Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова

Механико-математический факультет

На правах рукописи

УДК 517.938.5+514.756.4

Лепский Тимур Александрович

Интегрируемость комплексных гамильтоновых систем с неполными потоками в $\mathbb{C}^2$

Специальность 01.01.04 — геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2011

Работа выполнена на кафедре дифференциальной геометрии и приложений Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научные руководители:	академик РАН Фоменко Анатолий Тимофеевич, кандидат физико-математических наук, доцент Кудрявцева Елена Александровна
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Мищенко Александр Сергеевич
	кандидат физико-математических наук, инженер Ивочкин Михаил Юрьевич
Ведущая организация:	Математический институт имени В.А. Стеклова Российской академии наук

Защита диссертации состоится 27 мая 2011 г. в 16 ч. 45 м. на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д.1, МГУ, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж)

Автореферат разослан 27 апреля 2011 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д.501.001.84 при МГУ
доктор физико-математических наук,
профессор

А.О. Иванов

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Диссертационная работа посвящена решению ряда задач в активно развивающейся в настоящее время теории гамильтоновых систем, которые играют важную роль при описании физических процессов без диссипации. Важными вопросами в теории гамильтоновых систем являются задачи исследования полноты потока, описывающего систему (необходимое условие интегрируемости системы по Лиувиллю), и задачи классификации (с точностью до различных отношений эквивалентности) таких систем.

В классических работах по исследованию интегрируемых гамильтоновых систем, возникающих, например, в механике и описывающих движение твердого тела, или заданных уравнениями Эйлера на компактных алгебрах Ли, безусловно выполнялось условие полноты потоков, что позволяло использовать классическую теорему Лиувилля для описания свойств таких интегрируемых систем. Так как для интегрируемых систем с *неполными потоками*, по-видимому, неизвестны никакие аналоги теоремы Лиувилля, то класс таких систем представляется весьма трудным для изучения. В связи с этим А.Т. Фоменко поставил задачу об обобщении теоремы Лиувилля на случай интегрируемых гамильтоновых систем с неполными потоками, а именно: описание топологии слоя, описание лагранжева слоения в окрестности слоя, построение аналога переменных действие-угол. Отметим также, что задача доказательства интегрируемости по Лиувиллю гамильтоновой системы сама по себе нетривиальна. Этим объясняется, что исследования условия полноты потоков для интегрируемых гамильтоновых систем появились совсем недавно в работах W. Gordon[1], А.Ю. Москвина, Д.В. Новикова.

В настоящей работе рассматривается класс интегрируемых гамильтоновых систем

$$(\mathbb{C}^2, \mathrm{Re}(dz \wedge dw), \mathrm{Re}(f(z,w))), \quad (0.0.1)$$

обладающих в общем случае неполными потоками, где $f(z,w)$ — многочлен двух комплексных переменных и $\mathrm{Im}(f(z,w))$ — первый интеграл системы. Такой класс систем был предложен для исследования А.Т. Фоменко и А.И. Шафаревичем, поскольку он тесно связан с квантованием комплексных многообразий, в частности, с описанием квантовых систем Калоджеро–Строкки.

[1]Gordon W. *On the Completeness of Hamiltonian Vector Fields.* Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 26, No. 2 (Oct. 1970), pp.329-331

Как правило, условие полноты векторного поля исследовалось в терминах алгебраических и аналитических свойств координатных функций векторного поля. Вместе с тем оставалась актуальной задача исследования условия полноты в геометрических терминах, например, в терминах *многоугольника Ньютона*, представляющего собой выпуклую оболочку целочисленных точек — индексов ненулевых коэффициентов полиномиального гамильтониана.

Представляет интерес также исследование (в том числе и доказательство аналога теоремы Лиувилля) интегрируемых гамильтоновых систем $(\mathbb{C}^2, \mathrm{Re}(dz \wedge dw), H = \mathrm{Re}\, f(z,w))$ с дополнительным первым интегралом $F = \mathrm{Im}\, f$, отвечающие комплексным гамильтоновым системам $(\mathbb{C}^2, dz \wedge dw, f(z,w))$ с гиперэллиптическим гамильтонианом $f(z,w) = z^2 + P_n(w), n \in \mathbb{N}$, которые при $n \geq 3$ имеют неполные потоки на любом лагранжевом слое $f^{-1}(a)$.

Другой важной проблемой в теории гамильтоновых систем является задача классификации систем с точностью до различных отношений эквивалентности. В теории интегрируемых гамильтоновых систем рассматривается несколько отношений эквивалентности систем: гамильтонова эквивалентность (означающая существование симплектоморфизма фазовых пространств, переводящего гамильтониан одной системы в гамильтониан другой системы с точностью до аддитивной константы), топологическая сопряженность, траекторная эквивалентность, топологическая послойная эквивалентность и другие. Перечисленные выше отношения эквивалентности упорядочены от наиболее сильного до наиболее слабого. Задачи классификации интегрируемых гамильтоновых систем в последние годы исследовались в работах А.Т. Фоменко[2 3 4], А.В. Болсинова[5 6], А.А. Ошемкова[7],

[2]Фоменко А.Т. *Теория бордизмов интегрируемых гамильтоновых невырожденных систем с двумя степенями свободы. Новый топологический инвариант многомерных интегрируемых систем.* Известия АН СССР, сер. матем., 1991, т. 55, №4, с. 747-779

[3]Фоменко А.Т.*Топологические инварианты гамильтоновых систем, интегрируемых по Лиувиллю.* Функц. анализ и его приложения, 1988, т. 22, вып. 4, с. 38-51

[4]Фоменко А.Т. *Топологический инвариант, грубо классифицирующий интегрируемые строго невырожденные гамильтонианы на четырехмерных симплектических многообразиях.* Функц. анализ и его приложения, 1991, т. 25, вып. 4, с. 23-35

[5]Болсинов А.В. *О классификации гамильтоновых систем на двумерных поверхностях.* УМН, 1994, т. 49, вып. 6, с. 195-196

[6]Болсинов А.В. *Гладкая траекторная классификация интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы.* Матем. сборник, 1995, т. 186, №1, с.3-28

[7]Ошемков А.А. *Вычисление инвариантов Фоменко для основных интегрируемых случаев динамики твердого тела.* Труды семинара по векторному и тензорному анализу, 1993, т. XXV, с. 23-109

М. Адлера[8 9], П. ван Мербеке[8 9], Л. Гаврилова[10], В.В. Козлова[11] и других.

Важным классом гамильтоновых систем являются системы с полиномиальным гамильтонианом f малой степени. Это обусловлено прежде всего тем, что такие системы либо являются интегрируемыми по Лиувиллю, либо допускают "вложение в интегрируемые по Лиувиллю гамильтоновы системы". Поэтому являются актуальными задача о классификации таких систем с точностью до *гамильтоновой эквивалентности*, а также задача о построении канонических *координат действие-угол* (или их аналогов) в окрестности неособого лагранжева слоя такой системы.

Более слабым отношением эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем является *топологическая послойная эквивалентность*, под которой будем понимать существование гомеоморфизма фазовых пространств, переводящего лагранжевы слои одной системы в лагранжевы слои другой системы. Такая эквивалентность обобщает известную *лиувиллеву эквивалентность* для интегрируемых по Лиувиллю гамильтоновых систем. Лиувиллева эквивалентность исследовалась в работах А.Т. Фоменко[2 3 4], А.В. Болсинова[5 6], А.А. Ошемкова[7], Нгуен Тьен Зунг[12], И.А. Тайманова[13], Л. Бейтса[14] и других. В отличие от большинства этих работ, в настоящей диссертации не предполагается полнота гамильтоновых потоков. Более того, в общем положении гамильтоновы потоки не являются полными. В частности, представляет интерес исследование топологии лагранжева слоения в окрестности критических точек, не являющихся, вообще говоря, морсовскими (*локальная классификация* особенностей лагранжева слоения), а также классификация лагранжева слоения в окрестности особого слоя (*полулокальная классификация* особенностей лагранжева слоения).

Теоретические результаты диссертации использованы в научно-исследовательских проектах при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 10–01–00748-а и № 08–01–91300-ИНДа),

[8]Adler M., van Moerbeke P. *Completely integrable systems, Euclidean Lie algebras and curves and linialization Hamiltonian systems, Jacobi varites and representation theory.* Adv. math., 1980, v. 30, pp. 267-379

[9]Adler M., van Moerbeke P. *The Kowalewski and Henon-Heiles motions as Manakov geodesic flows on $SO(4)$. A two-dimensional family of Lax pairs.* Somm. math. phys. 1988, v. 113, №4, pp. 659-700

[10]Gavrilov L. *Complex geometry of Lagrange top.* Prepublication №61 du Laboratorie de Mathematiques Emile Picard. Universite Toulouse III,1995

[11]Козлов В.В. *Топологические препятствия к интегрируемости натуральных механических систем.* ДАН СССР, 1979, т. 249, №6, с. 1299-1302

[12]Nguen T.Z. *Singularities of integrable geodesic flows on multidimensional torus and sphere. Journal of geometry and physics, 1996, v. 18, issue 2, pp. 147-162*

[13]Тайманов И.А. *О топологических свойствах интегрируемых геодезических потоков.* Матем. заметки, 1988, т. 44, вып. 2, 283-284

[14]Bates L. *Monodromy in the champagne bottle.* Journal of app. math. and phys., 1991, v. 42, pp. 837-847

Программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-3224.2010.1), Программы "Развитие научного потенциала высшей школы" (грант № 2.1.1.3704), ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" (грант № 02.740.11.5213) и ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009–2013 годы (мероприятие 1.1 – очередь XXII, Госконтракт № 14.740.11.0794).

Цель работы

Целью работы является исследование интегрируемых гамильтоновых систем с неполными потоками.
В связи с этим сформулированы следующие задачи:

1. Обобщить теорему Лиувилля на случай интегрируемых гамильтоновых систем определенного вида.

2. Описать лагранжевы слоения некоторых интегрируемых гамильтоновых систем в окрестности особого слоя.

3. Классифицировать интегрируемые гамильтоновы системы определенного вида с точностью до различных отношений эквивалентности.

Научная новизна

В диссертации решены следующие новые задачи:

1. Обобщена теорема Лиувилля на случай интегрируемых гамильтоновых систем вида $(\mathbb{C}^2, \mathrm{Re}(dz \wedge dw), H = \mathrm{Re}\, f(z, w))$ с дополнительным первым интегралом $F = \mathrm{Im}\, f$, отвечающих комплексным с гиперэллиптическим гамильтонианом $f(z, w) = z^2 + P_n(w), n \in \mathbb{N}$, которые при $n \geq 3$ имеют неполные потоки на любом лагранжевом слое $f^{-1}(a)$;

2. Решена задача полулокальной классификации лагранжевых слоений интегрируемых гамильтоновых систем указанного выше вида в окрестности особого слоя;

3. Классифицированы интегрируемые гамильтоновы системы указанного вида при $n \leq 4$ с точностью до гамильтонового отношения эквивалентности.

Основные методы исследования

В работе использованы методы основанные на теории интегрируемых гамильтоновых систем, теории динамических систем, дифференциальной геометрии, алгебраической геометрии, теории функций комплексных переменных.

Теоретическая и практическая ценность работы

Работа имеет теоретический характер. Полученные в диссертационной работе результаты могут быть использованы при исследовании интегрируемых гамильтоновых систем с неполными потоками. Предложенные автором в работе методы и подходы могут быть использованы при анализе других интегрируемых гамильтоновых систем и динамических систем в целом. Некоторые результаты могут найти применение при решении задач квантования комплексных многообразий.

Апробация работы

Результаты диссертации докладывались на следующих научно-исследовательских семинарах и научных конференгциях:

- Научно-исследовательский семинар кафедры дифференциальной геометрии и приложений (рук. академик РАН А.Т. Фоменко), (2011 февраль, март);

- Научно-исследовательский семинар "Современные геометрические метод" (рук. академик РАН А.Т. Фоменко и других), неоднократно (2007 — 2011);

- Научно-исследовательский семинар отдела дифференциальных уравнений МИАН им. В.А. Стеклова (рук. академик РАН Д.В. Аносов, д.ф.м.н., проф. Ю.С. Ильяшенко), июль 2010;

- Научно-исследовательский семинар "Динамические системы и эргодическая теория" (рук. академик РАН Д.В. Аносов, д.ф.м.н., проф. А.М. Степин), ноябрь 2010;

- Воронежские зимние математические школы им. С.Г. Крейна в 2006 и 2008;

- 18-й международной летней школе-семинаре по современным проблемам теоретической и математической физики “Волга—2006”, Казань, июль 2006;

- Конференция “Александровские чтения”, Москва, 2006.

Публикации

Результаты автора по теме диссертации опубликованы в 7 работах, список которых приводится в конце автореферата [1–7].

Структура и объем диссертации

Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав и списка литературы. Общий объем диссертации: 125 страниц, включая 12 рисунков. Список литературы содержит 52 наименования.

Краткое содержание работы

Во **введении** формулируются цели работы, кратко излагаются основные результаты работы и содержание, а также освящается место данных результатов в современной теории интегрируемых гамильтоновых систем.

В **первой главе** изучается топология неособого слоя, четырехмерная окрестность неособого слоя и четырехмерная окрестность бесконечно удаленных точек, для невырожденного многочлена двух комплексных переменных $f(z, w) - \xi$. Также изучается пополнение данного слоя относительно метрики пополнения ρ_ξ, порожденной кососимметричным векторным полем. Топология слоя и особенности кососимметричного векторного поля описаны в терминах многоугольника Ньютона исходного многочлена.

Пусть M^{2n} — гладкое многообразие, ω — симплектическая структура на M^{2n}, $H : M^{2n} \to \mathbb{R}$ — гладкая функция, называемая *гамильтонианом*, и пусть $\operatorname{sgrad} H$ — гамильтоново векторное поле с гамильтонианом H на M^{2n}. Гамильтонову систему (M^{2n}, ω, H) назовем *вполне интегрируемой* (или *интегрируемой по Лиувиллю*), если существует набор гладких функций $f_1 = H, f_2, \dots, f_n : M^{2n} \to \mathbb{R}$, такой что:

1) $f_1, \dots, f_n$ — первые интегралы $\operatorname{sgrad} H$;

2) $f_1, \dots, f_n$ функционально независимы на M^{2n}, то есть почти всюду на M^{2n} их градиенты линейно независимы;

3) $\{f_i, f_j\} = 0$ при любых $i, j = 1, \ldots, n$;

4) векторные поля $\operatorname{sgrad} f_i$, $i = 1, \ldots, n$ полны, то есть естественный параметр на их траекториях определен на всей числовой прямой.

Если выполнены лишь условия 1–3 (а условие полноты потоков не обязательно выполнено), то систему с соответствующим набором первых интегралов $f_1, \ldots, f_n$ назовем *интегрируемой*.

Если естественный параметр на траекториях хотя бы одного из коммутирующих векторных полей $\operatorname{sgrad} f_i$, $i = 1, \ldots, n$ определен не на всей числовой прямой, то набор векторных полей и набор соответствующих потоков назовем *неполными*, а систему — *интегрируемой гамильтоновой системой с неполными потоками*.

Простейшим примером интегрируемой гамильтоновой системы с неполными потоками является система $(\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}, dx \wedge dy, -y)$, заданная на $\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$ векторным полем $v = (1, 0)$ в стандартных координатах x, y на $\mathbb{R}^2$, где $O \in \mathbb{R}^2$ — некоторая точка. Однако в данном примере особенность векторного поля v в точке O является *устранимой*, поскольку можно так определить векторное поле v в точке $O \in \mathbb{R}^2$, что, во-первых, векторное поле v будет определено корректно на всем $\mathbb{R}^2$, а, во-вторых, поток, соответствующий векторному полю v, будет полным. Данный пример можно также рассматривать как пример динамической системы, заданной векторным полем $v = (1, 0)$ на $\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$, для которой векторные поля $v = (1, 0)$ и $u = (0, 1)$ всюду линейно независимы, коммутируют и обладают неполными потоками. Примером динамической системы с *неустранимой особенностью* и неполными коммутирующими потоками является система на $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, заданная векторным полем $v = z^{-(n+1)}$ в стандартной координате z на $\mathbb{C}$, с парой коммутирующих векторных полей v и $i\,v$, где $n \in \mathbb{N}$. Такая особенность называется *полюсом порядка* $n + 1$.

Обозначим через $\mathrm{T}_\xi = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 | f(z, w) = \xi\}$ — неособый слой невырожденного многочлена $f(z, w)$, через n_g — количество целочисленных точек строго внутри многоугольника Ньютона, точек на сторонах многоугольника Ньютона с положительными координатами. Тогда верен результат, доказанный А.Г. Хованским[15 16], описывающий топологию нулевого слоя невырожденного многочлена.

Возникает задача уточнения этого результата в случае, когда $(\mathbb{C}^2, dz \wedge dw, f(z, w))$ — интегрируемая гамильтонова система. В диссертаци-

[15]Хованский А.Г. *Многогранники Ньютона и род полных пересечений.* Функц. анализ и его приложения, 1978, т. 12, вып. 1, с. 51–61

[16]Хованский А.Г. *Многогранники Ньютона и торические многообразия.* Функц. анализ и его приложения, 1977, т. 11, вып. 4, с. 56-67

онной работе был предложен метод пополнения исходного слоя относительно метрики естественным образом связанной с гамильтоновым векторным полем, а именно: интегральные траектории гамильтонова векторного поля совпадают с геодезическими метрики как параметризованные кривые. Заметим, что похожие конструкции использовались в работах С.П. Новикова[17] [18], Л. Бейтса и Э. Лермана[19]. Такой подход позволил связать задачу уточнения результата А.Г. Хованского об описании топологии нулевого слоя с задачей исследования полноты интегрируемой гамильтоновой системы.

Теорема 11. *Пусть* $f(z,w)-\xi_0$ *— невырожденный многочлен относительно своего многоугольника Ньютона* $\mathrm{P}_{f-\xi_0}$, *причем многоугольник Ньютона* $\mathrm{P}_{f-\xi_0}$ *удовлетворяет условию* (i) *выше, и* $\dim \mathrm{P}_{f-\xi_0}=2$. *Тогда существуют* $\varepsilon>0$ *и* $R>0$, *такие что*

1) для любой стороны Γ_l *многоугольника Ньютона, не лежащей на координатных осях, существуют ровно* n_{Γ_l} *голоморфных вложений* $J_{\Gamma_l,n}:(D^2_{\xi_0,\varepsilon})\times(D^2_{0,\varepsilon}\setminus\{0\})\to\mathbb{C}^2$, $1\le n\le n_{\Gamma_l}$, *таких что*

$$f\circ J_{\Gamma_l,n}(\xi,u)=\xi,\quad J^*_{\Gamma_l,n}\omega_{\mathbb{C}}=u^{(1-u_0)\alpha_{\Gamma_l}+(1-v_0)\beta_{\Gamma_l}-1}d\xi\wedge du,$$

$(\xi,u)\in D^2_{\xi_0,\varepsilon}\times(D^2_{0,\varepsilon}\setminus\{0\})$, *где* $n_{\Gamma_l}+1$ *равно количеству точек с целочисленными координатами на стороне* Γ_l, $(\alpha_{\Gamma_l},\beta_{\Gamma_l})$ *— несократимый вектор внешней нормали стороны* Γ_l, *и* $(u_0,v_0)\in\Gamma_l$ *— любая точка на* Γ_l;

2) образы всех этих $n_\mu=\sum_l n_{\Gamma_l}$ *вложений (отвечающих одной и той же стороне, но разным значениям* n, *либо разным сторонам многоугольника Ньютона) попарно не пересекаются, и объединение этих образов содержит* $f^{-1}(D^2_{\xi_0,\varepsilon})\setminus D^4_{0,R}$ *(т.е. дополнение этого объединения в* $f^{-1}(D^2_{\xi_0,\varepsilon})$ *ограничено, а потому компактно).*

К результатам первой главы относятся теорема 11, в которой были введены координаты (ξ,u) в четырехмерной окрестности бесконечно удаленных точек, причем координата ξ постоянна на слое, а координата u задает окрестность бесконечно удаленной точки на слое T_ξ, следствие, описывающее пополнение $\overline{\mathrm{T}}_\xi$ неособого слоя T_ξ относительно метрики g_ξ, а также описывающее в терминах многоугольника Ньютона классификацию систем на слоях с точностью до траекторной эквивалентности.

[17] Novikov S.P. *Dynamical Systems and Differential Forms. Low Dimensional Hamiltonian Systems.* Contemporary mathematics, v. 469, pp. 271-288

[18] Novikov S.P. *Topology of Generic Hamiltonian Foliations on Riemann Surfaces.* Moscow Math. J., 2005, v. 5(3), pp. 633-667

[19] Bates L., Lerman E. *Proper group actions and symplectic stratified spaces.* Pacific J. Math., 1997, v. 181(2), pp. 201–229

Во **второй главе** исследуется классификация гамильтоновых систем с точностью до гамильтоновой эквивалентности в случае гиперэллиптической функции Гамильтона вида $f = z^2 + P_n(w)$, $n = 1, 2, 3, 4$. Кроме того, в этой главе доказана полнота гамильтоновых векторных полей при $n = 1, 2$, построено вложение при $n = 3, 4$ таких систем во вполне интегрируемые гамильтоновы системы, описана топология неособых слоев, а также построены канонические координаты в окрестности неособых слоев.

Обозначим через $H_n(a, b_n, \ldots, b_0)$ $\mathbb{C}$-гамильтонову систему $(\mathbb{C}^2, dz \wedge dw, f(z, w))$ с гамильтонианом $f(z, w) = az^2 + b_n w^n + \cdots + b_1 w + b_0$, $a, b_n, \ldots, b_0 \in \mathbb{C}$, $ab_n \neq 0$.

В следующей теореме собраны результаты настоящей главы, относящиеся к классификации гамильтоновых систем с точностью до гамильтоновой эквивалентности.

Теорема 3. *Пусть дана $\mathbb{C}$-гамильтонова система с гиперэллиптическим гамильтонианом степени n, $n \leq 4$. Тогда:*

1. *Каждая $\mathbb{C}$-гамильтонова система $H_1(a, b, c)$ гамильтоново эквивалентна канонической “линейной” $\mathbb{C}$-гамильтоновой системе $(\mathbb{C}^2(p, q), dp \wedge dq, f_0(p, q) = p)$. Все слои $\mathbb{C}$-гамильтоновой системы $H_1(a, b, c)$ являются неособыми, $\mathbb{C}$-диффеоморфными $\mathbb{C}$.*

2. *Каждая $\mathbb{C}$-гамильтонова система $H_2(a_1, b_1, c_1, d_1)$ гамильтоново эквивалентна системе $H_2(a, 1, 0, 0)$, для $a = a_1 b_1 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Все неособые слои $\mathbb{C}$-гамильтоновой системы $H_2(a, b, c, d)$ $\mathbb{C}$-диффеоморфны $\mathbb{R} \times S^1$.*

3. *Каждая невырожденная $\mathbb{C}$-гамильтонова система $H_3(a, b, c, d, e)$ гамильтоново эквивалентна системе $H_3(r, s, s, 0, 0)$ для некоторых r, $s \in \mathbb{C}$, $rs \neq 0$. Все неособые слои $\mathbb{C}$-гамильтоновой системы $H_3(a, b, c, d, e)$ гомеоморфны $\mathbb{T}^2 \setminus \{p\}$.*

4. *Каждая невырожденная $\mathbb{C}$-гамильтонова система $H_4(a, b, c, d, e, k)$ гамильтоново эквивалентна системе $H_3(r, s, s(p + 1), sp, 0, 0)$ для некоторых r, s, $p \in \mathbb{C}$, $rs \neq 0$. Все неособые слои $\mathbb{C}$-гамильтоновой системы $H_4(a, b, c, d, e, k)$ гомеоморфны $\mathbb{T}^2 \setminus \{p_1, p_2\}$.*

Во второй главе также определена пополненная система при $n = 3, 4$. Это пополнение определено корректно, поскольку функция Гамильтона является аналитической, продолжение симплектической структуры $\omega_{\mathbb{C}}$ невырожденно. Отметим, что ограничения неособых слоев пополненной системы на исходную систему являются неособыми слоями исходной системы.

Одним из основных результатов этой главы являются следствия об интегрируемости по Лиувиллю пополненной системы, как вещественной гамильтоновой системы. При этом вещественные канонические координаты для исходной системы получаются ограничением вещественных координат действие-угол, определенных для пополненной системы в окрестности любого неособого слоя.

В **третьей главе** изучается топология лагранжевых слоений интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы, отвечающих $\mathbb{C}$-гамильтоновым системам с одной комплексной степенью свободы на $\mathbb{C}^2$ с гиперэллиптическими функциями Гамильтона $f = z^2 + P_n(w)$, $n \in \mathbb{N}$. Такая система является интегрируемой (вещественной) гамильтоновой системой $(\mathbb{C}^2, \operatorname{Re}\omega_{\mathbb{C},i}, H = \operatorname{Re} f)$ с двумя степенями свободы с дополнительным первым интегралом $F = \operatorname{Im} f$, причем неособые лагранжевы слои $f^{-1}(\xi)$ гомеоморфны сфере с $[\frac{n-1}{2}]$ ручками и $n - 2[\frac{n-1}{2}]$ проколами, а гамильтоновы векторные поля с гамильтонианами H и F неполны на каждом слое при $n \geq 3$.

Две голоморфные функции $f_i : M_i \to \mathbb{C}$ назовем топологически эквивалентными, если существует сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $h : M_1 \to M_2$ такой, что $f_1 = f_2 \circ h + \text{const}$. В третьей главе описаны классы топологической эквивалентности гиперэллиптических функций f в малых окрестностях особых слоев $f^{-1}(\xi)$ в зависимости от n и комбинаторного типа слоя — набора кратностей критических точек в слое (полулокальная топологическая классификация слоения Лиувилля). Две интегрируемые гамильтоновы системы $(M_i^4, \operatorname{Re}\omega_{\mathbb{C},i}, H_i = \operatorname{Re} f_i)$ с дополнительным первым интегралом $F_i = \operatorname{Im} f_i$, $i = 1, 2$, называют послойно эквивалентными, если существуют сохраняющие ориентацию гомеоморфизмы $h_1 : M_1 \to M_2$ и $h_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ такие, что $f_1 = h_2 \circ f_2 \circ h_1$. Результаты главы показывают, что в малой окрестности любого лагранжева слоя $f^{-1}(\xi)$ послойная эквивалентность систем равносильна топологической эквивалентности функций f и полностью определяется комбинаторным типом слоя. На основе теоремы Р. Тома (1965)[20] описаны реализуемые наборы комбинаторных типов особых слоев для гиперэллиптических гамильтонианов.

Одним из основных результатов главы является описание слоения в локальной окрестности особой точки систем с комплекснозначными полиномиальными гамильтонианами вида $f(z, w) = z^2 + P_n(w)$, $n \in \mathbb{N}$ раздельно для четного и нечетного n. Отдельно исследован случай морсовской осо-

[20] Thom R. *L'équivalence d'une fonction différentiable et d'un polynome* Topology, 1965, v. 3(2), pp. 297-307

бенности. В частности, для четного n описание слоения сформулировано в следующем предложении. Обозначим

$$\overline{V}^4_{\varepsilon,n} := \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z^2+w^n| \le \varepsilon, |w| \le (2\varepsilon)^{1/n}\},$$
$$V^4_{\varepsilon,n} := \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z^2+w^n| \le \varepsilon, |w| < (2\varepsilon)^{1/n}\}.$$

Предложение 3.2.1. *При четном $n \in \mathbb{N}$ для любых $\varepsilon > 0$ и $\xi_0 \in \mathbb{C}$ функция $g = g_n : \overline{V}^4_{\varepsilon,n} \to \mathbb{C}$, $g(z,w) = z^2 + w^n + \xi_0$, топологически эквивалентна функции $q = q_n : M^4_{\varepsilon,n} \to \mathbb{C}$, где $M^4_{\varepsilon,n} = ([0,\varepsilon] \times S^1 \times S^1 \times ([-1,0_-] \bigsqcup [0_+,1]))/\sim$, отношение эквивалентности $\sim$ порождено следующими $n+1$ отношениями:*

$$(r, \varphi \bmod 2\pi, \tfrac{\varphi+t+2\pi k}{n} \bmod 2\pi, 0_-) \sim_{1,k} (r, \varphi \bmod 2\pi, \tfrac{-\varphi+t-2\pi k}{n} \bmod 2\pi, 0_+),$$
$$(0, \varphi \bmod 2\pi, \psi \bmod 2\pi, h) \sim_2 (0, 0 \bmod 2\pi, \psi \bmod 2\pi, h),$$

$0 \le k < n$, $r \in [0,\varepsilon]$, $\varphi \bmod 2\pi, \psi \bmod 2\pi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, $t \in [-\pi,\pi]$, $h \in [-1,0_-] \bigsqcup [0_+,1]$, $q(r, \varphi \bmod 2\pi, \psi \bmod 2\pi, h) = re^{i\varphi} + \xi_0$. Здесь $0_+ := 0 \in [0_+,1]$, $0_- := 0 \in [-1,0_-]$ и $g(\overline{V}^4_{\varepsilon,n}) = q(M^4_{\varepsilon,n}) = \overline{D}^2_{\xi_0,\varepsilon}$.

Это предложение имеет следующий "геометрический" смысл. В пространстве $M^4_{\varepsilon,n}$ каждый слой является несвязным объединением двух полуцилиндров $\{(r, \varphi \bmod 2\pi)\} \times S^1 \times ([0_+,1] \bigsqcup [-1,0_-])$, причем первые соотношения $\sim_{1,k}$ превращают его в сферу с $n-1$-ой ручкой и двумя проколами. Второе соотношение $\sim_2$ отождествляет друг с другом слои вида $(\{(0, \varphi \bmod 2\pi)\} \times S^1 \times ([0_+,1] \bigsqcup [-1,0_-]))/\sim_{1,k}$, $\varphi \bmod 2\pi \in S^1$ (особый слой). Из соотношений следует, что на этом слое окружность $\{(0,0)\} \times S^1 \times \{0_+\}$ стягивается в точку ("перетяжка" на особом слое).

Кроме того, в третьей главе описано слоение в окрестности особого слоя систем с комплекснозначными полиномиальными гамильтонианами вида $f(z,w) = z^2 + P_n(w)$, $n \in \mathbb{N}$. Полученная конструкция классификации слоения является четырехмерным аналогам понятия атома, введенного А.Т. Фоменко, то есть окрестности особого слоя, расслоенной на линии уровня гамильтониана и рассматриваемой с точностью до послойной эквивалентности. Кроме того, в этом случае усложняется конструкция так называемого креста, а склейки не имеют столь наглядного вида. Однако при пересечении $\overline{V}^4_\varepsilon$ окрестности неособого слоя T_{ξ_0} с плоскостью $\Pi = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \mid \operatorname{Im} z = 0, \operatorname{Im} w = 0\}$ возникает стандартный крест и атом.

Будем использовать следующие обозначения. Пусть $L_{n,k,l_1,\dots,l_k,\varepsilon} := \mathrm{T}_{\xi_0} \setminus (\bigcup\limits_{i=1}^{k} U^4_{i,\varepsilon})$ — комплексное многообразие с краем,

$\dim_{\mathbb{C}} L_{n,k,l_1,\dots,l_k,\varepsilon} = 1$, гомеоморфное $M^2_{g,h,b}$ при $n > l$, $M^2_{0,1,1} \bigsqcup M^2_{0,1,1}$ при $n = \sum\limits_{i=1}^{k} l_i$ и всех l_i четных, и $M^2_{0,1,1}$ при $n = \sum\limits_{i=1}^{k} l_i$ при хотя бы одно нечетном l_i, $g = [\frac{n-1}{2}] - \sum\limits_{i=1}^{k} [\frac{l_i}{2}]$, $h = \frac{3+(-1)^n}{2}$, $b = \sum\limits_{i=1}^{k} \frac{3+(-1)^{l_i}}{2}$, $M^2_{0,1,1}$ — проколотый замкнутый двумерный диск. Тогда верна следующая теорема о полулокальной топологической классификации слоения гиперэллиптической голоморфной функции в окрестности особого слоя с несколькими критическими точками, являющаяся одним из основных результатов третьей главы.

Теорема 24. *Пусть* $\mathrm{T}_{\xi_0} = f^{-1}(\xi_0)$ — *(особое или неособое) множество уровня гиперэллиптического многочлена* $f(z,w) = z^2 + P_n(w)$ *степени* $n \geq 2$, *содержащее ровно* $k \geq 0$ *критических точек* $p_1, \dots, p_k \in \mathrm{T}_{\xi_0}$, *причем кратности этих точек равны* $l_1 - 1, \dots, l_k - 1$ *соответственно,* $l_1, \dots, l_k \geq 2$. *Тогда* $l \leq n$, $l < n + k$ *и существует* $\varepsilon_0 > 0$ *такое, что для любого* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *функция* $f|_{f^{-1}(\overline{D}^2_{\xi_0,\varepsilon})}$ *топологически эквивалентна функции* $f_{n,k,l_1,\dots,l_k} : M^4_{n,k,\varepsilon,l_1,\dots,l_k} \to \mathbb{C}$. *Здесь*

$$M^4_{n,k,\varepsilon,l_1,\dots,l_k} = (\bigsqcup_{j=1}^{k} \overline{V}^4_{j,\varepsilon}) \bigcup_{\phi_{n,k,\varepsilon,l_1,\dots,l_k}} (\overline{D}^2_{\xi_0,\varepsilon} \times L_{n,k,\varepsilon,l_1,\dots,l_k})$$

$$:= ((\bigsqcup_{j=1}^{k} \overline{V}^4_{j,\varepsilon}) \bigsqcup (\overline{D}^2_{\xi_0,\varepsilon} \times L_{n,k,\varepsilon,l_1,\dots,l_k}))/(x \sim \phi_{n,k,\varepsilon,l_1,\dots,l_k}(x))$$

получено из несвязного объединения множеств $\overline{V}^4_{j,\varepsilon}$, $1 \leq j \leq k$, *и множества* $\overline{D}^2_{\xi_0,\varepsilon} \times L_{n,k,\varepsilon,l_1,\dots,l_k}$ *отождествлением любой точки* $x \in \partial^+ \overline{V}^4_{j,\varepsilon}$ *с ее образом при гомеоморфизме* $\phi_{n,k,\varepsilon,l_1,\dots,l_k} : \bigsqcup\limits_{j=1}^{k} \partial^+ \overline{V}^4_{j,\varepsilon} \to \overline{D}^2_{\xi_0,\varepsilon} \times \partial L_{n,k,\varepsilon,l_1,\dots,l_k}$, *задаваемом формулами*

$$\phi_{n,k,\varepsilon,l_1,\dots,l_k}(z,w) := (z^2 + w^{l_j} + \xi_0, \gamma_{n,k,l_1,\dots,l_k}((\arg w) \bmod 2\pi, j, \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} \frac{z}{w^{l_j/2}})))$$

при четном l_j *и* $(z,w) \in \partial^+ \overline{V}^4_{j,\varepsilon}$,

$$\phi_{n,k,\varepsilon,l_1,\dots,l_k}(z,w) := (z^2 + w^{l_j} + \xi_0, \gamma_{n,k,l_1,\dots,l_k}(2\arg(\sqrt{w}) \bmod 4\pi, j, -1))$$

при нечетном l_j *и* $(z,w) \in \partial^+ \overline{V}^4_{j,\varepsilon}$, *где ветвь* $\sqrt{w}$ *при нечетном* l_j *и* $(z,w) \in \partial^+ \overline{V}^4_{j,\varepsilon}$ *определена условием* $\operatorname{Im} \frac{z}{(\sqrt{w})^{l_j}} < 0$, $1 \leq j \leq k$, *а функ-*

ция $f_{n,k,l_1,\dots,l_k}$ задается формулами

$$f_{n,k,l_1,\dots,l_k}|_{\overline{V}^4_{j,\varepsilon}}(z,w) = z^2 + w^{l_j} + \xi_0, \quad (z,w) \in \overline{V}^4_{j,\varepsilon},\ 1 \le j \le k,$$

$$f_{n,k,l_1,\dots,l_k}|_{\overline{D}^2_{\xi_0,\varepsilon}\times L_{n,k,\varepsilon,l_1,\dots,l_k}}(\xi,x) = \xi, \quad (\xi,x) \in \overline{D}^2_{\xi_0,\varepsilon} \times L_{n,k,\varepsilon,l_1,\dots,l_k}.$$

При отождествлении $\overline{V}^4_{j,\varepsilon} \approx M^4_{\varepsilon,l_j}$ с помощью топологической эквивалентности, "приклеивающий" гомеоморфизм $\phi_{n,k,\varepsilon,l_1,\dots,l_k}|_{\partial^+\overline{V}^4_{j,\varepsilon}}$ имеет вид

$$\left(\left([0,\varepsilon]\times S^1\right)/\sim\right)\times S^1 \times \{(-1)^{l_j},-1\} \to \overline{D}^2_{\xi_0,\varepsilon}\times \partial L_{n,k,\varepsilon,l_1,\dots,l_k},$$

$$(r,\varphi \bmod 2\pi, \psi \bmod (3-(-1)^{l_j})\pi, \eta) \mapsto (re^{i\varphi}+\xi_0, \gamma_{n,k,l_1,\dots,l_k}(-\eta\psi \bmod (3-(-1)^{l_j})\pi, j,\eta)),$$

$\eta \in \{(-1)^{l_j},-1\}$, где отношение эквивалентности $\sim$ порождено отношениями $(0,\varphi \bmod 2\pi) \sim (0, 0 \bmod 2\pi)$, $\varphi \bmod 2\pi \in S^1$, а функция $f_{n,k,l_1,\dots,l_k}|_{\overline{V}^4_{j,\varepsilon}}$ имеет вид

$$(r,\varphi \bmod 2\pi, \psi \bmod (3-(-1)^{l_j})\pi, h) \mapsto re^{i\varphi}+\xi_0, \quad 1 \le j \le k.$$

При этом $f_{n,k,l_1,\dots,l_k}(M^4_{n,k,\varepsilon,l_1,\dots,l_k}) = \overline{D}^2_{\xi_0,\varepsilon}$.

В **четвертой главе** доказан аналог теоремы Лиувилля для интегрируемых гамильтоновых систем с неполным гамильтоновым векторным полем в случае гамильтониана вида $f(z,w) = z^2+(w-w_1)\dots(w-w_n)$, где $w_i \in \mathbb{R}$, $w_i \ne w_j$, $i,j = 1,\dots,n$, $i \ne j$, в окрестности нулевого слоя.

Доказательство теоремы основано на разрезании окрестности нулевого слоя $\mathrm{T}_0 = \{f(z,w) = 0\}$ на четырехмерные ручки, на каждой из которых вводятся канонические координаты, вычисляются периоды и описывается вид интегральных траекторий на нулевом слое. Теорема доказана раздельно для четного и нечетного n. В частности, ниже сформулирована теорема для нечетного n.

Теорема 25. *Для $\mathbb{C}$-гамильтоновой системы $(\mathbb{C}^2, dz\wedge dw, f)$ с функцией Гамильтона $f(z,w) = z^2 + P_{2n+1}(w)$ и соответствующего лагранжева слоения, где $P_{2n+1}(w) = (w-a_1)\dots(w-a_{2n+1})$, $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1,\dots,2n+1$, $a_1 < a_2 < \ldots < a_{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, существует $\varepsilon > 0$, такое что выполнены следующие свойства:*

1) для любого $\xi \in \mathbb{C}$, $|\xi| < \varepsilon$, слой $\mathrm{T}_\xi = f^{-1}(\xi)$ является неособым и гомеоморфен сфере с n ручками и одним проколом;

2) лагранжево слоение в четырехмерной ε-окрестности $U_\varepsilon(\mathrm{T}_0)$ слоя T_0 тривиально, т.е. послойно гомеоморфно прямому произведению слоя T_0 на открытый двумерный диск $D^2_{0,\varepsilon} = \{\xi \in \mathbb{C} \mid |\xi| < \varepsilon\}$;

3) в окрестности $U_\varepsilon(\mathrm{T}_0)$ существуют $2n$ голоморфных функций

$$I_1,\dots,I_n,J_1,\dots,J_n : U_\varepsilon(\mathrm{T}_0)\to\mathbb{C},$$

а для каждой четырехмерной ε-ручки $G_{\varepsilon,k}\subset U_\varepsilon(\mathrm{T}_0)$, $k=1,\dots,n$, существует голоморфное вложение (задаваемое при $k>1$ “комплексными координатами действие-угол”)

$$(I_k|_{G_{\varepsilon,k}},\varphi_k \bmod 2\pi) : G_{\varepsilon,k}\hookrightarrow \begin{cases} \mathbb{C}\times(\mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z}), & 2\le k\le n;\\ \bigcup\limits_{I_1\in\widetilde{D}_{\varepsilon,1}} \{I_1\}\times\overline{(T^2_{\mathbb{C}}(\frac{dJ_1}{dI_1}(I_1)))\setminus\gamma_{I_1}}, & k=1,\end{cases}$$

где при $k=1$ функция $\varphi_1 \bmod 2\pi$ является многозначной аналитической функцией, через $T^2_{\mathbb{C}}(\frac{dJ_1}{dI_1}(I_1)) := \mathbb{C}/2\pi(\mathbb{Z}\oplus\frac{dJ_1}{dI_1}(I_1)\mathbb{Z})$ обозначен комплексный тор с параметром $\frac{dJ_1}{dI_1}(I_1)\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, через $\gamma_{I_1}\subset T^2_{\mathbb{C}}(\frac{dJ_1}{dI_1}(I_1))$ обозначен образ прямолинейного отрезка $A_3^{(1)}(I_1)A_4^{(1)}(I_1)\subset\mathbb{C}$ (вырождающегося в точку в случае $n=1$, см. п.б) ниже) при проекции $\mathbb{C}\to T^2_{\mathbb{C}}(\frac{dJ_1}{dI_1}(I_1))$, и через $\overline{(T^2_{\mathbb{C}}(\frac{dJ_1}{dI_1}(I_1)))\setminus\gamma_{I_1}}$ обозначено пополнение “надрезанного тора” $(T^2_{\mathbb{C}}(\frac{dJ_1}{dI_1}(I_1)))\setminus\gamma_{I_1}$ относительно римановой метрики $d\varphi_1\overline{d\varphi_1}$, со следующими свойствами:

а) каждая функция $I_k,J_k : U_\varepsilon(\mathrm{T}_0)\to\mathbb{C}$ является голоморфной функцией $I_k=I_k(f)$ и $J_k=J_k(f)$ от f без критических точек, ее множество значений

$$\widetilde{D}_{\varepsilon,k} := I_k(U_\varepsilon(\mathrm{T}_0)) = I_k(G_{\varepsilon,k}),\quad \widehat{D}_{\varepsilon,k} := J_k(U_\varepsilon(\mathrm{T}_0)) = J_k(G_{\varepsilon,k})\ \subset\ \mathbb{C}$$

открыто в $\mathbb{C}$ и гомеоморфно открытому кругу, она выражается в окрестности $U_\varepsilon(\mathrm{T}_0)$ через любую другую такую функцию формулами

$$I_k=I_k(f(I_\ell)),\quad I_k=I_k(f(J_\ell)),\quad J_k=J_k(f(I_\ell)),\quad J_k=J_k(f(J_\ell));$$

где $f(I_k)$ и $f(J_k)$ — функции, обратные к функциям $I_k(f)$ и $J_k(f)$ соответственно ($k=1,\dots,n$);

б) при любых $k=1,\dots,n$ и $I_k\in\widetilde{D}_{\varepsilon,k}$ множество значений “комплексной координаты угол” $\varphi_k \bmod 2\pi|_{G_{\varepsilon,k}\cap\mathrm{T}_{f(I_k)}}$ получается из некоторой замкнутой области $W_{k,I_k}\subset\mathbb{C}$, ограниченной шестиугольником с вершинами $A_1^{(k)}(I_k),\dots,A_6^{(k)}(I_k)\in\mathbb{C}$ (вырождающимся при $k=n$ в параллелограмм с вершинами $A_1^{(k)}(I_k),A_2^{(k)}(I_k)$, $A_3^{(n)}(I_k)=A_4^{(n)}(I_k)$, $A_5^{(n)}(I_k)=A_6^{(n)}(I_k)$) и сторонами, соответствующими геодезическим $d_k(f(I_k))$, $s_{2k-1}(f(I_k))$, $s_{2k-2}(f(I_k))\subset\mathrm{T}_{f(I_k)}$, а также геодезическим

$s_{2k}(f(I_k))$, $s_{2k+1}(f(I_k))\subset \mathrm{T}_{f(I_k)}$ в случае $k<n$, следующим образом: (i) выкидыванием всех вершин (соответствующих бесконечно удаленной точке $p_{f(I_k)}$), и (ii) отождествлением (т.е. склеиванием) при помощи параллельного переноса любой пары сторон, отвечающих одной и той же геодезической (либо $d_k(f(I_k))$, либо $s_1(f(I_1))$ при $k=1$); причем шестиугольник (соответственно параллелограмм при $k=n$) однозначно задается следующими условиями, при $1\le k<n$, $1\le k=n$ соответственно):

- *шестиугольник (или параллелограмм) $\partial W_{k,I_k}\subset\mathbb{C}$ образован тремя парами равных и параллельных сторон, соответствующих следующим геодезическим и получающихся друг из друга следующими сдвигами в плоскости $\mathbb{C}$:*

$$A_1^{(k)}(I_k)A_2^{(k)}(I_k)=\varphi_k(d_k(\xi))\xrightarrow{2\pi}A_5^{(k)}(I_k)A_4^{(k)}(I_k)=\varphi_k(d_k(\xi)),$$

$$A_2^{(k)}(I_k)A_3^{(k)}(I_k)=\varphi_k(s_{2k-1}(\xi))\xrightarrow{-\langle D_k(\xi)\rangle_k}A_1^{(k)}(I_k)A_6^{(k)}(I_k)=\varphi_k(s_{2k-2}(\xi)),$$
$$A_3^{(k)}(I_k)A_4^{(k)}(I_k)=\varphi_k(s_{2k}(\xi))\xrightarrow{-\langle D_k(\xi)\rangle_k}A_6^{(k)}(I_k)A_5^{(k)}(I_k)=\varphi_k(s_{2k+1}(\xi)),\quad k<n,$$

  где $\xi:=f(I_k)\in D^2_{0,\varepsilon}$, через $\delta:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ обозначен параллельный перенос на вектор $\delta\in\mathbb{C}$ в плоскости $\mathbb{C}$, $s_0(\xi):=s_1(\xi)$,

$$\langle D_k(f(I_k))\rangle_k:=2\pi\left(\frac{dJ_k}{dI_k}(I_k)-\frac{dJ_{k-1}}{dI_k}(I_k)+\ldots+(-1)^{k-1}\frac{dJ_1}{dI_k}(I_k)\right),$$

- *при любом $k<n$ выполнено*

$$\overrightarrow{A_3^{(k)}(I_k)A_4^{(k)}(I_k)}=\overrightarrow{A_6^{(k)}(I_k)A_5^{(k)}(I_k)}$$

$$=\langle S_{k+1}(f(I_k))\rangle_k:=2\pi\left(\frac{dI_{k+1}}{dI_k}(I_k)-\frac{dI_{k+2}}{dI_k}(I_k)+\ldots+(-1)^{n-k-1}\frac{dI_n}{dI_k}(I_k)\right),$$

- *точка пересечения диагоналей параллелограмма $A_1^{(k)}(I_k)A_2^{(k)}(I_k)A_3^{(k)}(I_k)A_6^{(k)}(I_k)$ равна $\frac12(A_1^{(k)}(I_k)+A_3^{(k)}(I_k))=0=\varphi_k(0,a_{2k}(f(I_k)))$ (откуда точка пересечения диагоналей (вырождающегося в отрезок при $k=n$) параллелограмма $A_3^{(k)}(I_k)A_4^{(k)}(I_k)A_5^{(k)}(I_k)A_6^{(k)}(I_k)$ равна $\frac12(A_3^{(k)}(I_k)+A_5^{(k)}(I_k))=\pi=\varphi_k(0,a_{2k+1}(f(I_k)))$, а при $k=1$ центры отождествляемых сторон $A_2^{(1)}(I_1)A_3^{(1)}(I_1)$ и $A_1^{(1)}(I_1)A_6^{(1)}(I_1)$ суть отождествляемые точки $\pm\frac12\langle D_1(f(I_1))\rangle_1=\varphi_1(0,a_1(f(I_1)))$);*

в частности, при $k=1$ *для любого* $I_1 \in \widetilde{D}_{\varepsilon,1}$ *образом комплексной угловой координаты* $\varphi_1 \bmod 2\pi|_{G_{\varepsilon,1}\cap \mathrm{T}_{f(I_1)}} : G_{\varepsilon,1}\cap \mathrm{T}_{f(I_1)} \to \overline{(T^2_{\mathbb{C}}(\frac{dJ_1}{dI_1}(I_1)))\setminus\gamma_{I_1}}$ *является весь "пополненный надрезанный тор"* $\overline{(T^2_{\mathbb{C}}(\frac{dJ_1}{dI_1}(I_1)))\setminus\gamma_{I_1}}$ *(совпадающий с тором* $T^2_{\mathbb{C}}(\frac{dJ_1}{dI_1}(I_1))$ *в случае* $n=1$*) за исключением двух точек* $A_3^{(1)}(I_1), A_4^{(1)}(I_1)$ *(совпадающих друг с другом в случае* $n=1$*), являющихся "концами линии надреза" и отвечающих бесконечно удаленной точке;*

в) $(dz\wedge dw)|_{G_{\varepsilon,k}} = dI_k\wedge d\varphi_k$, $k=1,\dots,n$;

г) переменная "действие" $I_k=I_k(f)$ *и функция* $J_k=J_k(f)$ *имеют вид*

$$I_k(\xi)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{a_{2k}(\xi)}^{a_{2k+1}(\xi)}\sqrt{\xi-P_{2n+1}(y)}dy,\ J_k(\xi)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{a_{2k-1}(\xi)}^{a_{2k}(\xi)}\sqrt{\xi-P_{2n+1}(y)}dy,\quad \xi\in D^2_{0,\varepsilon},$$

где в качестве функции $\sqrt{}$ *берутся ее ветви, такие что* $\sqrt{-P_{2n+1}(\frac12(a_{2k}+a_{2k+1}))}>0$ *в первом случае, и* $i\sqrt{-P_{2n+1}(\frac12(a_{2k-1}+a_{2k}))}<0$ *во втором случае;*

д) для любых двух ручек $G_{\varepsilon,k}, G_{\varepsilon,\ell}$*, содержащих в своей границе одно и то же семейство геодезических* $s_j(\xi)$*, выполнено* $k=\ell\pm1$*, причем в случае* $1\le k<n$ *пересечение* $G_{\varepsilon,k}\cap G_{\varepsilon,k+1}$ *является объединением геодезических*

$$G_{\varepsilon,k}\cap G_{\varepsilon,k+1}=\bigcup_{|\xi|<\varepsilon}(s_{2k}(\xi)\cup s_{2k+1}(\xi))=\bigcup_{|\xi|<\varepsilon}(\mathrm{Pr}_w|_{\mathrm{T}_\xi})^{-1}(S_{k+1}(\xi)),$$

и на этом пересечении комплексные координаты угол $\varphi_k \bmod 2\pi$ *и* $\varphi_{k+1}\bmod 2\pi$ *связаны друг с другом формулами:*

$$I'_{k+1}(\xi)\ \varphi_{k+1}|_{s_{2k}(\xi)}+\pi J'_{k+1}(\xi)=I'_k(\xi)\ (\varphi_k|_{s_{2k}(\xi)}-\pi),$$
$$I'_{k+1}(\xi)\ \varphi_{k+1}|_{s_{2k+1}(\xi)}-\pi J'_{k+1}(\xi)=I'_k(\xi)\ (\varphi_k|_{s_{2k+1}(\xi)}-\pi);$$

е) уравнения Гамильтона в координатах $(I_k,\varphi_k \bmod 2\pi)$ *на ручке* $G_{\varepsilon,k}$, $k=1,\dots,n$*, принимают вид:*

$$\dot I_k=0,\quad \dot\varphi_k=\frac{df(I_k)}{dI_k};$$

4) антиканоническая инволюция $\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2$, $(z,w)\mapsto(-z,w)$*, сохраняющая Гамильтониан* f*, переводит каждую четырехмерную* ε*-ручку* $G_{\varepsilon,k}$ *в себя, и ограничение этой инволюции на эту ручку в координатах* $(I_k,\varphi_k\bmod 2\pi)$ *имеет вид* $(I_k,\varphi_k\bmod 2\pi)\mapsto(I_k,-\varphi_k\bmod 2\pi)$, $1\le k\le n$.

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность своим научным руководителям академику РАН Фоменко Анатолию Тимофеевичу и кандидату физико-математических наук, доценту Кудрявцевой Елене Александровне за постановку задач и помощь в работе. Автор благодарен академику РАН Аносову Дмитрию Викторовичу, доктору физико-математических наук, профессору Степину Анатолию Михайловичу, доктору физико-математических наук, профессору Шафаревичу Андрею Игоревичу и кандидату физико-математических наук, доценту Жеглову Александру Борисовичу за внимание к работе и полезные обсуждения. Автор выражает благодарность всем сотрудникам кафедры дифференциальной геометрии и приложений за творческую атмосферу, способствующую научной работе.

Работы автора по теме диссертации

[1] Лепский Т.А., *“Неполные интегрируемые гамильтоновы системы с комплексным полиномиальным гамильтонианом малой степени”*, Матем. сб., 201:10 (2010), 109—136 с.;

[2] Кудрявцева Е.А., Лепский Т.А., *“Топология лагранжевых слоений интегрируемых систем с гиперэллиптическим гамильтонианом”*, Матем. сб., 202:3 (2011), 69–106 с. (Автору принадлежат утверждение 1, теорема 2 в части описания слоения вне окрестностей критических точек, лемма 8, теорема 3 п. 2, п. 3 (iv), п. 4, теорема 3 в части нахождения уравнений, задающих координату “угол”);

[3] Лепский Т.А., *“Оператор монодромии интегрируемой системы* $(\mathbb{R}^4, \omega, H)$ *в условии неполноты кососимметричных векторных полей”*, Вестник МГУ, 2006 №6, 6—10 с.

Материалы и тезисы конференций, статьи в сборниках

[4] Лепский Т.А., *“Фазовые потоки гамильтоновой системы* $(\mathbb{R}^4, \omega, H)$*”* Тезисы XVIII международной летней школы современных проблем теоретической и математической физики, Волга—2006, 54 с.;

[5] Лепский Т.А., *“Оператор монодромии интегрируемой системы* $(\mathbb{R}^4, \omega, H)$ *в условии неполноты кососимметричных векторных полей”*, Труды Воронежской зимней математической школы — 2006, 117—128 с.;

[6] Лепский Т.А., *“Группы монодромии некоторых систем, в условии неполноты полей”*, Тезисы Воронежской зимней школы — 2006, 58 с.;

[7] Лепский Т.А., *“Топология неособого слоя интегрируемой гамильтоновой системы и особенности векторного поля косой градиент в условии неполноты”*, Тезисы Воронежской зимней школы — 2010, 97 с.