. фак-та ХГУ и ХМО, сер. 4. — 1961. — Т. 27. — С. 39–48; Левин Б. Я. Интерполяция целыми функциями экспоненциального типа // Матем. физика и функц. анализ, ФТИНТ АН УССР. — 1969. — Вып. 1 — С. 136–146.

⁴Головин В. Д. О биортогональных разложениях в L^2 по линейным комбинациям показательных функций // Записки мех.-мат. фак. ХГУ и ХМО, сер. 4. — 1964. — Т. 30. — С. 18–29.

⁵Седлецкий А. М. Классы аналитических преобразований Фурье и экспоненциальные аппроксимации. — Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2005. Гл.6.

Критерий базиса из экспонент для случая последовательности Λ , лежащей в горизонтальной полосе, был найден Б. С. Павловым⁶ в 1979 г. Говорят, что неотрицательная функция $g(x)$ удовлетворяет A_p -условию, $1 < p < \infty$, если

$$\sup_{(a,b) \subset \mathbb{R}} \left(\frac{1}{|b-a|} \int_a^b g(x) dx \right) \left(\frac{1}{|b-a|} \int_a^b (g(x))^{-1/(p-1)} dx \right)^{p-1} < +\infty.$$

Будем в этом случае писать $g(x) \in A_p$.

Теорема А (Павлов). Пусть последовательность (λ_n) отделима и для некоторого $h \in \mathbb{R}_+$ и всех n верно $|\operatorname{Im} \lambda_n| \leq h$. Тогда система (2) образует базис Рисса в $L^2(-a, a)$ тогда и только тогда, когда

$$\exists H > h : |L(x + iH)|^2 \in A_2,$$

где $L(z)$ — порождающая функция системы (2).

Если отказаться от требования принадлежности точек λ_n горизонтальной полосе, то L^2 -нормы экспонент системы (2) станут неограниченными в совокупности, и понятие базиса Рисса в постановке задачи следует заменить на понятие безусловного базиса (система (e_n) называется безусловным базисом гильбертова пространства, если система $(e_n/\|e_n\|)$ образует в нём базис Рисса). Для случая, когда точки λ_n лежат в полуплоскости $\operatorname{Im} z \geq h > -\infty$, необходимое и достаточное условие безусловного базиса вида (2) вскоре нашли Н. К. Никольский, С. В. Хрущёв и Б. С. Павлов⁷. Общий случай рассмотрел А. М. Минкин⁸ в 1991 г.: к условиям A_2 и отделимости (λ_n) в теореме А добавляется т. н. условие Карлесона, накладываемое на последовательности $\Lambda_{\pm} = (\lambda_n \in \Lambda : \operatorname{Im} \lambda_n \gtrless 0)$.

Случай пространств $L^p(-a, a)$, $p \neq 2$, требовал новых подходов, и вплоть до 1970-х гг. соответствующих результатов не было. Прорыв в этом направлении достигнут благодаря работам А. М. Седлецкого. Мы приведём те его результаты, которые наиболее тесно связаны с представленными в диссертации теоремами. Прежде, однако, заметим, что при переходе от L^2 к другим функциональным пространствам теряется понятие базиса Рисса. Некоторой его заменой для систем экспонент служит т. н. свойство Рисса, а именно ограниченность в норме рассматриваемого пространства оператора

$$f(t) = \sum_{\lambda_n \in \Lambda} \left(\sum_{j=0}^{m_n-1} c_{nj} t^j \right) e^{i\lambda_n t} \mapsto \sum_{\operatorname{Re} \lambda_n > 0} \left(\sum_{j=0}^{m_n-1} c_{nj} t^j \right) e^{i\lambda_n t}.$$

⁶Павлов Б. С. Базисность системы экспонент и условие Макенхоупта // Докл. АН СССР. — 1979. — Т. 247. — С. 37–40.

⁷Hruščev S. V., Nikolskii N. K. and Pavlov B. S. Unconditional bases of exponentials and reproducing kernels // Lect. Notes Math. — 1981. — V. 864. — P. 214–235.

⁸Минкин А. М. Отражение показателей и безусловные базисы из экспонент // Алгебра и анализ. — 1991. — Т. 3, №5. — С. 109–134.

Это определение инициировано теоремой М. Рисса о сопряжённом ряде Фурье, согласно которой тригонометрический базис обладает этим свойством в $L^p(-\pi, \pi)$, $1 < p < \infty$.

Следующая теорема⁹ является расширением достаточной части теоремы Павлова.

Теорема В. Пусть $1 < p \leq 2$, последовательность Λ отделима и сосредоточена в горизонтальной полосе $|\operatorname{Im} z| \leq h$, а также $\sup m_n < +\infty$. Тогда если порождающая функция системы (1) при некотором $H > h$ удовлетворяет условию $|L(x + iH)|^p \in A_p$, то эта система образует базис $L^p(-a, a)$ со свойством Рисса.

Зачастую рассматривают порождающие функции, являющиеся преобразованием Фурье–Стилтьеса финитной меры:

$$L(z) = \int_{-a}^a e^{izt} d\sigma(t), \quad \operatorname{var} \sigma < \infty.$$

В этом случае система (2) выступает как система собственных функций оператора дифференцирования $D(y) = -iy'$ с "размазанным" краевым условием

$$\int_{-a}^a y(t) d\sigma(t) = 0, \quad \operatorname{var} \sigma < \infty$$

(а система (1) может рассматриваться как система собственных и присоединённых функций). С этой точки зрения системы экспонент изучали С. Верблюнский, А. П. Хромов, В. А. Молоденков и др.

Теорема С. Пусть⁹ $1 < p < \infty$ и последовательность Λ нулей функции

$$L(z) = \int_{-a}^a e^{izt} d\sigma(t), \quad \operatorname{var} \sigma < \infty, \quad \sigma(\pm a) \neq \sigma(\pm a \mp 0), \quad (3)$$

отделима. Тогда система (1) образует базис $L^p(-a, a)$ со свойством Рисса.

Теорема Д. Пусть¹⁰ $1 < p < \infty$, а Λ — последовательность нулей функции вида

$$L(z) = \int_{-a}^a e^{izt} \frac{k(t)}{(a - |t|)^\beta} dt, \quad \operatorname{var} k(t) < \infty, \quad k(\pm a \mp 0) \neq 0, \quad 0 < \operatorname{Re} \beta < 1. \quad (4)$$

⁹Седлецкий А. М. Биортогональные разложения в ряды экспонент на интервалах вещественной оси // Успехи матем. наук. — 1982. — Т. 57, №5. — С. 51–95.

¹⁰Седлецкий А. М. Базисы из экспонент в пространствах $L^p(-\pi, \pi)$ // Матем. заметки. — 2002. — Т. 72, №3. — С. 418–432.

Тогда при $1 - \operatorname{Re} \beta < 1/p$ система $e(\Lambda)$ образует базис со свойством Рисса в пространстве $L^p(-a, a)$, а при $1 - \operatorname{Re} \beta > 1/p$ для всякого $\lambda \notin \Lambda$ уже система $e(\Lambda) \cup \{e^{i\lambda t}\}$ образует базис со свойством Рисса в $L^p(-a, a)$.

Случай порождающей функции вида (4) интересен в частности тем, что под него при некоторых Δ подпадает система

$$(e^{i(n+\Delta \operatorname{sign} n)t})_{n=-\infty}^{+\infty}, \quad \Delta \in \mathbb{C}. \quad (5)$$

С системами (5) связаны системы синусов и косинусов

$$(\sin(n + \Delta)t)_{n=1}^{\infty}, \quad 1 \cup (\cos(n + \Delta)t)_{n=1}^{\infty}, \quad (6)$$

первая из которых при $\Delta = -1/4$ является системой собственных функций задачи Штурма–Лиувилля для уравнения Лаврентьева–Бицадзе со специальными краевыми условиями¹¹.

Для систем (5) и (6) с вещественными Δ Е. И. Моисеевым¹² даны критерии базиса соответственно в пространствах $L^p(-\pi, \pi)$ и $L^p(0, \pi)$, обобщённые Г. Г. Девдариани¹³ на комплексные Δ . Результат Девдариани состоит в том, что критерием базиса экспонент, синусов или косинусов является условие

$$\frac{1}{2p} - \frac{1}{2} < \operatorname{Re} \Delta < \frac{1}{2p}, \quad \frac{1}{2p} - 1 < \operatorname{Re} \Delta < \frac{1}{2p} \quad \text{или} \quad \frac{1}{2p} - \frac{1}{2} < \operatorname{Re} \Delta < \frac{1}{2p} + \frac{1}{2}$$

соответственно.

В последнее время проявляется интерес к базисам из экспонент в весовых пространствах. Это пространства $L^p(I, \omega(t) dt)$ (где вес $\omega(t)$ — измеримая, почти всюду положительная функция на конечном интервале $I \subset \mathbb{R}$), состоящих из определённых на интервале I измеримых функций с конечной нормой

$$\|f\| = \left(\int_I |f(t)|^p \omega(t) dt \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

Естественно, что первой была исследована тригонометрическая система: в 1973 г. Хант, Макенхаут и Виден¹⁴ установили, что она образует базис пространства $L^p((-\pi, \pi), \omega(t) dt)$, $1 < p < \infty$, в том и только в том случае,

¹¹Пономарев С. М. К теории краевых задач для уравнений смешанного типа в трёхмерной области // Докл. АН СССР. — 1979. — Т. 246. — С. 1303–1305; Пономарев С. М. Об одной задаче на собственные значения // Докл. АН СССР. — 1979. — Т. 249. — С. 2068–2070.

¹²Моисеев Е. И. О базисности систем синусов и косинусов // Докл. АН СССР. — 1984. — Т. 275 — С. 794–798.

¹³Девдариани Г. Г. Базисность некоторых специальных систем собственных функций несамосопряжённых дифференциальных операторов. — Автореф. дисс. ... канд. физ.-мат. наук. — Москва: МГУ, 1986.

¹⁴Hunt R. A., Muckenhoupt B. and Wheeden R. L. Weighted norm inequalities for the conjugate function and Hilbert transform // Trans. of Amer. Math. Soc. — 1973. — V. 176. — P. 227–251.

когда периодически продолженный вес $\omega(t)$ удовлетворяет A_p -условию. Что же до систем экспонент общего вида, то здесь рассматривались только веса, состоящие из произведения конечного числа степеней.

А. Буавеном и А. М. Седлецким¹⁵ рассмотрены пространства

$$L_\alpha^p = L^p((-a, a), \omega_\alpha(t) dt)$$

с весом

$$\omega_\alpha(t) = \prod_{j=1}^s |t - b_j|^\alpha, \quad 2 \leq s < \infty, \quad -a = b_1 < \dots < b_s = a, \quad 0 \leq \alpha < p - 1 \quad (7)$$

и доказаны две следующих теоремы, обобщающие теоремы С и В.

Теорема Е. Пусть $1 < p < \infty$ и последовательность Λ нулей функции вида (3) отделима. Тогда система $e(\Lambda)$ образует обладающий свойством Рисса базис пространства L_α^p .

Теорема F. Пусть $1 < p < \infty$, $\alpha \geq p - 2$, последовательность Λ отделима и сосредоточена в горизонтальной полосе $|\operatorname{Im} z| \leq h$, а также $\sup m_n < +\infty$. Тогда если порождающая функция системы $e(\Lambda)$ при некотором $H > h$ удовлетворяет условию

$$|L(x + iH)|^{\frac{p}{1+\alpha}} \in A_{\frac{p}{1+\alpha}},$$

то система $e(\Lambda)$ образует обладающий свойством Рисса базис L_α^p .

Данная диссертационная работа посвящена базисам из экспонент в пространствах $L_\omega^p = L^p((-a, a), \omega(t) dt)$, $1 < p < \infty$, с более общим по сравнению с (7) весом

$$\omega(t) = \prod_{j=1}^s |t - b_j|^{\alpha_j}, \quad 2 \leq s < \infty, \quad -a = b_1 < \dots < b_s = a, \quad (8)$$

$$\alpha_1 = \alpha_s = \alpha, \quad -1 < \alpha_1, \dots, \alpha_s < p - 1.$$

Так, ставится вопрос о расширении теорем Е и F на веса (8), разрешаемый соответственно в главах 3 и 4.

Для веса вида

$$u(t) = t^\gamma |t - t_0|^\beta (\pi - t)^\alpha, \quad t_0 \in (0, \pi), \quad -1 < \alpha, \beta, \gamma < p - 1, \quad 1 < p < \infty$$

Моисеевым¹⁶ получен критерий базиса систем (6) в $L^p((0, \pi), u(t) dt)$, заключающийся соответственно в условиях

$$\frac{1 + \alpha}{2p} - 1 < \operatorname{Re} \Delta < \frac{1 + \alpha}{2p} \quad \text{и} \quad \frac{1 + \alpha}{2p} - \frac{1}{2} < \operatorname{Re} \Delta < \frac{1 + \alpha}{2p} + \frac{1}{2}. \quad (9)$$

¹⁵Boivin A., Sedletskii A. M. Bases of exponentials in weighted L^p -spaces // Spectral and evolution problems, 14. – Proc. 14 Crimean Autumn Math. School-Symp., September 2003, Sevastopol, Laspi.– Simferopol, 2004. – P.41–43.

¹⁶Моисеев Е. И. О базисности систем синусов и косинусов // Докл. АН СССР. – 1984. – Т. 275 – С. 794–798.

Там же получен критерий

$$\frac{1+\alpha}{2p} - \frac{1}{2} < \operatorname{Re} \Delta < \frac{1+\alpha}{2p} \quad (10)$$

базиса системы экспонент (5) в $L^p((-\pi, \pi), u(|t|) dt)$.

А. М. Седлецким¹⁷ изучены системы (5) и (6) в пространствах с весом (7) при дополнительном условии $\alpha \geq p - 2$ (по-прежнему $1 < p < \infty$). Установлено, что система (5) при условии (10) образует базис пространства $L^p((-\pi, \pi), \omega_\alpha(t) dt)$, эквивалентный тригонометрическому базису при соответствии $e^{int} \leftrightarrow e^{i(n+\Delta \operatorname{sign} n)t}$, $n \in \mathbb{Z}$. Система же синусов (косинусов) (6) при соответствующем условии (9) образует базис $L^p((0, \pi), \omega_\alpha(t) dt)$, эквивалентный системе $(\sin nt)_{n=1}^\infty$ ($1 \cup (\cos nt)_{n=1}^\infty$) при соответствии

$$\sin nt \leftrightarrow \sin(n + \Delta)t, \quad n \in \mathbb{N} \quad (1 \leftrightarrow 1, \cos nt \leftrightarrow \cos(n + \Delta)t, \quad n \in \mathbb{N}).$$

Напомним, что базисы называются эквивалентными при существовании ограниченного вместе с обратным оператора, переводящего эти базисы друг в друга. Утверждение об эквивалентности базисов также доказано для невесового случая. При $\Delta \in \mathbb{R}$ установлено, что достаточные условия (9) и (10) соответствующих базисов являются также необходимыми.

В данной работе в главе 2 получен критерий базиса систем (5) и (6) в пространствах с весом вида (8), а также доказана эквивалентность этих базисов соответствующим тригонометрическим. Полученные нами теоремы содержат все приведённые выше результаты.

В главе 1 исследован не поднимавшийся ранее вопрос о переносе теоремы С на весовой случай, причём опять же рассмотрен наиболее общий вес (8). Полученный результат является основой для исследования базисов (5) и (6) в главе 2.

Кроме того, в главе 4 приводится обобщение на случай веса (8) некоторых результатов о полноте систем экспонент, известных ранее для случая веса со всеми совпадающими показателями $\alpha_1 = \dots = \alpha_s$. Полученный результат также используется в главе 2.

Цель работы

Исследовать базисы из экспонент вида (1) при $1 < p < \infty$ в пространствах L_ω^p (т. е. с весом вида (8)). А именно, найти достаточные условия базиса, если порождающая функция системы имеет вид (3) или (4) либо удовлетворяет A_p -условию. Установить критерии базиса систем (5) и (6) в весовых пространствах.

¹⁷Седлецкий А. М. Классы аналитических преобразований Фурье и экспоненциальные аппроксимации. — Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2005. Гл.9.

Научная новизна

В диссертации получены следующие новые результаты:

- Найдено достаточное условие базиса системы экспонент, порождённой нулями функции (4), в пространстве L^p_ω , $1 < p < \infty$.
- Получен критерий базиса системы (5) и систем в (6) соответственно в пространствах $L^p((-\pi, \pi), \omega(t) dt)$ и $L^p((0, \pi), \omega(t) dt)$, $1 < p < \infty$.
- Найдено достаточное условие базиса системы экспонент, порождённой нулями функции (3), в пространстве L^p_ω , $1 < p < \infty$, и для определённого класса мер $d\sigma$ получен критерий базиса.
- Найдено достаточное условие базиса в пространстве L^p_ω , $1 < p < \infty$, системы экспонент с порождающей функцией, удовлетворяющей A_p -условию.
- Получены достаточные условия полноты в весовых пространствах L^p_ω , $1 \leq p < \infty$, системы (1) в терминах порождающей функции и системы (2) в терминах ограничения роста модулей λ_n или их вещественных частей.

Методы исследования

В работе применяются методы функционального и комплексного анализа и теории аппроксимации.

Теоретическая и практическая ценность

Работа носит теоретический характер. Её результаты могут найти применение в дальнейших исследованиях по теории аппроксимации.

Апробация работы

Основные результаты диссертации докладывались

- на семинаре мех-мат. ф-та МГУ "Негармонический анализ" под руководством проф. А.М. Седлецкого (2008, 2009, 2010),
- на IX Казанской летней научной школе-конференции "Теория функций, её приложения и смежные вопросы" (Казань, 2009 г.),
- на XV Саратовской зимней школе "Современные проблемы теории функций и их приложения" (Саратов, 2010 г.),
- на конференции "Ломоносов-2010" (Москва, 2010 г.).

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в пяти работах автора. Из список приведён в конце автореферата. Работа [1] написана в соавторстве.

Структура и объём работы

Диссертация состоит из введения и четырёх глав, разбитых в общей сложности на 11 параграфов. Объём диссертации 68 страниц. Список литературы включает 26 наименований.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во **введении** дан краткий обзор работ по теме диссертации, сформулированы рассматриваемые в диссертации задачи и изложены основные результаты.

В **главе 1** речь идёт о случае, когда система экспонент порождается нулями функции вида (4). В **параграфе 1** приведён ряд вспомогательных утверждений, используемых как в первой, так и в прочих главах. В **параграфе 2** сформулирован и доказан основной результат главы 1. Здесь и далее под $\omega(t)$ понимается вес вида (8).

Теорема 1.1. Пусть $1 < p < \infty$ и порождающая функция системы $e(\Lambda)$ имеет вид (4). Тогда:

- 1) при $1 - \operatorname{Re} \beta < (1 + \alpha)/p$ система $e(\Lambda)$ образует базис со свойством Рисса в пространстве $L^p((-a, a), \omega(t) dt)$,
- 2) при $1 - \operatorname{Re} \beta > (1 + \alpha)/p$ и при дополнительном условии $k \in \operatorname{Lip}(1 - \operatorname{Re} \beta)$ для всякого $\lambda \notin \Lambda$ система $e(\Lambda) \cup \{e^{i\lambda t}\}$ образует базис со свойством Рисса в $L^p((-a, a), \omega(t) dt)$.

В **главе 2** теорема 1.1 применяется для исследования систем (5) и (6). **Параграф 1** посвящён первой из них и содержит следующую теорему.

Теорема 2.1. Пусть $1 < p < \infty$ и в соотношениях (8) $a = \pi$. Тогда система (5) образует базис в пространстве $L^p((-\pi, \pi), \omega(t) dt)$, $1 < p < \infty$, тогда и только тогда, когда верно (10). Базис (5) эквивалентен тригонометрическому при соответствии $e^{int} \leftrightarrow e^{i(n + \Delta \operatorname{sign} n)t}$, $n \in \mathbb{Z}$.

В **параграфе 2** исследуются системы (6), для которых наличие базиса описывает

Теорема 2.2. Пусть $1 < p < \infty$ и в соотношениях (8) $\alpha = \pi$. Тогда система синусов (косинусов) (6) образует базис пространства $L^p((0, \pi), \omega(t) dt)$ в том и только том случае, когда верно первое (второе) двойное неравенство (9). Этот базис эквивалентен базису $(\sin nt)_{n \in \mathbb{N}}$ при соответствии $\sin nt \leftrightarrow \sin(n + \Delta)t$, $n \in \mathbb{N}$ (базису $1 \cup (\cos nt)_{n \in \mathbb{N}}$ при соответствии $1 \leftrightarrow 1$, $\cos nt \leftrightarrow \cos(n + \Delta)t$, $n \in \mathbb{N}$).

В главе 3 исследуется случай порождающей функции (3). В параграфе 1 приводятся формулировки результатов с кратким комментарием.

Теорема 3.1. Пусть $1 < p < \infty$ и последовательность Λ нулей функции (3) отделима. Если в весе (8) $\alpha \geq 0$ и $\alpha_j \leq \alpha \quad \forall j \in \overline{1, s}$, то система экспонент образует базис со свойством Рисса в $L^p((-a, a), \omega(t) dt)$.

В теоремах предыдущих глав на крайние показатели веса не накладывалось дополнительных условий и наличие базиса зависело только от значения крайнего показателя α . В случае (3) имеет место другая ситуация: теорема Е не переносится автоматически на случай веса (8). Действительно, как показывает следующая теорема, отказаться от дополнительных ограничений на показатели веса в теореме 3.1 нельзя.

Скажем, что вес $\omega(t)$ имеет особенность порядка β в точке t_0 , если

$$\omega(t) \asymp |t - t_0|^\beta, \quad t \in \dot{U}(t_0).$$

Отношение $f(t) \asymp g(t)$ означает, что

$$\exists c, C > 0 : c|f(t)| \leq |g(t)| \leq C|f(t)|.$$

Таким образом, у веса $\omega(t)$ вида (8) особенности порядка α_j в точках b_j и порядка 0 во всех остальных. В следующей теореме функция $\sigma_0(t)$ является "погрешностью", расширяющей класс рассматриваемых функций. Существо дела ярче выявляется при $\sigma_0(t) \equiv 0$.

Теорема 3.3. Пусть последовательность Λ отделима и верно условие (3), причём $\sigma(t) = \sigma_0(t) + \sigma_1(t)$, где $\sigma_0(t)$ принадлежит соболевскому пространству $W_q^1(-a, a)$,

$$q \geq \frac{p}{p-1}, \quad q \geq \frac{p}{1+\alpha}, \quad q > \frac{p}{p-1-\alpha_j} \quad \forall j \in \overline{1, s},$$

а $\sigma_1(t)$ — кусочно-постоянная функция со скачками в точках c_i , $-a = c_1 < \dots < c_m = a$. Тогда система $e(\Lambda)$ является базисом пространства $L^p((-a, a), \omega(t) dt)$ (и тогда обладает свойством Рисса) в том и только том случае, когда

$$\forall i \in \overline{2, m-1} \quad \nu_i \leq \alpha,$$

где ν_i — порядок особенности веса $\omega(t)$ в точке c_i .

Теорема 3.3 демонстрирует неулучшаемость теоремы 3.1. Действительно, при нарушении условий последней на показатели α_j положим $c = b_j$, если $\exists \alpha_j > \alpha$, и $c \notin \{b_j\}$, если $\alpha < 0$. По теореме 3.1 система экспонент, соответствующая функции $\sigma(t)$ с единственным (помимо скачков на концах интервала) скачком в точке c , не будет базисом в $L^p((-a, a), \omega(t) dt)$.

Отметим, что доказательство наличия базиса, хотя и может вызывать значительные технические трудности, основано на весьма естественных приёмах — оценке сверху неких интегралов, применении общих теорем функционального анализа и т.п. Для доказательства отсутствия базиса требуются более оригинальные, имеющие какую-то своеобразную идею рассуждения. В данном случае это доказательство основано на возможной расходимости частичного обратного преобразования Фурье в пространстве с более сильной (за счёт уменьшения показателя степени веса) нормой по сравнению с нормой пространства, содержащего преобразуемую функцию. Эта возможная расходимость показана в **параграфе 2**.

Параграф 3 содержит доказательство теоремы 3.1, **параграф 4** — доказательство результата, связывающего наличие базиса с поведением частичного обратного преобразования Фурье, а **параграф 5** посвящён доказательству теоремы 3.3.

В **параграфе 1 главы 4** показано, что теорема F остаётся справедливой для случая (8) (то есть при различных некрайних показателях веса), если $\alpha \geq \max(0, p - 2)$ и $\alpha_j \leq \alpha \quad \forall j \in \overline{1, s}$. В **параграфе 2** приводятся результаты о полноте систем экспонент в весовом пространстве. Под обозначением L_ω^1 понимаем пространство $L^1((-a, a), \omega(t) dt)$ с весом вида (8), в котором условие $-1 < \alpha_1, \dots, \alpha_s < p - 1$ заменено на $-1 < \alpha_1, \dots, \alpha_s \leq 0$.

Теорема 4.2. Обозначим за $n_\Lambda(t)$ число точек последовательности $\Lambda \not\equiv 0$ в круге $\{|z| < t\}$ (с учётом кратностей) и положим

$$N_\Lambda(r) = \int_0^r \frac{n_\Lambda(t)}{t} dt.$$

Тогда для любого значения $p \in [1, \infty)$ условие

$$\limsup_{r \rightarrow +\infty} \left(N_\Lambda(r) - \frac{2a}{\pi} r + \frac{1 + \alpha}{p} \ln r \right) \begin{cases} > -\infty & \text{при } 1 < p < \infty, \\ = +\infty & \text{при } p = 1 \end{cases}$$

влечёт полноту системы $e(\Lambda)$ в пространстве $L^p((-a, a), \omega(t) dt)$.

Теорема 4.3. Пусть $\alpha_m, \alpha_{m+1}, \dots$ ($m \in \mathbb{N}$) — ограниченная последовательность неотрицательных чисел. Тогда если при $1 < p < \infty$

$$|\lambda_n| \leq |n| + \frac{1 + \alpha}{2p} + \alpha_{|n|}, \quad |n| \geq m \quad \text{и} \quad \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n} < +\infty$$

или при $p = 1$

$$|\lambda_n| \leq |n| + \frac{1+\alpha}{2} - \alpha_{|n|}, \quad |n| \geq m \quad \text{и} \quad \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n} = +\infty,$$

то система $(e^{i\lambda_n t})$, $n \in \mathbb{Z}$, полна в пространстве $L^p((-\pi, \pi), \omega(t) dt)$.

Также в параграфе 2 показано, что если последовательность (λ_n) лежит в горизонтальной полосе $|\operatorname{Im} z| \leq h$, то в условиях теоремы 4.3 можно рассматривать $\operatorname{Re} \lambda_n$ вместо λ_n . При этом константы $(1+\alpha)/2p$ и $(1+\alpha)/2$ как в этом результате, так и в самой теореме 4.3 не могут быть увеличены.

При $\alpha = 0$, $1 < p < \infty$ и $\alpha_n \equiv 0$ теоремы 4.2 и 4.3 представляют собой классические теоремы Н. Левинсона¹⁸. Для случая веса с одинаковыми показателями они получены Седлецким¹⁹, им же рассмотрен случай пространства $C[-a, a]$.

Благодарности

Автор сердечно благодарит своего научного руководителя профессора Анатолия Мечиславовича Седлецкого за постановку задачи, постоянное внимание к работе и советы по оформлению научных трудов.

¹⁸Levinson N. Gap and density theorems. — New York: Publ. Amer. Math. Soc., 1940.

¹⁹Седлецкий А. М. Классы аналитических преобразований Фурье и экспоненциальные аппроксимации. — Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2005. Гл.4.

Список работ автора по теме диссертации

- [1] Пухов С. С., Седлецкий А. М. Базисы из экспонент, синусов и косинусов в весовых пространствах на конечном интервале // Докл. Ак. Наук. — 2009. — Т. 425, №4. — С. 452–455.
- [2] Пухов С. С. Базисы из экспонент, синусов и косинусов в весовых пространствах на конечном интервале // Известия РАН. Серия матем. — 2011. — Т. 75, №2. — С. 167–196.
- [3] Пухов С. С. Базисы из экспонент в весовых пространствах, порождённые нулями функции типа синуса специального вида // "Депонированные научные работы", ВИНТИ. — №2, 2011. — 22.12.2010, №724-B2010.
- [4] Пухов С. С. Базисы из экспонент в весовых пространствах // Тезисы докл. 9-й Казанской летн. научн. школы-конф. "Теория функций, её прилож. и смежн. вопросы". — Труды матем. центра им. Н. И. Лобачевского, т. 38. — Казан. матем. общ-во. — Казань, 2009. — С. 232–234.
- [5] Пухов С. С. О базисах в весовых пространствах систем экспонент, порождённых функцией ограниченной вариации со скачками на концах отрезка // Тезисы докл. 15-й Саратовской зимн. школы "Современные проблемы теории функций и их приложения". — Изд-во Саратов. ун-та. — Саратов, 2010. — С. 147–148.

В работе [1] А. М. Седлецкому принадлежат предложение 1, теоремы 2 и 3 и следствие 1, С. С. Пухову — теоремы 1, 4 и 5.