Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова

механико–математический факультет

На правах рукописи

Белорусов Тимофей Николаевич

СИСТЕМЫ ОБСЛУЖИВАНИЯ С ВОЗМОЖНОСТЬЮ НЕПРИСОЕДИНЕНИЯ К ОЧЕРЕДИ

01.01.05 — теория вероятностей и математическая статистика

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико–математических наук

Москва 2011

Работа выполнена на кафедре теории вероятностей механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук,
профессор Афанасьева Лариса Григорьевна.

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук,
профессор Ушаков Владимир Георгиевич;
кандидат физико-математических наук,
доцент Матвеев Виктор Фёдорович.

Ведущая организация:

Вологодский государственный педагогический университет.

Защита диссертации состоится 20 мая 2011 года в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.85 при Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова (главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 20 апреля 2011 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета
Д 501.001.85 при МГУ
доктор физико-математических наук,
профессор В. Н. Сорокин.

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

Одним из основных направлений развития современной теории массового обслуживания является исследование систем сложной структуры. Среди них многофазные модели, сети, системы с повторными вызовами, ненадёжными приборами, различными ограничениями на время пребывания или ожидания. Это связано не только с потребностями приложений, но и содержательностью возникающих здесь математических проблем. Поскольку лишь в исключительных ситуациях традиционный для теории очередей пуассоновский поток сохраняет свои свойства при прохождении через систему обслуживания, весьма актуальным становится изучение моделей с потоками сложной структуры, например, дважды стохастическими пуассоновскими, марковски-модулированными, полумарковскими потоками и другими. В последние годы таким потокам посвящены исследования многих известных математиков [1].

Диссертация посвящена исследованию систем массового обслуживания с нетерпеливыми клиентами (queueing systems with impatient customers), в которых поступающее требование с некоторой вероятностью, зависящей от числа требований в системе, отказывается от обслуживания и покидает систему. Системы с такого рода ограничением именуют системами с возможностью неприсоединения к очереди (queueing systems with balking). В качестве входного процесса рассматривается регенерирующий поток. Данный класс потоков обладает рядом замечательных свойств.

Во-первых, регенерирующими являются большинство обычно используемых в теории массового обслуживания входных потоков. Среди них упомянутые выше дважды стохастический пуассоновский поток со случайной интенсивностью, являющейся регенерирующим процессом, марковски-модулированный поток, полумарковский поток и другие.

Во-вторых, при довольно общих условиях свойство регенерации сохраняется при прохождении через систему обслуживания. Это позволяет исследовать последовательно соединённые системы обслуживания и иерархические сети, опираясь на результаты, касающиеся отдельных узлов [2].

И наконец, потоки данного класса могут использоваться при построении математических моделей многих реальных объектов, поскольку интен-

---

[1] Rolski, T., “Queues with nonstationary inputs”. *Queueing systems*, 5, **1-3**, 113–129 (1989). Asmussen, S., “Ladder heights and the Markov-modulated $M|G|1$ queue”. *Stochastic Processes and Their Applications*, 37, 313–326 (1991).

[2] Афанасьева, Л. Г., “Об эргодичности открытой сети обслуживания”. *Теория вероятностей и её применения*, 32, **4**, 777–781 (1987).

сивность таких потоков может зависеть от времени и, более того, являться случайным процессом. В простейших предпосылках задачи сводятся к изучению процессов рождения и гибели с нестационарными параметрами [3].

Заметим, что входные потоки в упомянутых работах относятся к классу регенерирующих, так что в диссертации исследуются системы обслуживания, обобщающие модели, изучаемые в последние годы [4].

В качестве базовой модели рассматривается система с возможностью неприсоединения к очереди. Такие системы относятся к классу систем с ограничениями, активно изучавшемуся с середины прошлого века. Невозможно перечислить все результаты, касающиеся систем с различными ограничениями, поскольку интерес к моделям подобного рода до сих пор чрезвычайно высок [5].

В работе основное внимание уделяется отысканию необходимых и достаточных условий эргодичности процессов, описывающих функционирование системы. Проблема условий эргодичности систем с очередью достаточно традиционна для теории массового обслуживания. Эти условия представляют значительный интерес для приложений, поскольку они определяют соотношения между параметрами модели, при которых не образуется бесконечно больших очередей. С другой стороны, доказательства соответствующих предельных теорем приводят к анализу сложных случайных процессов, вообще говоря, немарковских, что способствует разработке новых подходов и методов. Если удаётся построить цепь Маркова, связанную с функционированием системы, то доказательства опираются на соответствующие результаты для марковских цепей.

Несмотря на достаточно долгую историю развития данного направления интерес к вопросам эргодичности велик и в настоящее время. Этой проблеме посвящены работы Г. Ш. Цициашвили, М. А. Осиповой [6], A. Mandelbaum, S. Zeltyn [7], Л. Г. Афанасьевой [8].

Отличительная черта ранее изучаемых систем состоит в том, что в них либо входной поток пуассоновский, либо время обслуживания имеет экспо-

---

[3] Зейфман, А. И., Сатин, Я. А., "Средние характеристики марковских систем обслуживания". *Автоматика и телемеханика*, 9, 122–133 (2007).

[4] Баштова, Е. Е., "Режим малой загрузки для системы обслуживания со случайной нестационарной интенсивностью". *Матем. заметки*, 80, **3**, 339–349 (2006).

[5] Cohen, J. W., "Single server queue with uniformely bounded virtual waiting time". *J. Appl. Probab.* 5, **1**, 93–122 (1968). Афанасьева, Л. Г., Мартынов, А. В., "Об эргодических свойствах систем массового обслуживания с ограничением". *Теория вероятностей и её применения*, 14, **1**, 105–114 (1969).

[6] Цициашвили, Г. Ш., Осипова, М. А., "Предельные распределения в сетях массового обслуживания с ненадежными элементами". *Пробл. передачи информ.*, 44, **4**, 109–119 (2008).

[7] Mandelbaum, A., Zeltyn S., "Staffing many-server queues with impatient customers: constraint satisfaction in call centers". Working Paper, Technion-Israel Institute of Technology (2007).

[8] Афанасьева, Л. Г., "Системы массового обслуживания с циклическими управляющими процессами" *Кибернетика и системный анализ*, 41, **1**, 54–68 (2005).

ненциальное распределение. В дополнение накладываются условия на сами ограничения, такие как экспоненциальное распределение величины, ограничивающей время ожидания (пребывания) [9]. Это позволяет использовать традиционные для теории массового обслуживания методы (вложенные цепи Маркова, введение дополнительных переменных) при получении стационарных характеристик таких систем. Например, в самых простейших предпосылках число требований в системе является процессом рождения и гибели, так что стационарное распределение находится по известным формулам.

Главная трудность в изучении систем с достаточно общими входными потоками и произвольным распределением времени обслуживания состоит в том, что за редким исключением не удаётся получить явные выражения для основных характеристик системы. Это приводит к необходимости асимптотического анализа операционных характеристик в критических ситуациях (условия высокой или малой загрузки).

Имеется обширная литература, в которой доказываются предельные теоремы для стационарных и нестационарных характеристик систем, находящихся в условиях, близких к критическим. Первыми работами, посвящёнными применению общих принципов теории случайных процессов к исследованию критических режимов систем обслуживания были статьи Ю. В. Прохорова [10]. В монографии А. А. Боровкова [11] развита общая теория предельного поведения процессов массового обслуживания при слабых условиях относительно потока требований, длительности обслуживания и структуры самой системы. Доказаны предельные теоремы для систем с ожиданием и с потерями. Предельные процессы оказались весьма сложного характера, они сводятся к диффузионным процессам лишь в частных случаях.

В диссертации задача о высокой загрузке исследована в двух вариантах. В одной постановке рассматривается поведение предельного распределения в условиях высокой загрузки, а в другой — диффузионная аппроксимация нормированного процесса числа требований в системе. Доказательства опираются на общую теорему Боровкова и результаты, касающиеся диффузионной аппроксимации систем с неограниченным временем ожидания [12].

---

[9] Natvig, B., “On the transient state probabilities for a queueing model where potential customers are discouraged by queue lenght”. *J. Appl. Probab.*, 11, 345–354 (1974); Doorn, V., “The transient state probabilities for a queueing model where potential customers are discouraged by queue lenght”. *J. Appl. Probab.*, 18, 499–506 (1981).

[10] Прохоров, Ю. В., “Переходные явления в процессах массового обслуживания”. *Литов. мат. сб.*, 3, **1**, 199–206 (1963).

[11] Боровков, А. А., *Асимптотические методы в теории массового обслуживания.* М.: Наука, 381 с. (1980)

[12] Афанасьева, Л. Г., Баштова, Е. Е., “Предельные теоремы для систем массового обслуживания в условиях высокой загрузки”. *Современные проблемы математики и механики*, М.: Изд-во МГУ, 4, **3**, 40–54 (2009).

Вследствие популярности и активного развития теории массового обслуживания вообще и изучения систем со сложно устроенным входным потоком в частности, проблематика диссертации и подходы, предложенные в ней, представляются весьма актуальными.

Цель и задачи исследования.

Целью диссертации является получение новых результатов, касающихся систем обслуживания с возможностью неприсоединения к очереди, когда на вход подаётся регенерирующий случайный поток. Среди задач исследования выделяются следующие:

— Получение условий эргодичности для систем с возможностью неприсоединения к очереди с регенерирующим входным потоком. Исследование влияния вида последовательности вероятностей присоединения на эргодичность системы.

— Анализ операционных характеристик систем с возможностью неприсоединения к очереди в условиях высокой загрузки.

Научная новизна.

Представленные в диссертации результаты являются новыми, полученными автором самостоятельно. Новизна в первую очередь состоит в том, что исследуются модели систем обслуживания с регенерирующим входным потоком. Основные результаты диссертации следующие:

— Найдены необходимые и достаточные условия эргодичности системы с возможностью неприсоединения к очереди с произвольной последовательностью вероятностей присоединения, когда на вход подаётся регенерирующий случайный поток. Установлен критерий эргодичности системы в случае убывающей последовательности $\{f_j\}$. Показано, что предыдущее утверждение уже не носит критериальный характер для произвольной сходящейся последовательности.

— Получены необходимые и достаточные условия эргодичности случайного блуждания по целочисленной решётке действительной прямой с отражающей границей в нуле в случае, когда управляющая последовательность близка к периодической. На основе этих результатов найдены необходимые и достаточные условия эргодичности систем типа $GI|M|1$ и $M|GI|1$ с периодической последовательностью вероятностей присоединения. Данный случай рассмотрен отдельно, так как применение уже полученных выводов к системам с осциллирующей на бесконечности $\{f_j\}$ не приводит к точным ответам.

— Для систем с возможностью неприсоединения к очереди с регенерирующим входным потоком и убывающей последовательностью $\{f_j\}$ выведены условия сходимости стационарных распределений нормированных процессов виртуального времени ожидания и количества требований к экспоненциальному. Установлена C-сходимость нормированных процессов виртуального времени ожидания и количества требований к диффузионному на конечном интервале.

Методика исследования.

В работе нашли применение классические методы теории массового обслуживания, такие как метод вложенных цепей Маркова, метод доказательства стохастической неограниченности, разработанный Д. Кифером и Я. Вольфовицем [13]. Эргодические теоремы доказываются на основе теоремы Смита для регенерирующих случайных процессов [14]. Использованы результаты теории случайных блужданий, теории восстановления, теории производящих функций и преобразований Лапласа (Лапласа-Стилтьеса).

Теоретическая и практическая значимость.

Диссертация носит теоретический характер. Её результаты могут найти применение в теории очередей, теории случайных блужданий и в приложениях данных дисциплин.

Апробация работы.

Результаты диссертации докладывались в 2010 г. на Большом семинаре кафедры теории вероятностей механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова под руководством член-корр. РАН, проф. А. Н. Ширяева, неоднократно на спецсеминаре кафедры теории вероятностей механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова под руководством д.ф.-м.н., проф. Л. Г. Афанасьевой (2007–2011 гг.), на XVII Международной конференции студентов, аспирантов и молодых учёных “Ломоносов” (Москва, 2010 г.), на международной конференции по методам стохастического моделирования и анализа данных в г. Ханья (Греция, 2010 г.)

Публикации.

Результаты диссертации опубликованы в трёх работах, из которых две — в журналах из перечня ВАК. Список работ приведён в конце автореферата [1-3].

Структура и объём работы.

Диссертация изложена на 98 страницах и состоит из введения, трёх глав, двух приложений и списка литературы, включающего 79 наименований.

[13] Kiefer, J., Wolfowitz, J., “On the theory of queues with many servers”. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 78, 1–18 (1955).

[14] Smith, W. L., “Regenerative stochastic processes”. *Proc. Roy. Soc.*, A 232, 6–31 (1955).

На протяжении всей работы основное внимание уделяется исследованию процесса виртуального времени ожидания (workload process) $W(t)$ и процесса количества требований $Q(t)$ в системе с возможностью неприсоединения к очереди. Заявка, поступающая в систему, в которой уже находятся j требований, присоединяется к очереди с вероятностью f_j и уходит с вероятностью $1 - f_j$, $f_j \in [0, 1]$.

Во **введении** содержится краткая история развития разделов теории очередей, касающихся проблем эргодичности систем обслуживания с немарковскими входными потоками и систем обслуживания с ограничениями. Историческая справка подкрепляется соответствующими ссылками на научные работы. Также во введении мотивируется актуальность темы и научная новизна предпринятого автором исследования.

В **первой главе** доказывается эргодическая теорема для системы обслуживания с возможностью неприсоединения к очереди с регенерирующим входным потоком. Регенерация понимается в смысле определения, данного Смитом [15]. Пусть $X(t)$ — случайный поток, $\{\tau_k, k \geqslant 0\}$ — неубывающая последовательность случайных величин. Вводятся следующие обозначения

$$\begin{aligned} \theta_k &:= \tau_k - \tau_{k-1},\ \theta_0 := \tau_0, \\ x_k(t,\omega) &:= (X(\tau_{k-1}(\omega) + t, \omega) - X(\tau_{k-1}, \omega)) I_{[0,\theta_k(\omega)]}(t), \\ x_0(t,\omega) &:= X(t,\omega) I_{[0,\theta_0(\omega)],} \\ \chi_k(\omega) &:= (x_k(t,\omega), \theta_k(\omega)), \\ \xi_k &:= x_k(\theta_k). \end{aligned} \tag{1}$$

Определение. Случайный поток $\{X(t), t \geqslant 0\}$ называется *регенерирующим*, если существует неубывающая последовательность случайных величин $\{\tau_k, k \geqslant 0\}$, такая что последовательность $\{\chi_k, k \geqslant 1\}$ состоит из независимых одинаково распределённых случайных элементов и не зависит от χ_0.

Предполагается, что $\mathsf{P}(\theta_0 < \infty) = 1$ и существуют $a := \mathsf{E}\,\xi_1 < \infty$, $\mu := = \mathsf{E}\,\theta_1 < \infty$. Вводится интенсивность потока $\lambda := \lim_{t\to+\infty} X(t)/t = a/\mu$ п.н.

Приводятся примеры наиболее употребляемых в теории очередей регенерирующих входных потоков. Среди них дважды стохастический пуассоновский поток, поток с интенсивностью случайной амплитуды, поток со случайными периодами, марковски-модулированный поток, поток Льюиса, марковский поток поступлений, полумарковский поток. Указываются моменты

[15] Кокс, Д., Смит, В., *Теория восстановления.* Изд-во "Советское радио 299 с. (1967)

регенерации данных потоков, вычисляются основные характеристики. Впоследствии значение таких характеристик, как интенсивность потока, используется для установления эргодичности систем обслуживания на основе доказанных в работе теорем.

Приводится подробное описание системы с возможностью неприсоединения к очереди. Для получения необходимых и достаточных условий эргодичности такой системы применяется *метод мажорирования*, который состоит в следующем. Пусть имеются две r-канальные системы S и $\widehat{S}$ с вероятностями присоединения $\{f_j\}$ и $\{\widehat{f}_j\}$ соответственно, причём для некоторого $k \geqslant 0$

$$\widehat{f}_j = \begin{cases} \alpha_1, & \text{если } j < k; \\ \alpha_2, & \text{если } j \geqslant k, \end{cases}$$

Процессы количества требований в системах S и $\widehat{S}$ обозначаются $Q(t)$ и $\widehat{Q}(t)$ соответственно. Доказана следующая лемма.

Лемма. *Пусть $Q(0) = \widehat{Q}(0) = 0$. Если $f_j \leqslant \widehat{f}_j$ при всех $j \geqslant 0$, то стохастически*

$$Q(t) \leqslant \widehat{Q}(t) + r,\ t \geqslant 0.$$

Если $f_j \geqslant \widehat{f}_j$ при всех $j \geqslant 0$, то стохастически

$$\widehat{Q}(t) \leqslant Q(t) + r,\ t \geqslant 0.$$

На основании леммы получен метод, который позволяет делать вывод об эргодичности исходной системы S посредством сравнения с более простой системой $\widehat{S}$. Основным результатом данной главы является теорема, устанавливающая условия эргодичности для r-канальной системы обслуживания с вероятностями присоединения $\{f_j\}$ с регенерирующим входным потоком интенсивности λ и произвольным распределением времени обслуживания со средним b. Далее предполагаются выполненными следующие условия.

i. $\mathsf{P}(\gamma_n < r\theta_n) > 0$, где γ_n, $n \geqslant 0$, — суммарное время обслуживания требований, поступивших на n-м периоде регенерации входного потока.

ii. Распределение θ_1 имеет абсолютно непрерывную компоненту.

Теорема 1. *Пусть $f_j > 0$, $j \geqslant 0$, тогда система S эргодична, если*

$$\lambda b\overline{f} < r,$$

где $\overline{f} = \limsup_{j\to+\infty} f_j$. Система S неэргодична, если

$$\lambda b\underline{f} > r,$$

где $\underline{f} = \liminf_{j\to+\infty} f_j$.

Доказательство теоремы основывается на лемме о мажорировании и теореме Смита для регенерирующих процессов, формулировка которой приводится в диссертации.

Следствие 1. *Пусть существует предел $f = \lim_{j\to+\infty} f_j$. Если $\lambda bf < r$, то система S эргодична. Если $\lambda bf > r$, то система S неэргодична.*

Установлено, что если $\lambda bf = r$, то существуют примеры как эргодичных, так и не эргодичных систем в зависимости от последовательности $\{f_j\}$. В случае убывающей последовательности вероятностей присоединения справедливо следующие утверждение, которое используется в третьей главе при определении ситуации высокой загрузки.

Теорема 2. *Если последовательность $\{f_j\}$ убывает, то условие*

$$\lambda bf < r,$$

где $f = \lim_{j\to+\infty} f_j$, является необходимым и достаточным для эргодичности системы S.

Во **второй главе** доказывается эргодическая теорема для случайного блуждания с отражением в нуле и управляющей последовательностью, которая в определённом смысле близка к периодической.

Рассматривается случайное блуждание по целочисленной решётке действительной прямой с отражающей границей в нуле $\{Q_n, n \geqslant 0\}$, а именно

$$Q_{n+1} = [Q_n + \xi_n - \eta_n]^+$$

с начальным условием Q_0. Относительно целочисленных неотрицательных случайных последовательностей $\{\xi_n\}$ и $\{\eta_n\}$ предположим, что

$$\begin{aligned} \mathsf{P}(\xi_n = j \,|\, Q_n = i, \eta_n, \mathcal{F}_{n-1}) = \mathsf{P}(\xi_n = j \,|\, Q_n = i) =: g_{ij} \quad \text{п.н.}, \\ \mathsf{P}(\eta_n = j \,|\, Q_n = i, \mathcal{F}_{n-1}) = \mathsf{P}(\eta_n = j \,|\, Q_n = i) =: h_{ij} \quad \text{п.н.}, \end{aligned}$$

где $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_n, \eta_n, \ldots, \xi_0, \eta_0, Q_0)$, $n \geqslant 0$, $\mathcal{F}_{-1} := \sigma(Q_0)$. Доказывается, что Q_n является цепью Маркова.

Рассмотрим последовательность $\{\widetilde{Q}_n, n \geqslant a\}$, удовлетворяющую рекуррентным соотношениям

$$\widetilde{Q}_{n+1} = [\widetilde{Q}_n + \widetilde{\xi}_n - \widetilde{\eta}_n]^+$$

с начальным условием $\widetilde{Q}_a$. Предположим, что для $\{\widetilde{\xi}_n\}$ и $\{\widetilde{\eta}_n\}$ выполнено

$$\begin{aligned} \mathsf{P}(\widetilde{\xi}_n = j \,|\, \widetilde{Q}_n = i, \widetilde{\eta}_n, \widetilde{\mathcal{F}}_{n-1}) = \mathsf{P}(\widetilde{\xi}_n = j \,|\, \widetilde{Q}_n = i) =: \widetilde{g}_{ij} \quad \text{п.н.}, \\ \mathsf{P}(\widetilde{\eta}_n = j \,|\, \widetilde{Q}_n = i, \widetilde{\mathcal{F}}_{n-1}) = \mathsf{P}(\widetilde{\eta}_n = j \,|\, \widetilde{Q}_n = i) =: \widetilde{h}_{ij} \quad \text{п.н..} \end{aligned}$$

где $\widetilde{\mathcal{F}}_n := \sigma(\widetilde{\xi}_n, \widetilde{\eta}_n, \ldots, \widetilde{\xi}_a, \widetilde{\eta}_a, \widetilde{Q}_a)$, $n \geqslant a$, $\widetilde{\mathcal{F}}_{a-1} := \sigma(Q_a)$. Считаем, что производящие функции

$$\widetilde{G}_i(z) = \mathsf{E}(z^{\widetilde{\xi}_n} \,|\, \widetilde{Q}_n = i) = \sum_{j=0}^{+\infty} z^j \widetilde{g}_{ij}, \quad |z| \leqslant 1,$$

$$\widetilde{H}_i(z) = \mathsf{E}(z^{\widetilde{\eta}_n} \,|\, \widetilde{Q}_n = i) = \sum_{j=0}^{+\infty} z^j \widetilde{h}_{ij}, \quad |z| \leqslant 1,$$

периодичны по i с периодом m, то есть $\widetilde{G}_{i+m}(z) \equiv \widetilde{G}_i(z)$ и $\widetilde{H}_{i+m}(z) \equiv \widetilde{H}_i(z)$ для всех $i \geqslant 0$.

Строится вспомогательная цепь Маркова с конечным множеством состояний.

$$X_n = \begin{cases} l, & \text{если } \widetilde{Q}_n = jm + l > 0,\ j \geqslant 0,\ 1 \leqslant l \leqslant m; \\ \text{не определено,} & \text{если } \widetilde{Q}_n = 0. \end{cases}$$

В силу сделанных в работе предположений X_n эргодична, а её стационарное распределение обозначим $\{\pi_j, 1 \leqslant j \leqslant m\}$.

Теорема 3. *Пусть для введённых выше цепей Маркова $\{Q_n, n \geqslant 0\}$ и $\{\widetilde{Q}_n, n \geqslant 0\}$ выполнены условия*

1. $\sum_{j=0}^{+\infty} |g_{ij} - \widetilde{g}_{ij}| \to 0$, $\sum_{j=0}^{+\infty} j|h_{ij} - \widetilde{h}_{ij}| \to 0$, $i \to +\infty$.

2. $\mathsf{P}\{\xi_n - \eta_n = l \,|\, Q_n = i\} > 0$, $\mathsf{P}\{\widetilde{\xi}_n - \widetilde{\eta}_n = l \,|\, \widetilde{Q}_n = i\} > 0$, $l = -1, 0, 1$; $i \geqslant 0$, $n \geqslant 0$.

3. *Последовательности случайных величин $\{\xi_n\}$ и $\{\eta_n\}$ являются равномерно интегрируемыми.*

4. $\widetilde{G}_i'(1) < +\infty$, $\widetilde{H}_i'(1) < +\infty$, $1 \leqslant i \leqslant m$.

Тогда последовательность $\{Q_n\}$ эргодична, если

$$\sum_{i=1}^{m} \left(\widetilde{G}_i'(1) - \widetilde{H}_i'(1) \right) \pi_i < 0.$$

Если

$$\sum_{i=1}^{m} \left(\widetilde{G}_i'(1) - \widetilde{H}_i'(1) \right) \pi_i > 0,$$

то

$$\widetilde{Q}_n \xrightarrow{\mathsf{P}} +\infty, \quad n \to +\infty.$$

Теорема 3 применяется к анализу систем обслуживания с периодической последовательностью вероятностей присоединения. Доказано, что для систем типа $GI|M|1$ и $M|GI|1$, вообще говоря, условия эргодичности нельзя выразить лишь в терминах среднего времени обслуживания и интенсивности входного потока.

В качестве первого приложения теоремы рассматривается система обслуживания S типа $GI|M|1$ с возможностью неприсоединения к очереди. Входной поток задаётся неубывающей последовательностью $\{u_n, n \geqslant 1\}$, $u_0 = 0$. Интервалы между последовательными поступлениями требований $a_n = u_{n+1} - u_n$ представляют собой независимые одинаково распределённые случайные величины с функцией распределения $A(t)$ и средним a. Времена обслуживания $\{b_n\}$ — независимые случайные величины, имеющие показательное распределение с параметром μ. Последовательность вероятностей присоединения $\{f_j, j \geqslant 0\}$, $f_j \in (0, 1]$, имеет период m. Пусть $Q(t)$ — количество требований в системе в момент t, а $Q_n = Q(u_n - 0)$ — количество требований в системе в момент поступления n-го требования.

При помощи введения вспомогательного марковского процесса составляется система дифференциальных уравнений для функций, через которые выражается стационарное распределение $\{\pi_j\}$.

Теорема 4. *Система S типа $GI|M|1$ с периодической последовательностью $\{f_j\}$ эргодична, если*

$$\zeta := \sum_{i=1}^{m} f_i \pi_i - \mu a < 0. \tag{2}$$

Если $\zeta > 0$, то $Q_n \xrightarrow{\mathsf{P}} +\infty$, $n \to +\infty$.

В качестве примера рассматривается случай $m = 2$.

Следствие 2. *Пусть последовательность $\{f_j\}$ имеет период $m = 2$. Тогда процесс $Q(t)$ эргодичен, если*

$$\zeta = \frac{(1 - a^*)(f_1 + f_2) + 4 f_1 f_2 a^*}{2(1 - a^* + (f_1 + f_2) a^*)} - \mu a < 0, \tag{3}$$

где $a^* := \int_0^{+\infty} e^{-2\mu t}\, dA(t)$.

Если $\zeta > 0$, то $Q(t) \xrightarrow{\mathsf{P}} +\infty$, $t \to +\infty$.

Следующее уравнение соответствует неравенству (3)

$$a^* \left(\frac{2}{f_1} - \rho - 2 + (4\rho f_1 - \rho - 2)x \right) = \frac{2}{f_1} - \rho - \rho x, \tag{4}$$

где $x := f_2/f_1$, $\rho := (\mu a)^{-1}$. В случае $\rho < 1$ система эргодична, поэтому далее рассматривается случай $\rho > 1$. Применяя теорему 4 и решая уравнение (4) относительно x, получим

Следствие 3. *Пусть последовательность $\{f_j\}$ имеет период $m = 2$ и $f_1 > f_2$, $\rho f_2 < 1 < \rho f_1$. Процесс $Q(t)$ эргодичен, если*

$$f_2 < f_1 \gamma(\rho, f_1),$$

где $\gamma(\rho, f_1)$ — положительный корень уравнения (4) относительно x.

В качестве второго приложения теоремы 3 рассматривается система обслуживания S типа $M|GI|1$ с возможностью неприсоединения к очереди. Пуассоновский входной поток имеет интенсивность λ. Времена обслуживания $\{b_n\}$ — независимые одинаково распределённые случайные величины с функцией распределения $B(t)$ и средним b. Пусть τ_n — момент завершения n-го обслуживания требования, $\tau_0 = 0$. Положим $Q_n = Q(\tau_n + 0)$, случайная величина ξ_n равна количеству присоединившихся на интервале $[\tau_n, \tau_{n+1})$ требований. На данном интервале обслуживается ровно одно требование, поэтому $\eta_n \equiv 1$ для любого n.

При помощи введения вспомогательного марковского процесса составляется система дифференциальных уравнений для функций, через которые выражается стационарное распределение $\{\pi_j\}$.

Теорема 5. *Система S типа $M|GI|1$ с периодической последовательностью $\{f_j\}$ эргодична, если*

$$\zeta := \sum_{i=1}^{m} G_i'(1)\pi_i - 1 < 0. \tag{5}$$

Если $\zeta > 0$, то $Q_n \xrightarrow{\mathsf{P}} +\infty$, $n \to +\infty$.

В качестве примера рассматривается случай $m = 2$.

Следствие 4. *Пусть последовательность $\{f_j\}$ имеет период $m = 2$. Тогда процесс $Q(t)$ эргодичен, если*

$$\zeta = \frac{2\lambda b f_1 f_2}{f_1 + f_2} + \frac{(f_1 - f_2)^2(1 - b^*)}{(f_1 + f_2)^2(1 + b^*)} - 1 < 0, \tag{6}$$

где $b^* := \int\limits_0^\infty e^{-\lambda(f_1+f_2)t}\, dB(t)$.

Если $\zeta > 0$, то $Q(t) \xrightarrow{\mathsf{P}} +\infty$, $t \to +\infty$.

Следующее уравнение соответствует неравенству (6)

$$b^*(x) = \frac{2x - \rho f_1 x - \rho f_1 x^2}{(\rho f_1 - 1)x^2 + \rho f_1 x - 1}, \tag{7}$$

где $x := f_2/f_1$, $b^*(x) := \int_0^\infty e^{-\lambda f_1 (1+x)t}\, dB(t)$, $\rho := \lambda b$. В случае $\rho < 1$ система эргодична, поэтому далее рассматривается случай $\rho > 1$. Применяя теорему 5 и решая уравнение (7) относительно x, получим

Следствие 5. *Пусть последовательность $\{f_j\}$ имеет период $m = 2$, $f_1 > f_2$, $\rho f_2 < 1 < \rho f_1$. Процесс $Q(t)$ эргодичен, если*

$$f_2 < f_1 \gamma(\rho f_1),$$

где $\gamma(\rho f_1)$ — положительный корень уравнения (7) относительно x.

Численные расчёты, соответствующие рассмотренным примерам, показали, что γ для различных распределений отличается не слишком сильно (в сотых долях). Среди рассмотренных распределений наибольшие различия наблюдаются между значениями, подсчитанными для экспоненциального распределения, и значениями, подсчитанными для константы.

В **третьей главе** изучается поведение операционных характеристик (виртуальное время ожидания, число требований в системе) систем с возможностью неприсоединения к очереди с регенерирующим входным потоком в ситуации высокой загрузки. Находятся условия сходимости стационарных распределений этих процессов к экспоненциальному. Доказательства опираются на построение мажорирующих процессов и результаты для систем без ограничений. Этот же подход позволяет установить при определённой нормировке C-сходимость на конечном интервале указанных процессов к диффузионному. Приводятся примеры, в которых при нарушении условий доказанных теорем имеет место сходимость к другим распределениям.

Рассматривается одноканальная система обслуживания с регенерирующим входным потоком $X(t)$. В обозначениях (1) предполагается, что у распределений θ_1 и ξ_1 существуют по крайней мере два момента. Пусть

$$a = \mathsf{E}\,\xi_1, \quad \mu = \mathsf{E}\,\theta_1, \quad \lambda = \frac{a}{\mu}, \quad \sigma_\xi^2 := \mathsf{D}\,\xi_1, \quad \sigma_\tau^2 := \mathsf{D}\,\tau_1, \quad r_{\xi,\tau} := \mathsf{cov}(\xi_1, \tau_1).$$

Времена обслуживания $\{\eta_j, j \geqslant 1\}$ являются независимыми одинаково распределёнными случайными величинами с функцией распределения $B(x)$ и конечными моментами $b = \mathsf{E}\,\eta_j$, $b_2 := \mathsf{E}\,\eta_j^2$, $\sigma_\eta^2 := b_2 - b^2$.

Поскольку для произвольной сходящейся последовательности $f_j \to f$, $j \to +\infty$ условие $\rho := \lambda b < 1$ не является, вообще говоря, необходимым для эргодичности, рассматриваются системы с убывающей последовательностью $\{f_j\}$ (см. теорему 2).

Пусть задано семейство $\{S_\varepsilon\}$ систем обслуживания указанного типа с входным потоком $X_\varepsilon(t)$, определяемым соотношениями

$$X_\varepsilon(t) = X(\alpha_\varepsilon t), \tag{8}$$

где

$$\alpha_\varepsilon = \frac{1-\varepsilon}{\rho f}. \tag{9}$$

Пусть $W_\varepsilon(t)$ и $Q_\varepsilon(t)$ — процессы виртуального времени ожидания и количества требований для S_ε соответственно. Пределы

$$\lim_{t\to+\infty} \mathsf{P}(W_\varepsilon(t) \leqslant x) = \Phi_\varepsilon(x) \quad \text{и} \quad \lim_{t\to+\infty} \mathsf{P}(Q_\varepsilon(t) \leqslant x) = F_\varepsilon(x)$$

существуют или не существуют одновременно.

Теорема 6. *Пусть $f_j \downarrow f$, $j \to +\infty$, существует $\delta > 0$, такое что*

$$\mathsf{E}\,\tau_1^{2+\delta} < +\infty, \quad \mathsf{E}\,\xi_1^{2+\delta} < +\infty, \quad \mathsf{E}\,\eta_1^{2+\delta} < +\infty$$

и

$$\sum_{j=1}^{\infty}(f_j - f) < +\infty. \tag{10}$$

Тогда для системы с возможностью неприсоединения к очереди в асимптотике (8), (9) справедливы соотношения

$$\Phi_\varepsilon\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big) \to 1 - \exp\Big\{-\frac{2ab}{\sigma_f^2}x\Big\}, \quad \varepsilon \to 0,$$

$$F_\varepsilon\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big) \to 1 - \exp\Big\{-\frac{2ab^2}{\sigma_f^2}x\Big\}, \quad \varepsilon \to 0,$$

где

$$\sigma_f^2 = a\sigma_\eta^2 + ab^2(1-f) + b^2 f\sigma_\xi^2 + \frac{a^2b^2f}{\mu^2}\sigma_\tau^2 - \frac{2ab^2f}{\mu}r_{\xi,\tau}. \tag{11}$$

Для систем с нетерпеливыми клиентами на основании результатов третьей главы и теоремы 5 из работы Л. Г. Афанасьевой и Е. Е. Баштовой [16] вытекает следующее утверждение.

[16]Афанасьева, Л. Г., Баштова, Е. Е., “Предельные теоремы для систем массового обслуживания в условиях высокой загрузки”. *Современные проблемы математики и механики*, М.: Изд-во МГУ, 4, **3**, 40–54 (2009).

Теорема 7. *Пусть выполнены условия теоремы 6 и* $W_\varepsilon(0) = 0$. *Тогда на каждом конечном интервале* $[0, u]$ *для процесса* $\widehat{W}_\varepsilon(t) = \varepsilon W_\varepsilon(t/\varepsilon^2)$ *имеет место* C*-сходимость к диффузионному процессу с отражением от нулевой границы и коэффициентами* $(-1, \sigma_f^2 a/b)$, *где* σ_f^2 *определяется (11).*

В конце третьей главы приводятся примеры систем, для которых нарушаются некоторые условия теоремы 6. Показано, что в случае немонотонной последовательности также может иметь место сходимость к экспоненциальному распределению. Приведены примеры сходимости к неэкспоненциальному распределению.

В **приложении 1** приводится доказательство теоремы Блекуэлла для дискретных и непрерывных процессов восстановления в случае бесконечного математического ожидания интервалов между восстановлениями, поскольку в диссертации существенно используется данный случай, а в специальной литературе доказательство для него имеется лишь в схематическом виде [17].

В **приложении 2** содержатся численные расчёты характеристик систем, рассмотренных во второй главе.

Автор выражает глубокую благодарность и признательность своему научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору Л. Г. Афанасьевой за постановку задач и постоянное внимание к работе. Автор высоко ценит содействие и внимание, оказанное работе сотрудниками кафедры теории вероятностей механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова.

[17] Lindvall, T., “The probabilistic proof of Blackwell’s renewal theorem”. *Ann. Probab.*, 5, **3**, 482–485 (1977).

Работы автора по теме диссертации

[1] Белорусов, Т. Н., “Эргодичность многоканальной системы обслуживания с возможностью неприсоединения к очереди”. *Теория вероятностей и её применения*, 56, **1**, 145–152 (2011).

[2] Белорусов, Т. Н., “Случайные блуждания с периодической управляющей последовательностью и их приложения в теории очередей”. *Обозрение прикладной и промышленной математики*, 17, **3**, 149–158 (2010).

[3] Afanasyeva, L. G., Belorusov, T. N., “Queueing systems in regenerative random environment”. *Book of Abstracts of Stochastic modeling techniques and data analysis international conference*, 4–5 (2010).